

Theater-Aufgabe Abiturprüfung Bayern LK 1993 (abgeändert)

8. Ein Theater hat 200 Plätze. Man weiß aus Erfahrung, dass bei einer Aufführung ein Platz mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% verkauft wird.
- a) Vereinfachend kann angenommen werden, dass die Ereignisse unabhängig sind.
- 1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden für die nächste Aufführung mindestens 185 Plätze verkauft?
 - 2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man bei den drei folgenden Vorstellungen mindestens noch einmal mit diesem guten Besuch von wenigstens 185 Personen rechnen?
- b) Zehn befreundete Ehepaare setzen sich in eine Reihe, die 20 Plätze umfasst. Wie viele Sitzordnungen gibt es, wenn
- 1) sich die Personen beliebig setzen,
 - 2) die Ehepartner nebeneinander sitzen,
 - 3) die Frauen nebeneinander sitzen?
- c) Im Programmheft sind im Mittel zwei Druckfehler auf drei Seiten. Berechnen Sie mit der Poisson-Verteilung die Wahrscheinlichkeit, dass auf der dritten Seite mindestens zwei Druckfehler sind.
- d) Erfahrungsgemäß kaufen 40% der Besucher ein Programmheft.
- 1) Die Direktion legt für die 200 Besucher einer ausverkauften Vorstellung 90 Hefte bereit. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt mindestens ein Programmheft übrig?
 - 2) Wie viele Hefte müssen wenigstens bereitliegen, damit man mit mindestens 95% Wahrscheinlichkeit die zu erwartende Nachfrage nach einem Programmheft bei 200 Besuchern befriedigen kann?
- e) Eine Vorstellung wird von Erwachsenen und Jugendlichen besucht. 60% der Erwachsenen und 20% der Jugendlichen kaufen ein Programmheft.
- 1) Wie groß ist der Anteil der Jugendlichen unter den Besuchern, wenn 40% der Besucher ein Programmheft kaufen?
 - 2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der nächste Käufer eines Programmhefts ein Jugendlicher ist?
- f) Die Theaterleitung will das Kaufinteresse für ihr Programmheft überprüfen. Dazu soll das Verhalten der nächsten 800 Erwachsenen beobachtet werden.
- 1) Geben Sie die Entscheidungsregel der Theaterleitung für ihre Nullhypothese H_0 : "Mindestens 60% der Erwachsenen kaufen ein Programmheft" auf dem 5%-Signifikanzniveau an.
 - 2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dann ein Absinken der Kaufbereitschaft auf 55% nicht erkannt?

Theater-Aufgabe Lösungen

8. Ein Theater hat 200 Plätze. Man weiß aus Erfahrung, dass bei einer Aufführung ein Platz mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% verkauft wird.
- a) Vereinfachend kann angenommen werden, dass die Ereignisse unabhängig sind.
- 1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden für die nächste Aufführung mindestens 185 Plätze verkauft? $P(X \geq 185) = 14,3\%$
 - 2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man bei den drei folgenden Vorstellungen mindestens noch einmal mit diesem guten Besuch von wenigstens 185 Personen rechnen? $1 - (1 - P(X \geq 185))^3 = 37,1\%$
- b) Zehn befreundete Ehepaare setzen sich in eine Reihe, die 20 Plätze umfasst. Wie viele Sitzordnungen gibt es, wenn
- 1) sich die Personen beliebig setzen, 20!
 - 2) die Ehepartner nebeneinander sitzen, $10! \cdot 2^{10}$
 - 3) die Frauen nebeneinander sitzen? $11 \cdot 10! \cdot 10!$
- c) Im Programmheft sind im Mittel zwei Druckfehler auf drei Seiten. Berechnen Sie mit der Poisson-Verteilung die Wahrscheinlichkeit, dass auf der dritten Seite mindestens zwei Druckfehler sind. $\mu = \frac{2}{3}, P(X \geq 2) = 14,4\%$
- d) Erfahrungsgemäß kaufen 40% der Besucher ein Programmheft.
- 1) Die Direktion legt für die 200 Besucher einer ausverkauften Vorstellung 90 Hefte bereit. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt mindestens ein Programmheft übrig? $n = 200, p = 0,40, P(X \leq 89) = 91,4\%$
 - 2) Wie viele Hefte müssen wenigstens bereitliegen, damit man mit mindestens 95% Wahrscheinlichkeit die zu erwartende Nachfrage nach einem Programmheft bei 200 Besuchern befriedigen kann? $P(X \leq k) \geq 0,95 \implies \text{mindestens } k = 91$
- e) Eine Vorstellung wird von Erwachsenen und Jugendlichen besucht. 60% der Erwachsenen und 20% der Jugendlichen kaufen ein Programmheft.
- 1) Wie groß ist der Anteil der Jugendlichen unter den Besuchern, wenn 40% der Besucher ein Programmheft kaufen? (Baumdiagramm) $(1 - p) \cdot 0,6 + p \cdot 0,2 = 0,4 \implies p = 0,5$
 - 2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der nächste Käufer eines Programmhefts ein Jugendlicher ist? $\frac{0,5 \cdot 0,2}{0,4} = 25\%$
- f) Die Theaterleitung will das Kaufinteresse für ihr Programmheft überprüfen. Dazu soll das Verhalten der nächsten 800 Erwachsenen beobachtet werden.
- 1) Geben Sie die Entscheidungsregel der Theaterleitung für ihre Nullhypothese H_0 : "Mindestens 60% der Erwachsenen kaufen ein Programmheft" auf dem 5%-Signifikanzniveau an. $n = 800, p = 0,60, P(X \leq k) \leq 0,05$
 H_0 wird für $X \leq 456$ abgelehnt.
 - 2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dann ein Absinken der Kaufbereitschaft auf 55% nicht erkannt? Binomialverteilung $n = 800, p = 0,55, P(X \geq 457) = 12,0\%$
Die Normalverteilung ergibt 12,1%

City-Zug-Aufgabe Abiturprüfung Bayern LK 1993 (*abgeändert*)

9. a) Ein "City-Zug" besteht aus 10 Waggons: 4 Wagen der Touristenklasse (T), 3 Wagen der ersten Klasse (E), 2 Großraumwagen (G) sowie 1 Speisewagen (S). Wie viele Möglichkeiten gibt es, den Zug zusammenzustellen, wenn nur nach den Kategorien T, E, G und S unterschieden wird und
- 1) sonst keine Vorgaben zu beachten sind,
 - 2) die Großraumwaggons am Anfang und am Ende des Zuges stehen und der Speisewagen 5. oder 6. Wagen sein soll?
- b) Die meisten Reisenden lassen sich einen Platz reservieren. Dabei kommt es in 0,5% der Reservierungen zu Problemen. Verwenden Sie bei den folgenden beiden Teilaufgaben die Näherung durch die Poisson-Verteilung.
- 1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt es bei 600 Reservierungen zu mehr als 4 Problemfällen?
 - 2) Ab wie vielen Reservierungen ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein Problemfall auftritt, größer als 90%?
- c) Durch eine Umfrage soll der Anteil der Kunden ermittelt werden, die mit dem Reservierungssystem unzufrieden sind. Bestimmen Sie mit der Tschebyschew-Ungleichung die Mindestzahl von Personen, die befragt werden müssen, damit man mit einer Sicherheit von mindestens 95% den gesuchten Anteil mit einer Abweichung von höchstens 5 Prozentpunkten erhalten kann.
- d) Auf Grund langjähriger Beobachtungen weiß man, dass 1% der Bahnkunden ohne gültigen Fahrausweis fährt. Ein Kontrolleur erkennt einen Schwarzfahrer mit 95% und einen Kunden, der eine gültige Fahrkarte hat, mit 98% Sicherheit.
- 1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Kunde, der falsch eingeschätzt wird, ein Schwarzfahrer?
 - 2) Mit p wird der Anteil der Reisenden mit gültigem Fahrausweis, die als solche erkannt werden, bezeichnet. Der Wert p hat sich so geändert, dass die Ereignisse $SF =$ "Der Kunde ist Schwarzfahrer" und $R =$ "Der Kunde wird richtig eingeschätzt" unabhängig sind. Bestimmen Sie den Wert von p .
 - 3) Ein Zug ist mit 200 Fahrgästen besetzt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens drei Personen mehr als erwartet ohne gültigen Fahrausweis fahren?
- e) Die Nullhypothese "Mindestens 70% aller Geschäftsreisen unter 400 km werden mit dem Zug zurückgelegt" soll durch eine Umfrage unter 600 Geschäftsleuten getestet werden.
- 1) Bestimmen Sie den Annahmehereich der Nullhypothese, damit die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art nicht über 5% liegt.
 - 2) Wie groß ist bei der Entscheidungsregel aus Teilaufgabe e) 1) die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art, wenn der fragliche Anteil nur 65% beträgt?
 - 3) Skizzieren Sie die Gütefunktion für diesen Test.

City-Zug-Aufgabe Lösungen

9. a) Ein "City-Zug" besteht aus 10 Waggons: 4 Wagen der Touristenklasse (T), 3 Wagen der ersten Klasse (E), 2 Großraumwagen (G) sowie 1 Speisewagen (S). Wie viele Möglichkeiten gibt es, den Zug zusammenzustellen, wenn nur nach den Kategorien T, E, G und S unterschieden wird und

1) sonst keine Vorgaben zu beachten sind, $\binom{10}{4} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} = 12600 \quad (= \frac{10!}{6! \cdot 3! \cdot 2!})$

2) die Großraumwaggons am Anfang und am Ende des Zuges stehen und der Speisewagen 5. oder 6. Wagen sein soll? $\binom{7}{4} \cdot 2 = 70$

- b) Die meisten Reisenden lassen sich einen Platz reservieren. Dabei kommt es in 0,5% der Reservierungen zu Problemen. Verwenden Sie bei den folgenden beiden Teilaufgaben die Näherung durch die Poisson-Verteilung.

1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt es bei 600 Reservierungen zu mehr als 4 Problemfällen? $\mu = 3, \quad P(X > 4) = 18,5\%$

- 2) Ab wie vielen Reservierungen ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein Problemfall auftritt, größer als 90%?

$$\mu = n \cdot 0,005, \quad 1 - P(X = 0) > 0,9, \quad e^{-n \cdot 0,005} < 0,1, \quad \text{mehr als 460}$$

- c) Durch eine Umfrage soll der Anteil der Kunden ermittelt werden, die mit dem Reservierungssystem unzufrieden sind. Bestimmen Sie mit der Tschebyschew-Ungleichung die Mindestzahl von Personen, die befragt werden müssen, damit man mit einer Sicherheit von mindestens 95% den gesuchten Anteil mit einer Abweichung von höchstens 5 Prozentpunkten erhalten kann.

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq 0,05\right) \geq 1 - \frac{1}{4 \cdot 0,05^2 \cdot n} \geq 0,95$$

(oder direkt) $\frac{1}{4 \cdot 0,05^2 \cdot n} \leq 0,05 \implies n \geq 2000, \quad \text{mindestens 2000 Personen}$

- d) Auf Grund langjähriger Beobachtungen weiß man, dass 1% der Bahnkunden ohne gültigen Fahrausweis fährt. Ein Kontrolleur erkennt einen Schwarzfahrer mit 95% und einen Kunden, der eine gültige Fahrkarte hat, mit 98% Sicherheit.

1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Kunde, der falsch eingeschätzt wird, ein Schwarzfahrer? $\frac{0,01 \cdot 0,05}{0,01 \cdot 0,05 + 0,99 \cdot 0,02} = 2,5\%$

- 2) Mit p wird der Anteil der Reisenden mit gültigem Fahrausweis, die als solche erkannt werden, bezeichnet. Der Wert p hat sich so geändert, dass die Ereignisse $SF =$ "Der Kunde ist Schwarzfahrer" und $R =$ "Der Kunde wird richtig eingeschätzt" unabhängig sind.

Bestimmen Sie den Wert von p . dem Ereignisbaum direkt entnehmen: $p = 0,95$

- 3) Ein Zug ist mit 200 Fahrgästen besetzt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens drei Personen mehr als erwartet ohne gültigen Fahrausweis fahren? $P(X \geq 5) = 5,2\%$

- e) Die Nullhypothese "Mindestens 70% aller Geschäftsreisen unter 400 km werden mit dem Zug zurückgelegt" soll durch eine Umfrage unter 600 Geschäftsleuten getestet werden.

- 1) Bestimmen Sie den Annahmehereich der Nullhypothese, damit die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art nicht über 5% liegt. $n = 600, \quad p = 0,70, \quad P(X \leq k) \leq 0,05$

H_0 wird für $X \leq 400$ abgelehnt. Die Normalverteilung ergibt $X \leq 401$

- 2) Wie groß ist bei der Entscheidungsregel aus Teilaufgabe e) 1) die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art, wenn der fragliche Anteil nur 65% beträgt? $P(X \geq 401) = 18,5\%$

Die Normalverteilung ergibt $P(X \geq 402) = 16,4\%$