Natursteinplatten-Aufgabe   Bayern LK 1987 *(leicht abgeändert)*

Weiße Natursteinplatten werden in Paketen zu je 100 Platten geliefert. Die Pakete werden je nach der Wahrscheinlichkeit p für das Auftreten rötlich verfärbter Platten (kurz: rote Platten), die bei der Produktion zwangsläufig anfallen, in drei Güteklassen eingeteilt:
Güteklasse I: $p = 0{,}01$; Güteklasse II: $p = 0{,}05$; Güteklasse III: $p = 0{,}10$.

1. Auf einem Weg sollen 100 Platten in einer Reihe verlegt werden. Wie viele verschiedene Reihenfolgen sind möglich,
   a) wenn das gelieferte Paket genau zwei rote Platten enthält, und sich die Platten nur in der Farbe (weiß,rot) unterscheiden,
   b) wenn das gelieferte Paket genau 3 rote Platten enthält, und diese untereinander (etwa nach der Maserung) unterscheidbar sind, die weißen Platten aber nicht?

2. a) Zur Pflasterung des gleichen Wegs wie in l. wird ein Paket der Güteklasse I bestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine roten Platten dabei sind?
   b) Bis zu 12 rote Platten werden beim Pflastern des Weges in Kauf genommen. Kann man dann ein Paket der Güteklasse II bestellen, wenn man die Wahrscheinlichkeit für mehr als 12 rote Platten unter 1 % halten will?

3. In einer Siedlung sollen 10 Wege mit je 100 Platten gepflastert werden. Der Plattenleger bestellt 10 Pakete der Güteklasse III. Mit welcher Wahrscheinlichkeit können die 1000 Platten so verlegt werden, dass alle 10 Wege mit jeweils weniger als 13 roten Platten belegt sind?

4. Eine Firma liefert Pakete der Güteklasse II und III, die auf Güterwaggons verladen werden. Jeder Waggon enthält lauter Pakete gleicher Güteklasse. Bei einer Lieferung, die doppelt so viele Waggons der Güteklasse III wie der Güteklasse II enthält, ist die Kennzeichnung der Güteklasse vom Regen abgewaschen worden. Durch eine Stichprobe von 50 Platten soll entschieden werden, in welche Güteklasse der jeweilige Waggon eingestuft wird.
   Ein falsch eingestufter Waggon der Güteklasse II verursacht einen Schaden von 1000 € (entgangene Einnahmen), ein falsch eingestufter Waggon der Güteklasse III verursacht einen Schaden von 2000 € (Reklamation, verärgerte Kunden).
   a) Ein Waggon werde genau dann in die Güteklasse II eingestuft, wenn weniger als 3 rote Platten in der Stichprobe sind, andernfalls in Güteklasse III. Berechnen Sie den mittleren Schaden pro Waggon, der bei diesem Vorgehen zu erwarten ist.
   b) Ermitteln Sie für diesen Test eine Entscheidungsregel, so dass der mittlere Schaden pro Waggon möglichst klein ist. Wie groß ist dann dieser Schaden?

Natursteinplatten-Aufgabe Bayern LK 1987 Lösungen

Weiße Natursteinplatten werden in Paketen zu je 100 Platten geliefert. Die Pakete werden je nach der Wahrscheinlichkeit p für das Auftreten rötlich verfärbter Platten (kurz: rote Platten), die bei der Produktion zwangsläufig anfallen, in drei Güteklassen eingeteilt:
Güteklasse I: $p = 0{,}01$; Güteklasse II: $p = 0{,}05$; Güteklasse III: $p = 0{,}10$.

1. Auf einem Weg sollen 100 Platten in einer Reihe verlegt werden. Wie viele verschiedene Reihenfolgen sind möglich,
   a) wenn das gelieferte Paket genau zwei rote Platten enthält, und sich die Platten nur in der Farbe (weiß,rot) unterscheiden,
   $\binom{100}{2} = 4950$
   b) wenn das gelieferte Paket genau 3 rote Platten enthält, und diese untereinander (etwa nach der Maserung) unterscheidbar sind, die weißen Platten aber nicht?
   $\binom{100}{3} \cdot 3! = 970200$

2. a) Zur Pflasterung des gleichen Wegs wie in l. wird ein Paket der Güteklasse I bestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine roten Platten dabei sind?
   $P_{0{,}01}^{100}(X = 0) = 36{,}6\,\%$
   b) Bis zu 12 rote Platten werden beim Pflastern des Weges in Kauf genommen. Kann man dann ein Paket der Güteklasse II bestellen, wenn man die Wahrscheinlichkeit für mehr als 12 rote Platten unter 1% halten will?
   $P_{0{,}05}^{100}(Y > 12) = 0{,}001$

3. In einer Siedlung sollen 10 Wege mit je 100 Platten gepflastert werden. Der Plattenleger bestellt 10 Pakete der Güteklasse III. Mit welcher Wahrscheinlichkeit können die 1000 Platten so verlegt werden, dass alle 10 Wege mit jeweils weniger als 13 roten Platten belegt sind?
   Binomialverteilung: $P_{0{,}1}^{1000}(Z \leq 120) = 98{,}3\,\%$
   $$\mu = 100,\ \sigma^2 = 90,\quad P(Z \leq 120) \approx \Phi\Big(\frac{120 + 0{,}5 - \mu}{\sigma}\Big) = 98{,}5\,\%$$
   Gegebenenfalls müssen Platten ausgetauscht werden.
   Wäre das Austauschen unzulässig, dürften sich in jedem Paket höchstens 12 rote Platten befinden.
   $$\big(P_{0{,}1}^{100}(Z \leq 12)\big)^{10} = 11{,}0\,\%$$

4. Eine Firma liefert Pakete der Güteklasse II und III, die auf Güterwaggons verladen werden. Jeder Waggon enthält lauter Pakete gleicher Güteklasse. Bei einer Lieferung, die doppelt so viele Waggons der Güteklasse III wie der Güteklasse II enthält, ist die Kennzeichnung der Güteklasse vom Regen abgewaschen worden. Durch eine Stichprobe von 50 Platten soll entschieden werden, in welche Güteklasse der jeweilige Waggon eingestuft wird.
   Ein falsch eingestufter Waggon der Güteklasse II verursacht einen Schaden von 1000 € (entgangene Einnahmen), ein falsch eingestufter Waggon der Güteklasse III verursacht einen Schaden von 2000 € (Reklamation, verärgerte Kunden).
   a) Ein Waggon werde genau dann in die Güteklasse II eingestuft, wenn weniger als 3 rote Platten in der Stichprobe sind, andernfalls in Güteklasse III. Berechnen Sie den mittleren Schaden pro Waggon, der bei diesem Vorgehen zu erwarten ist.
   $$\frac{2}{3} \cdot P_{0{,}1}^{50}(Z \leq 2) \cdot 2000 + \frac{1}{3} \cdot P_{0{,}05}^{50}(Y > 2) \cdot 1000 = 302{,}13\ (€)$$
   b) Ermitteln Sie für diesen Test eine Entscheidungsregel, so dass der mittlere Schaden pro Waggon möglichst klein ist. Wie groß ist dann dieser Schaden?
   $$E_k = \frac{2}{3} \cdot P_{0{,}1}^{50}(Z \leq k) \cdot 2000 + \frac{1}{3} \cdot P_{0{,}05}^{50}(Y > k) \cdot 1000$$
   $E_0 = 314{,}56$
   Minimum für $k = 1$ $E_1 = 285{,}24$
   $E_2 = 302{,}13$
   $E_3 = 413{,}59$

Verkehrsampel-Aufgabe Bayern LK 1987

1. Auf dem Weg zur Arbeitsstätte hat ein Autofahrer 2 Verkehrsampeln und dann einen Bahnübergang zu passieren. Unabhängig voneinander hat er an den Ampeln mit je 30 %, am Bahnübergang mit 90 % Wahrscheinlichkeit freie Fahrt. An jeder Ampel muss er mit 40 % Wahrscheinlichkeit nur l Minute, mit 30 % Wahrscheinlichkeit 2 Minuten warten; am Bahnübergang hat er mit 10 % Wahrscheinlichkeit eine Wartezeit von 3 Minuten.

   a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsgrößen X_i := Wartezeit an der Ampel i ($i = 1, 2$) und Y := Wartezeit am Bahnübergang, und berechnen Sie damit Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße Z := Gesamtwartezeit.

   b) Mit welcher (bedingten) Wahrscheinlichkeit ist die Wartezeit an Ampeln und Bahnübergang zusammen mindestens 5 Minuten, wenn der Autofahrer an der ersten Ampel 2 Minuten warten muss?

2. Auf dem Weg von der Wohnung zu seiner Arbeitsstätte hat ein anderer Autofahrer insgesamt 15 Ampeln zu passieren, die unabhängig voneinander geschaltet sind. Erfahrungsgemäß kann er jede Ampel mit 30 % Wahrscheinlichkeit ohne Wartezeit passieren. Ansonsten muss er mit einer mittleren Wartezeit von l Minute pro Ampel rechnen.

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt frühestens die 6. Ampel Rot?

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht er auf einer Fahrt mehr als die Hälfte der Ampeln bei Grün und kann diese also ohne Verzögerung passieren?

   c) Im Jahr fährt er 230 mal von der Wohnung zur Arbeitsstätte. Bestimmen Sie mit Hilfe der Tschebyschow-Ungleichung ein möglichst kleines Intervall symmetrisch zum Erwartungswert, in dem die gesamte Wartezeit G vor den Ampeln pro Jahr bei seinen Fahrten zur Arbeitsstätte mit mindestens 90 % Sicherheit liegt.

3. Eine umfangreiche Auswertung der Fahrzeiten von der Wohnung zur Arbeitsstätte hat ergeben, dass die Zufallsgröße T := Fahrzeit normalverteilt ist mit Erwartungswert 30 Minuten und Standardabweichung 4,75 Minuten.

   a) Als "normal" soll eine Fahrt gelten, wenn die Fahrzeit um höchstens 6 Minuten vom Erwartungswert abweicht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dann eine beliebig herausgegriffene Fahrt "normal"? Mit wie vielen "normalen" Fahrten kann man bei 230 Fahrten pro Jahr rechnen?

   b) Welche Fahrzeit t_0 muss der Autofahrer ansetzen, damit die Wahrscheinlichkeit für eine Fahrzeit, die länger als t_0 ist, nur $\frac{1}{230}$ beträgt, d. h., dass er im Mittel pro Jahr einmal zu spät zur Arbeit kommt?

4. Ein Autofahrer behauptet, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der er zu spät zur Arbeit kommt, höchstens 1 % beträgt. Kann er mit einem Signifikanzniveau von 5 % seine Behauptung noch aufrecht erhalten, wenn er bei den letzten 150 Fahrten 4 mal zu spät gekommen ist? Formulieren Sie mit Hilfe der Poisson-Näherung eine Entscheidungsregel und wenden Sie diese an!

Verkehrsampel-Aufgabe Bayern LK 1987 Lösungen

1. Auf dem Weg zur Arbeitsstätte hat ein Autofahrer 2 Verkehrsampeln und dann einen Bahnübergang zu passieren. Unabhängig voneinander hat er an den Ampeln mit je 30 %, am Bahnübergang mit 90 % Wahrscheinlichkeit freie Fahrt. An jeder Ampel muss er mit 40 % Wahrscheinlichkeit nur 1 Minute, mit 30 % Wahrscheinlichkeit 2 Minuten warten; am Bahnübergang hat er mit 10 % Wahrscheinlichkeit eine Wartezeit von 3 Minuten.

   a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsgrößen $X_i :=$ Wartezeit an der Ampel i ($i = 1, 2$) und $Y :=$ Wartezeit am Bahnübergang, und berechnen Sie damit Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße $Z :=$ Gesamtwartezeit.

k	0	1	2
$P(X_i = k)$	0,3	0,4	0,3

k	0	3
$P(Y = k)$	0,9	0,1

$$E(Z) = E(X_1) + E(X_2) + E(Y) = 2 \cdot 1 + 0{,}3 = 2{,}3$$
$$V(Z) = V(X_1) + V(X_2) + V(Y) = 2 \cdot 0{,}6 + 0{,}81 = 2{,}01$$
beachte: $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$

   b) Mit welcher (bedingten) Wahrscheinlichkeit ist die Wartezeit an Ampeln und Bahnübergang zusammen mindestens 5 Minuten, wenn der Autofahrer an der ersten Ampel 2 Minuten warten muss?

$$P(Z \geq 5 \mid X_1 = 2) = \frac{P(X_1 = 2 \ \textit{und} \ Z \geq 5)}{P(X_1 = 2)}$$

$Z \geq 5$ kann nur eintreten, wenn neben $X_1 = 2$ auch $Y = 3$ vorliegt, X_2 ist ohne Belang.

$$P(Z \geq 5 \mid X_1 = 2) = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}1}{0{,}3} = 0{,}1$$

2. Auf dem Weg von der Wohnung zu seiner Arbeitsstätte hat ein anderer Autofahrer insgesamt 15 Ampeln zu passieren, die unabhängig voneinander geschaltet sind. Erfahrungsgemäß kann er jede Ampel mit 30 % Wahrscheinlichkeit ohne Wartezeit passieren. Ansonsten muss er mit einer mittleren Wartezeit von 1 Minute pro Ampel rechnen.

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt frühestens die 6. Ampel Rot?

Die ersten 5 Ampeln zeigen Grün. $0{,}3^5 = 0{,}24\,\%$

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht er auf einer Fahrt mehr als die Hälfte der Ampeln bei Grün und kann diese also ohne Verzögerung passieren? $P_{0,3}^{15}(Y \geq 8) = 5{,}0\,\%$

   c) Im Jahr fährt er 230 mal von der Wohnung zur Arbeitsstätte. Bestimmen Sie mit Hilfe der Tschebyschow-Ungleichung ein möglichst kleines Intervall symmetrisch zum Erwartungswert, in dem die gesamte Wartezeit G vor den Ampeln pro Jahr bei seinen Fahrten zur Arbeitsstätte mit mindestens 90 % Sicherheit liegt.

Bernoullikette der Länge: $n = 230 \cdot 15 = 3450$, $p = 0{,}7$

$$E(G) = n \cdot p = 2415, \quad V(G) = n \cdot p \cdot q = 724{,}5$$
$$P(\,|\,G - E(G)\,| < \alpha) \ \geq \ 1 - \frac{V(G)}{\alpha^2} \ \geq \ 0{,}9 \implies \alpha \geq 85{,}1$$
$$2415 - 85{,}1 < G < 2415 + 85{,}1$$
$$2329{,}9 < G < 2500{,}1 \quad \text{(in Minuten)}$$

3. Eine umfangreiche Auswertung der Fahrzeiten von der Wohnung zur Arbeitsstätte hat ergeben, dass die Zufallsgröße $T :=$ Fahrzeit normalverteilt ist mit Erwartungswert 30 Minuten und Standardabweichung 4,75 Minuten.

   a) Als "normal" soll eine Fahrt gelten, wenn die Fahrzeit um höchstens 6 Minuten vom Erwartungswert abweicht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dann eine beliebig herausgegriffene Fahrt "normal"? Mit wie vielen "normalen" Fahrten kann man bei 230 Fahrten pro Jahr rechnen?

   $$P(\,|\,T-\mu\,| \leq 6) \approx 2\Phi(\frac{6}{\sigma}) - 1 = 79{,}3\,\%$$

   (Tabelle 79,2 %)

   Anzahl der "normalen" Fahrten: $n \cdot p = 230 \cdot 0{,}792 = 182$

   b) Welche Fahrzeit t_0 muss der Autofahrer ansetzen, damit die Wahrscheinlichkeit für eine Fahrzeit, die länger als t_0 ist, nur $\frac{1}{230}$ beträgt, d. h., dass er im Mittel pro Jahr einmal zu spät zur Arbeit kommt?

   $\mu = 30,\ \sigma = 4{,}75$

   $$P(\,T \geq t_0) \approx 1 - \Phi\Big(\frac{t_0-\mu}{\sigma}\Big) = \frac{1}{230} \quad\Longrightarrow\quad t_0 = 42{,}5$$

4. Ein Autofahrer behauptet, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der er zu spät zur Arbeit kommt, höchstens 1 % beträgt. Kann er mit einem Signifikanzniveau von 5 % seine Behauptung noch aufrecht erhalten, wenn er bei den letzten 150 Fahrten 4 mal zu spät gekommen ist? Formulieren Sie mit Hilfe der Poisson-Näherung eine Entscheidungsregel und wenden Sie diese an!

   $\mu = 150 \cdot 0{,}01 = 1{,}5$

   $$P(X \geq k+1) \leq 0{,}05 \quad\Longleftrightarrow\quad P(X \leq k) \geq 0{,}95$$

   Ablehnungsbereich für die Nullhypothese $H_0\colon p = 0{,}01\colon\ \overline{A} = \{5, \ldots, 150\}$

   Die Behauptung des Autofahrers kann nicht wiederlegt werden.

   Die Verwendung der Binomialverteilung oder die Approximation durch die Normalverteilung würde dasselbe Ergebnis erbringen.

Golfball-Aufgabe   Bayern LK 1992

Ein Golfball eines bestimmten Herstellers wird von den Spielern mit einer Wahrscheinlichkeit von 8 % als unbrauchbar eingestuft.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Schachtel mit 12 Golfbällen mindestens 10 brauchbare Bälle sind?

2. In einer Schachtel mit 12 Golfbällen befinden sich 3 unbrauchbare. Ein Spieler greift zufällig 4 Bälle aus dieser Schachtel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er dabei höchstens einen unbrauchbaren Ball entnimmt?

3. Vor einem Golfturnier werden die vom Hersteller gelieferten Bälle kontrolliert. Dabei werden 4 % der brauchbaren und 97 % der unbrauchbaren Bälle ausgesondert.

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei dieser Kontrolle ein Ball richtig beurteilt?

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein ausgesonderter Ball unbrauchbar?

4. Ein Abnehmer von Golfbällen vermutet, dass der Anteil unbrauchbarer Bälle über 8 % gestiegen ist. Um diese Vermutung zu testen, untersucht er 500 Bälle. Ab welcher möglichst klein gewählten Anzahl unbrauchbarer Bälle kann er seine Vermutung annehmen, wenn er dabei eine Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 % in Kauf nehmen will?

5. Bei der Produktion von Golfbällen schwankt der Balldurchmesser um den Erwartungswert 43,00 mm. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Durchmesser eines beliebig herausgegriffenen Balls weniger als 2,00 mm vom Erwartungswert abweicht, soll mindestens 90 % betragen. Schätzen Sie mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyschow ab, wie groß die Standardabweichung hierfür höchstens sein darf.

6. Erfahrungsgemäß werden im Mittel 5 % der vom Hersteller ausgelieferten Bälle aufgrund von Mängeln zurückgegeben. Für jeden zurückgegebenen Ball entsteht dem Hersteller ein Verlust von 0,80 €, für jeden nicht zurückgegebenen ein Gewinn von 1,20 €. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt der Hersteller bei einer Lieferung von 200 Bällen einen Gesamtgewinn von mindestens 210 €?

Golfball-Aufgabe Bayern LK 1992 Lösungen

Ein Golfball eines bestimmten Herstellers wird von den Spielern mit einer Wahrscheinlichkeit von 8 % als unbrauchbar eingestuft.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Schachtel mit 12 Golfbällen mindestens 10 brauchbare Bälle sind?

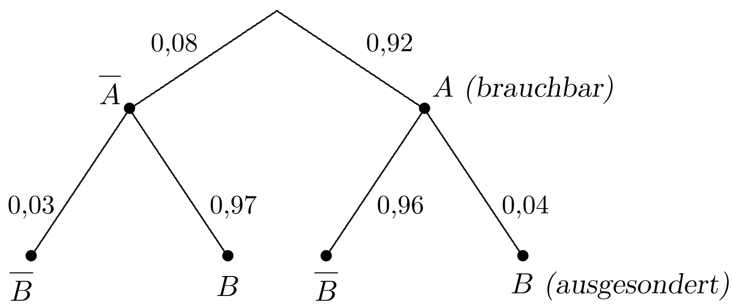
$$P_{0{,}92}^{12}(X \geq 10) = 93{,}5\,\%$$

2. In einer Schachtel mit 12 Golfbällen befinden sich 3 unbrauchbare. Ein Spieler greift zufällig 4 Bälle aus dieser Schachtel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er dabei höchstens einen unbrauchbaren Ball entnimmt?

$$\frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{9}{4} + \binom{3}{1} \cdot \binom{9}{3}}{\binom{12}{4}} = 76{,}4\,\%$$

3. Vor einem Golfturnier werden die vom Hersteller gelieferten Bälle kontrolliert. Dabei werden 4 % der brauchbaren und 97 % der unbrauchbaren Bälle ausgesondert.

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei dieser Kontrolle ein Ball richtig beurteilt?



$$0{,}08 \cdot 0{,}97 + 0{,}92 \cdot 0{,}96 = 96{,}1\,\%$$

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein ausgesonderter Ball unbrauchbar?

$$P(\textit{unbrauchbar} \mid \textit{ausgesondert}) = \frac{0{,}08 \cdot 0{,}97}{0{,}08 \cdot 0{,}97 + 0{,}92 \cdot 0{,}04} = 67{,}8\,\%$$

4. Ein Abnehmer von Golfbällen vermutet, dass der Anteil unbrauchbarer Bälle über 8 % gestiegen ist. Um diese Vermutung zu testen, untersucht er 500 Bälle. Ab welcher möglichst klein gewählten Anzahl unbrauchbarer Bälle kann er seine Vermutung annehmen, wenn er dabei eine Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 % in Kauf nehmen will?

$$P_{0{,}08}^{500}(Z \geq k) \leq 0{,}05 \quad \Longrightarrow \quad k \geq 51$$

$$P(\,Z \geq k) \approx 1 - \Phi\Big(\frac{k-1+0{,}5-40}{\sqrt{500 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92}}\Big) \leq 0{,}05 \quad \Longrightarrow \quad k \geq 51$$

5. Bei der Produktion von Golfbällen schwankt der Balldurchmesser um den Erwartungswert 43,00 mm. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Durchmesser eines beliebig herausgegriffenen Balls weniger als 2,00 mm vom Erwartungswert abweicht, soll mindestens 90 % betragen. Schätzen Sie mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyschow ab, wie groß die Standardabweichung hierfür höchstens sein darf.

$$P(\,|\,X-\mu\,| < \alpha) \geq 1 - \frac{V(X)}{\alpha^2} \geq 0{,}9,\ \alpha = 2,\ V(X) = \sigma^2 \Longrightarrow \sigma \leq 0{,}6$$

6. Erfahrungsgemäß werden im Mittel 5 % der vom Hersteller ausgelieferten Bälle aufgrund von Mängeln zurückgegeben. Für jeden zurückgegebenen Ball entsteht dem Hersteller ein Verlust von 0,80 €, für jeden nicht zurückgegebenen ein Gewinn von 1,20 €. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt der Hersteller bei einer Lieferung von 200 Bällen einen Gesamtgewinn von mindestens 210 €?

$$x \cdot 1{,}20 - (200 - x) \cdot 0{,}80 \geq 210 \quad \Longrightarrow \quad x \geq 185$$

$$P_{0{,}95}^{200}(Y \geq 185) = 95{,}6\,\%$$