Projektionskurve   Abiturprüfung LK Bayern 2003

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ ist die Ebene $H\colon\ x_1 + x_2 + x_3 - 8 = 0$ sowie die Schar von Geraden

$$g_a\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} a^2 \\ 0 \\ -a^2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3a \\ -3a \\ 8 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R} \text{ gegeben.}$$

1. a) Zeigen Sie, dass keine der Geraden g_a parallel und keine senkrecht zur Ebene H verläuft.

   b) Welche dieser Geraden schneidet H unter dem größten Winkel? Berechnen Sie diesen maximalen Winkel auf eine Dezimale genau.

   c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S_a von g_a mit H.
   [zur Kontrolle: $S_a\big(a^2 + 3a \mid -3a \mid 8 - a^2\big)$]

   d) Zeigen Sie, dass der Punkt $S(-2 \mid 6 \mid 4)$ derjenige Punkt aus der Schar der Schnittpunkte S_a ist, der die geringste Entfernung vom Ursprung hat. Geben Sie diese Entfernung an.

   e) Die Punkte S_a bilden in H eine Kurve. Diese wird parallel zur x_3-Achse in die x_1x_2-Ebene projiziert; die Projektion heißt P. Fertigen Sie eine Zeichnung von P in der x_1x_2-Ebene an. Um welchen Kurventyp handelt es sich bei P vermutlich? Überprüfen Sie Ihre Vermutung, indem Sie eine Koordinatengleichung von P aufstellen.

2. Ferner sind die Punkte $A(1 \mid 6 \mid 1)$ und $B(-2 \mid 9 \mid 1)$ gegeben.

   a) Weisen Sie nach, dass sich die Punkte A und B zu einem regulären Sechseck $ABCDEF$ mit dem Mittelpunkt $S(-2 \mid 6 \mid 4)$ ergänzen lassen.
   Ermitteln Sie die Koordinaten der Ergänzungspunkte C und D.

   b) Das Sechseck $ABCDEF$ rotiert nun um die Achse AD. Beschreiben Sie das Aussehen des dabei entstehenden Rotationskörpers. Ermitteln Sie eine Gleichung der kleinsten Kugel, die den Rotationskörper enthält.
   Liegt der Ursprung des Koordinatensystems innerhalb oder außerhalb dieses Rotationskörpers? Begründen Sie Ihre Antwort.

Projektionskurve Abiturprüfung LK Bayern 2003 Lösungen

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ ist die Ebene $H\colon\ x_1 + x_2 + x_3 - 8 = 0$ sowie die Schar von Geraden

$$g_a\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} a^2 \\ 0 \\ -a^2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3a \\ -3a \\ 8 \end{pmatrix},\quad \lambda \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R} \text{ gegeben.}$$

1. a) Zeigen Sie, dass keine der Geraden g_a parallel und keine senkrecht zur Ebene H verläuft.

$$\vec{u}_{g_a} \cdot \vec{n}_H \neq 0, \quad \vec{u}_{g_a} \neq \lambda \vec{n}_H$$

b) Welche dieser Geraden schneidet H unter dem größten Winkel? Berechnen Sie diesen maximalen Winkel auf eine Dezimale genau.

$$\sin\alpha = \frac{\vec{u}_{g_a} \cdot \vec{n}_H}{|\,\vec{u}_{g_a}\,| \cdot |\,\vec{n}_H\,|} = \frac{8}{\sqrt{18a^2 + 64} \cdot \sqrt{3}}, \quad \text{maximal für } a = 0, \quad \alpha_{max} = 35{,}3^\circ$$

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S_a von g_a mit H.

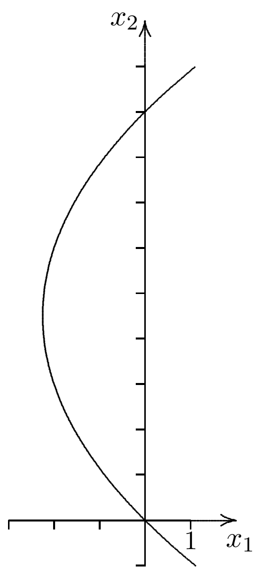
[zur Kontrolle: $S_a\big(a^2 + 3a \mid -3a \mid 8 - a^2\big)$]

d) Zeigen Sie, dass der Punkt $S(-2 \mid 6 \mid 4)$ derjenige Punkt aus der Schar der Schnittpunkte S_a ist, der die geringste Entfernung vom Ursprung hat. Geben Sie diese Entfernung an.

$$|\,\overrightarrow{OS_a}\,| = \sqrt{(a^2 + 3a)^2 + (-3a)^2 + (8 - a^2)^2} = \sqrt{f(a)}$$

$$f'(a) = 0 \implies a_1 = 0,\ a_2 = -\tfrac{1}{4},\ a_1 = -2, \quad d_{min} = \sqrt{56}$$

e) Die Punkte S_a bilden in H eine Kurve. Diese wird parallel zur x_3-Achse in die x_1x_2-Ebene projiziert; die Projektion heißt P. Fertigen Sie eine Zeichnung von P in der x_1x_2-Ebene an. Um welchen Kurventyp handelt es sich bei P vermutlich? Überprüfen Sie Ihre Vermutung, indem Sie eine Koordinatengleichung von P aufstellen.



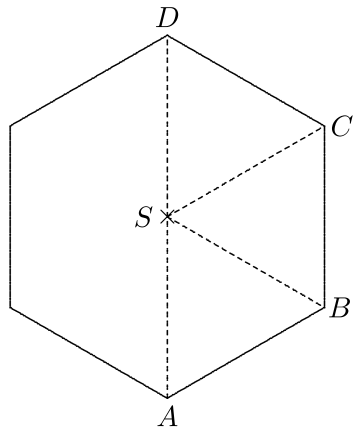
Parabel

$x_1 = a^2 + 3a$
$x_2 = -3a$
$x_3 = 0$

$$\implies x_1 = \frac{1}{9}x_2^2 - x_2$$

2. Ferner sind die Punkte $A(1 \mid 6 \mid 1)$ und $B(-2 \mid 9 \mid 1)$ gegeben.

a) Weisen Sie nach, dass sich die Punkte A und B zu einem regulären Sechseck $ABCDEF$ mit dem Mittelpunkt $S(-2 \mid 6 \mid 4)$ ergänzen lassen.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Ergänzungspunkte C und D.

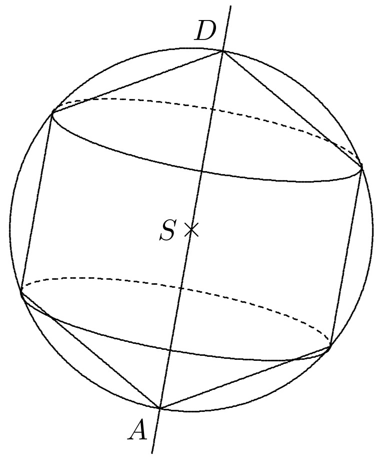


$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AS}| = |\overrightarrow{BS}| = \sqrt{18}$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{AB}, \quad C(-5 \mid 9 \mid 4)$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{AS}, \quad D(-5 \mid 6 \mid 7)$$

b) Das Sechseck $ABCDEF$ rotiert nun um die Achse AD. Beschreiben Sie das Aussehen des dabei entstehenden Rotationskörpers. Ermitteln Sie eine Gleichung der kleinsten Kugel, die den Rotationskörper enthält.
Liegt der Ursprung des Koordinatensystems innerhalb oder außerhalb dieses Rotationskörpers? Begründen Sie Ihre Antwort.



Zylinder mit aufgesetzten Kegeln

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}\right]^2 = 18$$

$$|\overrightarrow{OS}| = \sqrt{56} > r = \sqrt{18}$$

Der Koordinatenursprung liegt außerhalb des Rotationskörpers.

Ebenenschar-Aufgabe Abiturprüfung LK Bayern 2003

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(5\,|\,0\,|\,1)$, $B(0\,|\,4\,|\,2)$ und $C(0\,|\,0\,|\,t)$ mit $0 < t < 6$ gegeben.

1. a) Berechnen Sie für die Gerade AB den Schnittpunkt mit der x_1x_2-Ebene sowie ihren Abstand d zur x_3-Achse.

   [Teilergebnis: $\dfrac{20}{\sqrt{41}}$]

   b) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ABC nicht kleiner als 10 ist.

   c) Untersuchen Sie, für welche der zulässigen Werte von t das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

Ferner ist der Punkt $S(0\,|\,0\,|\,6)$ gegeben. A', B', C' sind die Spurpunkte der Geraden SA, SB, SC in der Koordinatenebene $x_3 = 0$.

2. a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte A', B' und C'.

   [Teilergebnis: $A'(6\,|\,0\,|\,0)$, $B'(0\,|\,6\,|\,0)$]

   b) Legen Sie ein Koordinatensystem an (ganze Seite; Querformat; Koordinatenursprung in der Blattmitte). Tragen Sie darin die Pyramide $A'B'C'S$ und das Dreieck ABC für $t = 3$ ein.

   c) Berechnen Sie den Winkel, den die Ebene ABC für $t = 3$ mit der x_1x_2-Ebene bildet.

   d) Ermitteln Sie den Wert von t, für den das Dreieck ABC die Pyramide $A'B'C'S$ in zwei volumengleiche Teile zerlegt.

3. Der Schnittpunkt von AB mit $A'B'$ heißt P, der von AC mit $A'C'$ bzw. BC mit $B'C'$ heißt Q_t bzw. R_t ($t \neq 1$ und $t \neq 2$).

   a) Bringen Sie für $t = 3$ die genannten Geraden in Ihrer Zeichnung zum Schnitt.

   b) In Ihrer Zeichnung sollten P, Q_3, R_3 auf einer Geraden liegen. Warum liegen die Punkte P, Q_t, R_t stets auf einer Geraden s_t? (Begründung ohne Rechnung genügt.)
   Beschreiben Sie, welcher besonderen Lage sich die Geraden s_t für $t \to 1$ bzw. für $t \to 2$ nähern und geben Sie jeweils eine Gleichung der zugehörigen Grenzgeraden an.

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(5\,|\,0\,|\,1)$, $B(0\,|\,4\,|\,2)$ und $C(0\,|\,0\,|\,t)$ mit $0 < t < 6$ gegeben.

1. a) Berechnen Sie für die Gerade AB den Schnittpunkt mit der x_1x_2-Ebene sowie ihren Abstand d zur x_3-Achse.
   $D(10\,|\,-4\,|\,0)$ $\left[\text{ Teilergebnis: } \dfrac{20}{\sqrt{41}}\right]$ Abstand windschiefer Geraden

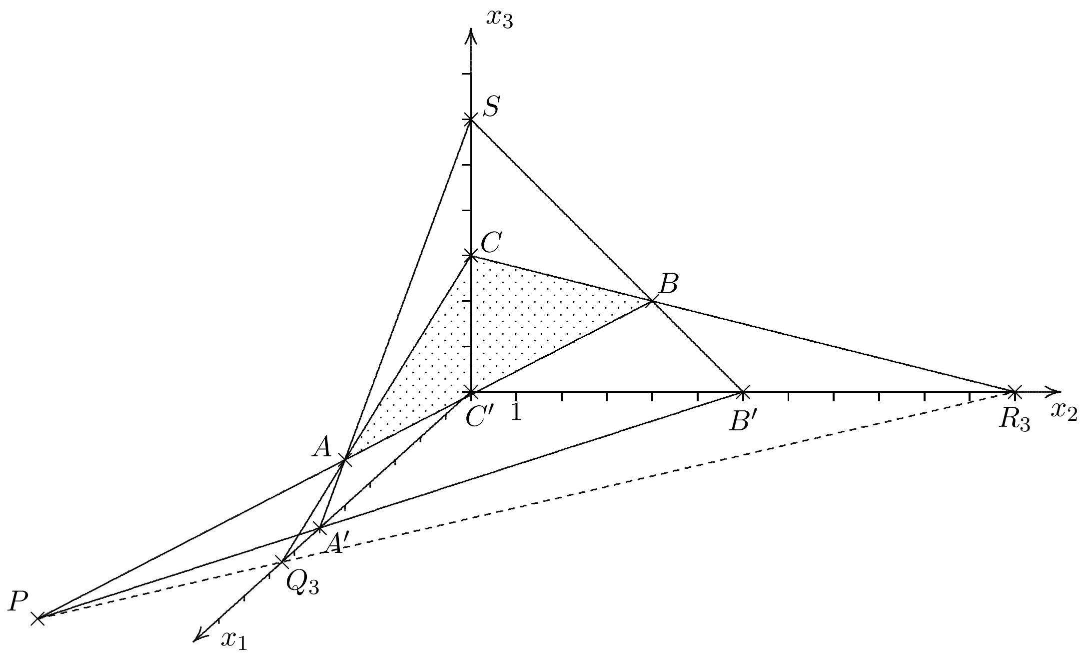
   b) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ABC nicht kleiner als 10 ist.
   $$F_{ABC} = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB}\,|\cdot h = \frac{1}{2}\sqrt{42}\cdot h$$
   $$h_{min} = \frac{20}{\sqrt{41}} \implies F_{ABC} > 10$$

   c) Untersuchen Sie, für welche der zulässigen Werte von t das Dreieck ABC rechtwinklig ist.
   3 Möglichkeiten sind zu untersuchen.
   $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \implies t_1 = -24,\quad t_1 \notin\,]0,6[$$
   $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \implies t_2 = 18,\quad t_2 \notin\,]0,6[$$
   $$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \implies (t-1)(t-2) = 0,\quad t_3 = 1,\ t_4 = 2,\quad t_3, t_4 \in\,]0,6[$$

Ferner ist der Punkt $S(0\,|\,0\,|\,6)$ gegeben. A', B', C' sind die Spurpunkte der Geraden SA, SB, SC in der Koordinatenebene $x_3 = 0$.

2. a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte A', B' und C'.
   $[\text{ Teilergebnis: } A'(6\,|\,0\,|\,0),\ B'(0\,|\,6\,|\,0)\ ]$ $C'(0\,|\,0\,|\,0)$

   b) Legen Sie ein Koordinatensystem an (ganze Seite; Querformat; Koordinatenursprung in der Blattmitte). Tragen Sie darin die Pyramide $A'B'C'S$ und das Dreieck ABC für $t = 3$ ein.



c) Berechnen Sie den Winkel, den die Ebene ABC für $t = 3$ mit der x_1x_2-Ebene bildet.

$$\vec{n}_{ABC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 25{,}3°$$

d) Ermitteln Sie den Wert von t, für den das Dreieck ABC die Pyramide $A'B'C'S$ in zwei volumengleiche Teile zerlegt.

$$V_{A'B'C'S} = 36\ VE \quad \text{(elementar)}$$

$$V_{ABCS} = \frac{1}{6}\,|\det(\,\vec{b}-\vec{a},\,\vec{s}-\vec{a},\,\vec{c}-\vec{a}\,)\,| = 20 - \frac{10}{3}t \implies t = \frac{3}{5}$$

3. Der Schnittpunkt von AB mit $A'B'$ heißt P, der von AC mit $A'C'$ bzw. BC mit $B'C'$ heißt Q_t bzw. R_t ($t \neq 1$ und $t \neq 2$).

a) Bringen Sie für $t = 3$ die genannten Geraden in Ihrer Zeichnung zum Schnitt.

b) In Ihrer Zeichnung sollten P, Q_3, R_3 auf einer Geraden liegen. Warum liegen die Punkte P, Q_t, R_t stets auf einer Geraden s_t? (Begründung ohne Rechnung genügt.)
Beschreiben Sie, welcher besonderen Lage sich die Geraden s_t für $t \to 1$ bzw. für $t \to 2$ nähern und geben Sie jeweils eine Gleichung der zugehörigen Grenzgeraden an.

P, Q_t, R_t liegen auf der Schnittgeraden von E_{ABS} und x_1x_2-Ebene.

$$E_{ABC}\colon \begin{pmatrix} 4(t-1) \\ 5(t-2) \\ 20 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 20t = 0$$

$$t = 1, \quad \text{Schnitt von } E_{ABC}\colon \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 4 = 0 \text{ mit der } x_1x_2\text{-Ebene} \quad x_3 = 0 \text{ ergibt}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t = 2, \quad \text{Schnitt von } E_{ABC}\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 10 = 0 \text{ mit der } x_1x_2\text{-Ebene} \quad x_3 = 0 \text{ ergibt}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese beiden Fälle ergeben sich, wenn C die Höhe (den z-Wert) von A bzw B erreicht.

In dieser Aufgabe gibt es eine ansprechende enge Beziehung von Anschauung und Rechnung.
Leider steigt bei einem allgemeinen Ansatz in 3b) der Rechenaufwand ins Uferlose.
Statt C sollte es besser C_t heißen.