Bahnverkehr-Aufgabe   Abiturprüfung LK Bayern 1998

Um den Bahnverkehr zu beschleunigen, werden von einem Bahnunternehmen neue Züge eingesetzt. Auf einer Strecke verkehren in einer Richtung täglich 9 Züge des alten Typs A und 3 Züge des neuen Typs B; jeder Zug fährt genau einmal am Tag. Die Züge sind nur hinsichtlich des Typs unterscheidbar. Züge vom Typ A haben die Pannenwahrscheinlichkeit 0,5 %, d. h., mit dieser Wahrscheinlichkeit tritt bei einer Fahrt eine Panne auf. Es wird angenommen, dass es bei einer Fahrt höchstens zu einer Panne kommt.

1. Wie viele verschiedene Zugfolgen gibt es an einem Tag für die 12 Züge, wenn
   a) der erste Zug vom Typ B ist,
   b) keine zwei Züge vom Typ B hintereinander fahren?

2. Ein Zug vom Typ A benötigt für eine pannenfreie Fahrt 40 Minuten, einer vom Typ B nur 35 Minuten. Eine Panne verlängert ausschließlich die betroffene Fahrt, und zwar um 10 Minuten. Das Bahnunternehmen stellt fest, dass die mittlere Fahrzeit auf der Strecke 39 Minuten beträgt.
   Berechnen Sie die Pannenwahrscheinlichkeit, die Züge vom Typ B demnach haben.
   In der Einführungssphase haben Züge vom Typ B eine Pannenwahrscheinlichkeit von 8,5 %.

3. Die 9 Züge vom Typ A und die 3 Züge vom Typ B verkehren täglich in zufälliger Reihenfolge.
   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss ein Fahrgast bei seiner Fahrt mit dem Auftreten einer Panne rechnen?
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt bei fünf Fahrten mehr als eine Panne auf?
   c) Auf einer Fahrt tritt keine Panne auf.
      Mit welcher Wahrscheinlichkeit war das eine Fahrt mit Typ B?

4. Untersuchen Sie für 3 aufeinander folgende Fahrten eines Zugs vom Typ B die Ereignisse $C =$ „Höchstens eine Pannenfahrt“ und $D =$ „Panne bei der zweiten Fahrt“ auf Unabhängigkeit.

5. Der Hersteller verbessert nun die Züge vom Typ B. Er behauptet, dass die Pannenwahrscheinlichkeit pro Fahrt jetzt nur noch höchstens 1% beträgt. Die Behauptung des Herstellers (Nullhypothese) soll mit einem Signifikanztest auf dem 5%-Signifikanzniveau überprüft werden. Dazu lässt das Unternehmen an 255 Werktagen eines Jahres bei allen 12 Fahrten am Tag nur noch Züge vom Typ B fahren und ermittelt die Anzahl der Pannenfahrten. Bestimmen Sie mit der Normalverteilung die Entscheidungsregel.

Bahnverkehr-Aufgabe   Abiturprüfung LK Bayern 1998 Lösungen

Um den Bahnverkehr zu beschleunigen, werden von einem Bahnunternehmen neue Züge eingesetzt. Auf einer Strecke verkehren in einer Richtung täglich 9 Züge des alten Typs A und 3 Züge des neuen Typs B; jeder Zug fährt genau einmal am Tag. Die Züge sind nur hinsichtlich des Typs unterscheidbar. Züge vom Typ A haben die Pannenwahrscheinlichkeit 0,5 %, d. h., mit dieser Wahrscheinlichkeit tritt bei einer Fahrt eine Panne auf. Es wird angenommen, dass es bei einer Fahrt höchstens zu einer Panne kommt.

1. Wie viele verschiedene Zugfolgen gibt es an einem Tag für die 12 Züge, wenn
   a) der erste Zug vom Typ B ist, $\frac{11!}{9!\cdot 2!} = \binom{11}{2} = \binom{11}{9} = 55$
   b) keine zwei Züge vom Typ B hintereinander fahren?

   $\ldots BA \ldots BA \ldots B \ldots$ 7 $A's$ sind auf 4 Plätze zu verteilen, $\binom{10}{7} = 120$ (siehe k Elemente auf n Plätze)

2. Ein Zug vom Typ A benötigt für eine pannenfreie Fahrt 40 Minuten, einer vom Typ B nur 35 Minuten. Eine Panne verlängert ausschließlich die betroffene Fahrt, und zwar um 10 Minuten. Das Bahnunternehmen stellt fest, dass die mittlere Fahrzeit auf der Strecke 39 Minuten beträgt.
   Berechnen Sie die Pannenwahrscheinlichkeit, die Züge vom Typ B demnach haben.
   In der Einführungssphase haben Züge vom Typ B eine Pannenwahrscheinlichkeit von 8,5 %.

   $$3\cdot 35 + 3\cdot x\cdot 10 + 9\cdot 40 + 9\cdot 0{,}005\cdot 10 = 12\cdot 39 \quad\Longrightarrow\quad x = 8{,}5\,\%$$

3. Die 9 Züge vom Typ A und die 3 Züge vom Typ B verkehren täglich in zufälliger Reihenfolge.
   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss ein Fahrgast bei seiner Fahrt mit dem Auftreten einer Panne rechnen?

   $$\frac{9}{12}\cdot 0{,}005 + \frac{3}{12}\cdot 0{,}085 = 2{,}5\,\%$$

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt bei fünf Fahrten mehr als eine Panne auf?

   $$P^{5}_{0{,}025}(X > 1) = 0{,}6\,\%$$

   c) Auf einer Fahrt tritt keine Panne auf.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit war das eine Fahrt mit Typ B?

   $$P(B \mid \textit{keine Panne}) = \frac{\frac{3}{12}\cdot 0{,}915}{\frac{9}{12}\cdot 0{,}995 + \frac{3}{12}\cdot 0{,}915} = 23{,}5\,\%$$

4. Untersuchen Sie für 3 aufeinander folgende Fahrten eines Zugs vom Typ B die Ereignisse C = „Höchstens eine Pannenfahrt“ und D = „Panne bei der zweiten Fahrt“ auf Unabhängigkeit.

   $$P(C) = P^{3}_{0{,}085}(Y \le 1) = 98{,}0\,\%$$
   $$P(D) = 0{,}085$$
   $$P(C\cap D) = 0{,}915\cdot 0{,}085\cdot 0{,}915 \ne P(C)\cdot P(D)$$

5. Der Hersteller verbessert nun die Züge vom Typ B. Er behauptet, dass die Pannenwahrscheinlichkeit pro Fahrt jetzt nur noch höchstens 1 % beträgt. Die Behauptung des Herstellers (Nullhypothese) soll mit einem Signifikanztest auf dem 5 %-Signifikanzniveau überprüft werden. Dazu lässt das Unternehmen an 255 Werktagen eines Jahres bei allen 12 Fahrten am Tag nur noch Züge vom Typ B fahren und ermittelt die Anzahl der Pannenfahrten. Bestimmen Sie mit der Normalverteilung die Entscheidungsregel.

   Binomialverteilung (für eine geänderte Aufgabenstellung): $P^{255\cdot 12}_{0{,}01}(Z \ge k) \le 0{,}05 \quad\Longrightarrow\quad k \ge 41$

   Für $Z \ge 41$ kann die Nullhypothese verworfen werden.

   $$\mu = 3060\cdot 0{,}01$$
   $$\sigma = \sqrt{3060\cdot 0{,}01\cdot 0{,}99}$$
   $$P(Z \ge k) \approx 1 - \Phi\left(\frac{k - 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right) \le 0{,}05 \quad\Longrightarrow\quad k \ge 40$$

Rinderseuche-Aufgabe Abiturprüfung LK Bayern 1998

In der Rinderpopulation eines Landes tragen 4% der Rinder den Erreger der Seuche B in sich; diese werden im Folgenden als B-Rinder bezeichnet. Alle anderen Rinder werden im Folgenden als gesund bezeichnet. Äußerlich sind B-Rinder nicht von gesunden Rindern zu unterscheiden. Man kann von einem gleichmäßigen Durchseuchungsgrad innerhalb des Landes ausgehen. In Instituten kann durch Untersuchung der Zellflüssigkeit der B-Erreger zweifelsfrei nachgewiesen werden.

1. a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter 100 Rindern mindestens zwei und weniger als sechs B-Rinder?

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter 1000 Rindern mehr als 30 und weniger als 50 B-Rinder? Schätzen Sie diese Wahrscheinlichkeit mit der Ungleichung von Tschebyschew ab.

   c) Wie viele Rinder müssen in einem Institut mindestens untersucht werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % wenigstens ein B-Rind entdeckt wird?

2. Ein Institut untersucht 3000 Rinder. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind mindestens 100 dieser Rinder B-Rinder? Rechnen Sie mit der Normalverteilung als Näherung.

3. Durch einen zweiseitigen Test auf dem 5 %-Signifikanzniveau soll mit einer Stichprobe von 200 Rindern der Prozentsatz für B-Rinder überprüft werden. Bestimmen Sie einen möglichst großen Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{0, \ldots, k_1\} \cup \{k_2, \ldots, 200\}$ so, dass die Hypothese $H_0\colon p_0 = 0{,}04$ in jedem Teilbereich mit höchstens 2,5 % Wahrscheinlichkeit irrtümlich abgelehnt wird.

4. Die Rinderseuche wurde auch in ein Nachbarland eingeschleppt. Noch ist unbekannt, wie groß der Anteil p^* der B-Rinder in dieser Rinderpopulation ist. Für eine groß angelegte Reihenuntersuchung mehrerer tausend Rinder zur Bestimmung von p^* muss man sich zwischen zwei Methoden entscheiden. Es werden jeweils Gruppen von 20 Rindern untersucht; dabei wird zunächst jedem Rind Zellflüssigkeit entnommen.

   Methode I: Es wird Zellflüssigkeit aller 20 Rinder vermischt und das Gemisch untersucht. Wird kein Hinweis auf B festgestellt, so sind keine weiteren Untersuchungen notwendig. Stellt man im Gemisch den Erreger der B-Seuche fest, werden die 20 Zellflüssigkeiten noch einzeln untersucht.

   Methode II: Die 20 Proben von Zellflüssigkeit werden von vornherein einzeln untersucht.

   Für welche Werte von p^* sind bei Methode I weniger Zellflüssigkeitsuntersuchungen zu erwarten als bei Methode II?

5. Im Institut wurden versehentlich fünf B-Rinder und sieben gesunde Rinder in einem Stall zusammen untergebracht. Um sie wieder zu trennen, werden sie der Reihe nach untersucht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird mit der 7. Untersuchung das letzte der fünf B-Rinder gefunden?

6. Ein von einem Tierarzt durchzuführender, einfacher Schnelltest erkennt 95 % der B-Rinder als solche. Irrtümlicherweise stuft dieser Schnelltest von den gesunden Rindern 15 % als B-Rinder ein. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Durchseuchungsgrad von 4% ein durch den Schnelltest für gesund erklärtes Rind auch wirklich gesund ist.

Rinderseuche-Aufgabe Abiturprüfung LK Bayern 1998 Lösungen

In der Rinderpopulation eines Landes tragen 4% der Rinder den Erreger der Seuche B in sich; diese werden im Folgenden als B-Rinder bezeichnet. Alle anderen Rinder werden im Folgenden als gesund bezeichnet. Äußerlich sind B-Rinder nicht von gesunden Rindern zu unterscheiden. Man kann von einem gleichmäßigen Durchseuchungsgrad innerhalb des Landes ausgehen. In Instituten kann durch Untersuchung der Zellflüssigkeit der B-Erreger zweifelsfrei nachgewiesen werden.

1. a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter 100 Rindern mindestens zwei und weniger als sechs B-Rinder? $P_{0,04}^{100}(2 \leq X \leq 5) = 70{,}1\,\%$

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter 1000 Rindern mehr als 30 und weniger als 50 B-Rinder? Schätzen Sie diese Wahrscheinlichkeit mit der Ungleichung von Tschebyschew ab.
   $$P(|\,X-\mu\,| < \alpha) \;\geq\; 1 - \frac{V(X)}{\alpha^2} \;= 61{,}6\,\%, \quad \alpha = 10,\; \mu = 40,\; V(X) = 38{,}4$$

   c) Wie viele Rinder müssen in einem Institut mindestens untersucht werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % wenigstens ein B-Rind entdeckt wird?
   $$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) > 0{,}9 \quad\Longleftrightarrow\quad 1 - 0{,}96^n > 0{,}9 \quad\Longrightarrow\quad n > 56{,}4\,\%, \;\; \textit{mindestens } 57$$

2. Ein Institut untersucht 3000 Rinder. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind mindestens 100 dieser Rinder B-Rinder? Rechnen Sie mit der Normalverteilung als Näherung.

   Binomialverteilung (für eine geänderte Aufgabenstellung): $P_{0,04}^{3000}(Z \geq 100) = 97{,}4\,\%$
   $$\mu = 120, \quad \sigma = \sqrt{115{,}2} \qquad P(\,Z \geq 100) \;\approx\; 1 - \Phi\Big(\frac{100 - 0{,}5 - \mu}{\sigma}\Big) \;=\; 97{,}2\,\%$$

3. Durch einen zweiseitigen Test auf dem 5 %-Signifikanzniveau soll mit einer Stichprobe von 200 Rindern der Prozentsatz für B-Rinder überprüft werden. Bestimmen Sie einen möglichst großen Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{0, \ldots, k_1\} \cup \{k_2, \ldots, 200\}$ so, dass die Hypothese $H_0\colon p_0 = 0{,}04$ in jedem Teilbereich mit höchstens 2,5 % Wahrscheinlichkeit irrtümlich abgelehnt wird.
   $$P(X \leq k_1) \leq 2{,}5\,\%, \quad P(X \geq k_2) \leq 2{,}5\,\%, \quad \overline{A} = \{0, \ldots, 2\} \cup \{15, \ldots, 200\}$$

4. Die Rinderseuche wurde auch in ein Nachbarland eingeschleppt. Noch ist unbekannt, wie groß der Anteil p^* der B-Rinder in dieser Rinderpopulation ist. Für eine groß angelegte Reihenuntersuchung mehrerer tausend Rinder zur Bestimmung von p^* muss man sich zwischen zwei Methoden entscheiden. Es werden jeweils Gruppen von 20 Rindern untersucht; dabei wird zunächst jedem Rind Zellflüssigkeit entnommen.

   Methode I: Es wird Zellflüssigkeit aller 20 Rinder vermischt und das Gemisch untersucht. Wird kein Hinweis auf B festgestellt, so sind keine weiteren Untersuchungen notwendig. Stellt man im Gemisch den Erreger der B-Seuche fest, werden die 20 Zellflüssigkeiten noch einzeln untersucht.

   Methode II: Die 20 Proben von Zellflüssigkeit werden von vornherein einzeln untersucht.

   Für welche Werte von p^* sind bei Methode I weniger Zellflüssigkeitsuntersuchungen zu erwarten als bei Methode II? $q^* = 1 - p^*, \quad 20 > (1 - {q^*}^{20}) \cdot 21 + {q^*}^{20} \quad\Longrightarrow\; p^* < 13{,}9\,\%$

5. Im Institut wurden versehentlich fünf B-Rinder und sieben gesunde Rinder in einem Stall zusammen untergebracht. Um sie wieder zu trennen, werden sie der Reihe nach untersucht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird mit der 7. Untersuchung das letzte der fünf B-Rinder gefunden?
   $$\text{z.B.} \qquad B\,B\,B\,A\,B\,A\,\underline{B} \qquad \frac{\binom{6}{4} \cdot 5! \cdot 7 \cdot 6}{\binom{12}{7} \cdot 7!} = \frac{\binom{6}{4}}{\binom{12}{7}} = 0{,}0189$$

6. Ein von einem Tierarzt durchzuführender, einfacher Schnelltest erkennt 95 % der B-Rinder als solche. Irrtümlicherweise stuft dieser Schnelltest von den gesunden Rindern 15 % als B-Rinder ein. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Durchseuchungsgrad von 4 % ein durch den Schnelltest für gesund erklärtes Rind auch wirklich gesund ist.
   $$P(\textit{Schnelltest-Einstufung: gesund} \;\;|\; \textit{Rind wirklich gesund}) = \frac{0{,}96 \cdot 0{,}85}{0{,}96 \cdot 0{,}85 + 0{,}04 \cdot 0{,}05} = 99{,}8\,\%$$