Würfelflächen Abiturprüfung LK Bayern 2005

Gegeben ist die Ebenenschar

$$Z_a\colon \vec{x} = \overrightarrow{OD} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} a \\ 2a-4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } D(-2\,|\,0\,|\,-2) \text{ und } \lambda,\ \tau,\ a \in \mathbb{R}.$$

1. a) Alle Scharebenen haben eine Gerade gemeinsam, die mit g bezeichnet wird. Geben Sie eine Gleichung von g an.

   b) Zeigen Sie, dass $Z_a\colon (4a-10)\cdot x_1 - (2a+4)\cdot x_2 + (5a-8)\cdot x_3 + 18a - 36 = 0$ eine weitere mögliche Gleichung für die Ebenenschar Z_a ist.

   c) Berechnen Sie, für welchen Wert des Parameters a die zugehörige Scharebene senkrecht auf der Scharebene Z_1 steht.

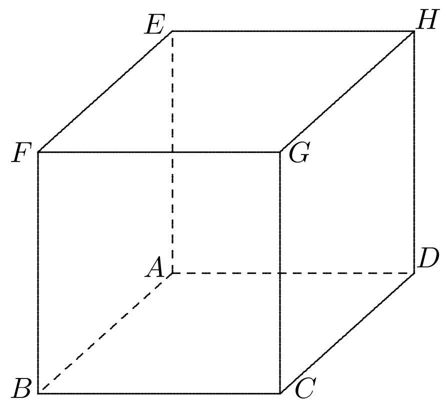
   d) Zeigen Sie, dass die Scharebene Z_2 eine winkelhalbierende Ebene der beiden zueinander senkrechten Scharebenen Z_1 und Z_4 ist.

2. Der Punkt $M(-1\,|\,1\,|\,3)$ ist Mittelpunkt einer Kugel mit Radius $3\sqrt{3}$.

   a) Zeigen Sie, dass der Punkt D auf dieser Kugel liegt, und berechnen Sie die Koordinaten des Kugelpunkts F, für den $[FD]$ ein Durchmesser der Kugel ist. [Ergebnis: $F(0\,|\,2\,|\,8)$]

   b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Kugelpunkte, die auf der Geraden g liegen. [Ergebnis: D und $H(-6\,|\,2\,|\,2)$]

   c) Berechnen Sie die Längen $\overline{DH}$ und $\overline{HF}$ und begründen Sie, dass man die drei Punkte D, F und H zu einem Würfel $ABCDEFGH$ wie in der Abbildung ergänzen kann.



   d) Zeigen Sie, dass das Dreieck DHF in der Ebene Z_2 liegt. Begründen Sie ohne Rechnung nur mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse, warum Z_1 und Z_4 je eine Würfelfläche enthalten.

   e) Der Eckpunkt G liegt in Z_4 (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie die Koordinaten von G.

Würfelflächen   Abiturprüfung LK Bayern 2005   Lösungen

Gegeben ist die Ebenenschar

$$Z_a\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OD} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} a \\ 2a-4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } D(-2\,|\,0\,|\,-2) \text{ und } \lambda,\ \tau,\ a \in \mathbb{R}.$$

1. a) Alle Scharebenen haben eine Gerade gemeinsam, die mit g bezeichnet wird. Geben Sie eine Gleichung von g an.

$$g:\ \vec{x} = \overrightarrow{OD} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) Zeigen Sie, dass
Z_a: $(4a-10)\cdot x_1 - (2a+4)\cdot x_2 + (5a-8)\cdot x_3 + 18a - 36 = 0$
eine weitere mögliche Gleichung für die Ebenenschar Z_a ist.

Kreuzprodukt

c) Berechnen Sie, für welchen Wert des Parameters a die zugehörige Scharebene senkrecht auf der Scharebene Z_1 steht.

$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \implies a = 4$

d) Zeigen Sie, dass die Scharebene Z_2 eine winkelhalbierende Ebene der beiden zueinander senkrechten Scharebenen Z_1 und Z_4 ist.

$$Z_1\colon\ \frac{1}{3}(-2x_1 - 2x_2 - x_3 - 6) = 0$$
$$Z_4\colon\ \frac{1}{3}(-x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 6) = 0$$

Winkelhalbierende: $\frac{1}{3}(-2x_1 - 2x_2 - x_3 - 6) \pm \frac{1}{3}(-x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 6) = 0$

W_1: $x_1 + x_3 + 4 = 0$

W_2: $x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$ $\quad Z_2 = W_2$

2. Der Punkt $M(-1\,|\,1\,|\,3)$ ist Mittelpunkt einer Kugel mit Radius $3\sqrt{3}$.

a) Zeigen Sie, dass der Punkt D auf dieser Kugel liegt, und berechnen Sie die Koordinaten des Kugelpunkts F, für den $[FD]$ ein Durchmesser der Kugel ist. [Ergebnis: $F(0\,|\,2\,|\,8)$]

$|\overrightarrow{MD}| = 3\sqrt{3}, \quad \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{DM}$

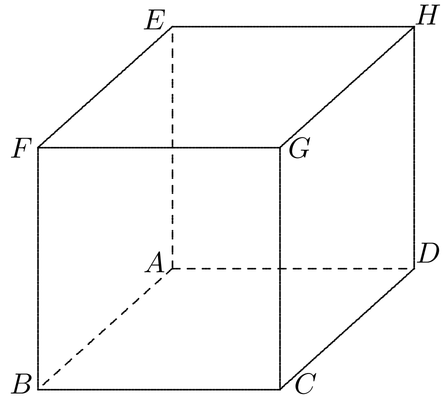
b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Kugelpunkte, die auf der Geraden g liegen.

Schnitt $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -2$ [Ergebnis: D und $H(-6\,|\,2\,|\,2)$]

c) Berechnen Sie die Längen $\overline{DH}$ und $\overline{HF}$ und begründen Sie, dass man die drei Punkte D, F und H zu einem Würfel $ABCDEFGH$ wie in der Abbildung ergänzen kann.

$\overline{DH} = 6,\ \overline{HF} = 6\sqrt{2}$ (Diagonale), $\overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{HF}$

(Dem Würfel ist die Kugel umbeschrieben.)



d) Zeigen Sie, dass das Dreieck DHF in der Ebene Z_2 liegt. Begründen Sie ohne Rechnung nur mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse, warum Z_1 und Z_4 je eine Würfelfläche enthalten.

Nachweis: $F \in Z_2$, D und H liegen auf g

beachte: Z_2 winkelhalbierende Ebene

e) Der Eckpunkt G liegt in Z_4 (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie die Koordinaten von G.

Lotgerade zu Z_4 durch F schneidet Z_4 in $G(-2\,|\,6\,|\,4)$

Rollende Kugel   Abiturprüfung LK Bayern 2005

In einem kartesischen Koordinatensystem ist die Geradenschar

$$g_a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a+2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a,\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ gegeben.}$$

Die Punkte $A(10\,|\,0\,|\,0)$, $B(0\,|\,5\,|\,0)$ und $C(0\,|\,0\,|\,5)$ bestimmen eine Ebene, die mit E bezeichnet wird.

1. a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.
   [mögliches Ergebnis: $E\colon x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 10 = 0$]

   b) Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen der Geraden g_{-1} und der Ebene E.

   c) Zeigen Sie, dass die Gerade g_{-2} in der Ebene E liegt und echt parallel zur Geraden AB ist.

2. a) Der Punkt C wird an der Geraden AB gespiegelt.
   Ermitteln Sie die Koordinaten des Spiegelpunkts C^*. [Ergebnis: $C^*(4\,|\,8\,|\,-5)$]

   b) Weisen Sie nach, dass das Drachenviereck AC^*BC den Flächeninhalt 75 hat.

   c) Die Gerade g_{-2} schneidet die Strecke $[AC]$ im Punkt $A'(8\,|\,0\,|\,1)$ und zerlegt das Dreieck ABC in zwei Teile (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte dieser beiden Teile.

3. In der Ebene $H\colon x_3 = 3$ liegen zwei parallele Schienen s_1 und s_2. Die Schiene s_1 wird durch die Gerade

   $$s_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \tau \in \mathbb{R}$$

   dargestellt. Auf den Schienen s_1 und s_2 ruht eine Kugel mit dem Mittelpunkt $M(18\,|\,28\,|\,5)$ und dem Radius $r = 3$.

   a) Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts S, in dem die Kugel die Schiene s_1 berührt.
   [Ergebnis: $S(20\,|\,27\,|\,3)$]

   b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schiene s_2.

   c) Die Kugel wird nun angestoßen und rollt auf die Ebene E zu. Geben Sie eine Gleichung der Geraden m an, auf der sich dabei der Mittelpunkt der Kugel bewegt.
   Begründen Sie, weshalb der Punkt, in dem die Kugel schließlich die Ebene E berührt, nicht mit dem Schnittpunkt von m und E zusammenfällt.

Rollende Kugel   Abiturprüfung LK Bayern 2005   Lösungen

In einem kartesischen Koordinatensystem ist die Geradenschar

$$g_a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}a\\1\\a+2\end{pmatrix} \quad \text{mit } a,\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ gegeben.}$$

Die Punkte $A(10\,|\,0\,|\,0)$, $B(0\,|\,5\,|\,0)$ und $C(0\,|\,0\,|\,5)$ bestimmen eine Ebene, die mit E bezeichnet wird.

1. a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.
   [mögliches Ergebnis: $E\colon x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 10 = 0$]

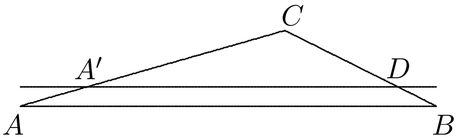
   b) Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen der Geraden g_{-1} und der Ebene E. $\alpha = 35{,}3°$

   c) Zeigen Sie, dass die Gerade g_{-2} in der Ebene E liegt und echt parallel zur Geraden AB ist.
   $\vec{n}_{g_{-2}} \perp \vec{n_E} \implies g_{-2} \parallel E$
   $P(4\,|\,2\,|\,1) \in E$
   oder 2 Punkte von g_{-2} liegen auf E

2. a) Der Punkt C wird an der Geraden AB gespiegelt.
   Ermitteln Sie die Koordinaten des Spiegelpunkts C^*. [Ergebnis: $C^*(4\,|\,8\,|\,-5)$]
   Fußpunkt F, $\overrightarrow{CF} \perp \overrightarrow{AB} \implies \tau = 4$

   b) Weisen Sie nach, dass das Drachenviereck AC^*BC den Flächeninhalt 75 hat.
   $\frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CC^*}| = 75$

   c) Die Gerade g_{-2} schneidet die Strecke $[AC]$ im Punkt $A'(8\,|\,0\,|\,1)$ und zerlegt das Dreieck ABC in zwei Teile (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte dieser beiden Teile.



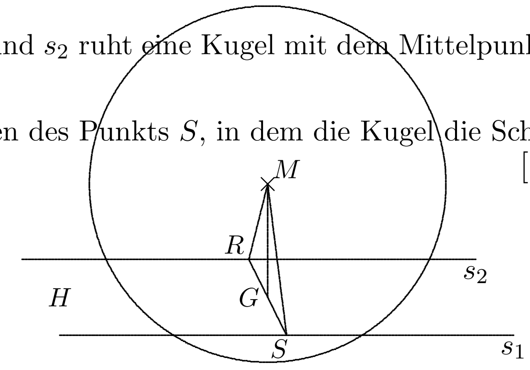
   $\overline{CA'} : \overline{CA} = 4 : 5 \implies A_{A'DC} : A_{ABC} = 4^2 : 5^2$
   $\implies A_{A'DC} : A_{ABDA'} = 16 : 9$
   (betrachte geeignete Flächeneinheiten)

3. In der Ebene $H\colon x_3 = 3$ liegen zwei parallele Schienen s_1 und s_2. Die Schiene s_1 wird durch die Gerade

$$s_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\1\\3\end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \quad \text{mit } \tau \in \mathbb{R}$$

   dargestellt. Auf den Schienen s_1 und s_2 ruht eine Kugel mit dem Mittelpunkt $M(18\,|\,28\,|\,5)$ und dem Radius $r = 3$.

   a) Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts S, in dem die Kugel die Schiene s_1 berührt.
   [Ergebnis: $S(20\,|\,27\,|\,3)$]
   $\overrightarrow{MS} \perp s_1 \implies \tau = 13$



   b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schiene s_2.
   $G(18\,|\,28\,|\,3)$ (senkrechte Projektion von M auf H)
   $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{SG}$, $\quad s_2\colon \vec{x} = \overrightarrow{OR} + \vec{u}_{s_1}$

   c) Die Kugel wird nun angestoßen und rollt auf die Ebene E zu. Geben Sie eine Gleichung der Geraden m an, auf der sich dabei der Mittelpunkt der Kugel bewegt. $m\colon \vec{x} = \overrightarrow{OM} + \vec{u}_{s_1}$
   Begründen Sie, weshalb der Punkt, in dem die Kugel schließlich die Ebene E berührt, nicht mit dem Schnittpunkt von m und E zusammenfällt. $m \not\perp E$