

## Industriemesse-Aufgabe aus Abiturprüfung Bayern LK (abgeändert)

3. a) Auf einer Industriemesse kommen die ersten 10 (unterscheidbaren) Besucher kurz nacheinander an und verteilen sich auf drei Kassen. Wie viele solche Aufteilungen gibt es, wenn
- 1) sich jeder unabhängig von den anderen eine Kasse aussucht,
  - 2) sich jeder an einer Kasse anstellt, an der möglichst wenig Personen vor ihm sind, und die Auswahl sonst beliebig erfolgt?
- b) Ein Kassierer benötigt als Abfertigungszeit für einen Besucher, der das Eintrittsgeld passend hat, 15 Sekunden, sonst 25 Sekunden. Erfahrungsgemäß haben 40% der Messebesucher ihr Eintrittsgeld passend. Der Besucher  $B$  stellt sich an einer Kasse an, vor der schon 8 Personen anstehen.
- 1) Welche Abfertigungszeit erwartet man für diese acht Personen?
  - 2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $B$  nach spätestens 3 Minuten abgefertigt ist, wenn er sein Geld abgezahlt bereithält?
- c) Durch eine Umfrage soll der Anteil  $p$  der Fachbesucher unter allen Messebesuchern bestimmt werden. Wie viele Personen müssen mindestens befragt werden, damit man den Anteil  $p$  mit mindestens 80% Sicherheit bis auf eine Abweichung von weniger als 0,02 ermitteln kann? Verwenden Sie die Ungleichung von Tschebyschew.
- d) 42% der Messebesucher sind Fachbesucher.
- 1) 20% der weiblichen und 55% der männlichen Messebesucher sind Fachbesucher.
    - $\alpha$ ) Wie hoch ist der Anteil der männlichen Besucher bei dieser Messe?
    - $\beta$ ) Ein zufällig ausgewählter Messebesucher ist ein Fachbesucher. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er männlich?
  - 2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind unter 50 befragten Messebesuchern genau 42% Fachbesucher?
- e) Für Aussteller ist die Messe auch deshalb interessant, weil durch Beratungsgespräche Verkaufsabschlüsse herbeigeführt werden können. In der Branche kalkuliert man, dass höchstens 15% der Beratungsgespräche zu einem Verkaufsabschluss führen. Ein Aussteller vermutet, dass er durch seine überzeugende Art mehr neue Kunden gewinnt. Von 280 Beratungsgesprächen erreicht er bei 55 einen Verkaufsabschluss. Kann er auf Grund dieses Ergebnisses die Nullhypothese "Höchstens 15% meiner Gespräche führen zu einem Verkaufsabschluss" auf dem 5%-Niveau verwerfen? Geben Sie hierzu die Entscheidungsregel an.

## Industriemesse-Aufgabe Lösungen

3. a) Auf einer Industriemesse kommen die ersten 10 (unterscheidbaren) Besucher kurz nacheinander an und verteilen sich auf drei Kassen. Wie viele solche Aufteilungen gibt es, wenn

- 1) sich jeder unabhängig von den anderen eine Kasse aussucht,  $3^{10}$   
 2) sich jeder an einer Kasse anstellt, an der möglichst wenig Personen vor ihm sind, und die Auswahl sonst beliebig erfolgt? Der Erste hat 3 Möglichkeiten, der Zweite 2, ...  
 $(3 \cdot 2 \cdot 1)^3 \cdot 3 = 648$

- b) Ein Kassierer benötigt als Abfertigungszeit für einen Besucher, der das Eintrittsgeld passend hat, 15 Sekunden, sonst 25 Sekunden. Erfahrungsgemäß haben 40% der Messebesucher ihr Eintrittsgeld passend. Der Besucher  $B$  stellt sich an einer Kasse an, vor der schon 8 Personen anstehen.

- 1) Welche Abfertigungszeit erwartet man für diese acht Personen?  $0,4 \cdot 15 + 0,6 \cdot 25 = 21$  (sec)  
für 8 Besucher 168 sec  
 2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $B$  nach spätestens 3 Minuten abgefertigt ist, wenn er sein Geld abgezählt bereithält?

8 Personen müssen dazu in  $180 - 15 = 165$  (sec) abgefertigt sein,  
 d.h. höchstens 4 dürfen kein abgezähltes Geld haben,  $4 \cdot 15 + 4 \cdot 25 = 160$  (sec).  
 Bernoullikette  $n = 8, p = 0,6, P(X \leq 4) = 40,6\%$

- c) Durch eine Umfrage soll der Anteil  $p$  der Fachbesucher unter allen Messebesuchern bestimmt werden. Wie viele Personen müssen mindestens befragt werden, damit man den Anteil  $p$  mit mindestens 80% Sicherheit bis auf eine Abweichung von weniger als 0,02 ermitteln kann? Verwenden Sie die Ungleichung von Tschebyschew.

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < 0,02\right) \geq 1 - \frac{1}{4 \cdot 0,02^2 \cdot n} \geq 0,8$$

(oder direkt)  $\frac{1}{4 \cdot 0,02^2 \cdot n} \leq 0,2 \implies n \geq 3125$ , mindestens 3125 Personen

- d) 42% der Messebesucher sind Fachbesucher.

- 1) 20% der weiblichen und 55% der männlichen Messebesucher sind Fachbesucher.  
 α) Wie hoch ist der Anteil ( $m$ ) der männlichen Besucher bei dieser Messe?  
 $0,55 \cdot m + 0,2 \cdot (1 - m) = 0,42 \implies m = 62,9\%$   
 β) Ein zufällig ausgewählter Messebesucher ist ein Fachbesucher.  
 Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er männlich? 82,4% (bedingte Wahrscheinlichkeit)

- 2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind unter 50 befragten Messebesuchern genau 42% Fachbesucher?  
42% sind 21 Fachbesucher  
 $P(X = 21) = 11,4\%$

- e) Für Aussteller ist die Messe auch deshalb interessant, weil durch Beratungsgespräche Verkaufsabschlüsse herbeigeführt werden können. In der Branche kalkuliert man, dass höchstens 15% der Beratungsgespräche zu einem Verkaufsabschluss führen. Ein Aussteller vermutet, dass er durch seine überzeugende Art mehr neue Kunden gewinnt. Von 280 Beratungsgesprächen erreicht er bei 55 einen Verkaufsabschluss. Kann er auf Grund dieses Ergebnisses die Nullhypothese "Höchstens 15% meiner Gespräche führen zu einem Verkaufsabschluss" auf dem 5%-Niveau verwerfen? Geben Sie hierzu die Entscheidungsregel an.

$$P(X > k) \leq 5\% \implies k = 52$$

Für  $X \geq 53$  kann die Nullhypothese verworfen werden.

## Parkplatz-Aufgabe aus Abiturprüfung Bayern LK (abgeändert)

4. a) 1) Auf dem Parkplatz  $A$  einer Autowerkstätte sollen die für den nächsten Tag angemeldeten 13 Fahrzeuge in zwei Reihen untergebracht werden. Die erste Reihe enthält sechs, die zweite sieben Stellplätze. Vier Autos mit normalem Kundendienst sollen in die erste Reihe zwei Autos zur Ausrüstung mit Alarmanlagen in die zweite Reihe, mit den übrigen werden die restlichen Plätze in den beiden Reihen aufgefüllt. Wie viele Möglichkeiten gibt es, unter diesen Vorgaben die Autos zu verteilen?
- 2) Der Parkplatz  $B$  ist für Betriebsangehörige reserviert. Die 20 Plätze in einer Reihe sind von 1 bis 20 nummeriert. Auf einem der Plätze, der kein Randplatz ist, steht der Wagen des Chefs. In der Mittagspause verlassen sieben Angestellte den vollbesetzten Parkplatz mit ihren Autos. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die beiden Plätze neben dem Wagen des Chefs nicht mehr besetzt?
- b) Eine Statistik über das letzte Jahr zeigt:  
Die in einem bestimmten Autotyp eingebauten Alarmanlagen lösten im Falle eines Einbruchs mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% Alarm aus. Bei 3% der Wagen, in die nicht eingebrochen wurde, stellte man einen Fehlalarm fest. Die Wahrscheinlichkeit für einen Einbruch in den betrachteten Wagentyp lag bei 1,5%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass tatsächlich ein Einbruch vorlag, falls Alarm ausgelöst wurde?
- c) Die Herstellerfirma liefert Alarmanlagen, welche im Mittel zu 3% defekt sind.
- 1) Die Prüfabteilung der Autowerkstätte entnimmt zur Kontrolle aus jeder Lieferung  $n$  Geräte. Wie groß muss der Stichprobenumfang mindestens sein, damit in der Probe mit wenigstens 95% Wahrscheinlichkeit mindestens ein defektes Gerät vorkommt?  
(Modell: Ziehen mit Zurücklegen)
- 2) Die Herstellerfirma liefert an einen Großhändler 500 Geräte. In welchem kleinsten Intervall symmetrisch um den Erwartungswert liegt mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit die Anzahl der fehlerhaften Geräte?
- 3) Für einen dringenden Terminauftrag benötigt die Werkstatt 500 fehlerlose Alarmanlagen. Wie viele Geräte müssen wenigstens bestellt werden, damit der Auftrag termingerecht mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% mit fehlerlosen Anlagen ausgeführt werden kann?
- d) Für das Zentrallager der Autowerkstatt werden Anhängerkupplungen bestellt, von denen nach Angabe der Lieferfirma höchstens ein Fünftel Mängel aufweist. Die Prüfabteilung entscheidet sich für eine Rücksendung der Lieferung, falls bei einer Stichprobe von 20 Kupplungen mehr als acht Mängel zeigen. (Modell: Ziehen mit Zurücklegen)
- 1) Wie groß ist höchstens die Wahrscheinlichkeit, dass eine Lieferung, die der Angabe der Lieferfirma entspricht, fälschlicherweise zurückgeschickt wird?
- 2) Wie muss die Annahmeregeln geändert werden, wenn bei gleichem Stichprobenumfang das Risiko, eine Sendung mit einem Viertel mangelhafter Anhängerkupplungen anzunehmen, kleiner als 10% werden soll? Stellen Sie kurz die Folgen dieser neuen Annahmeregeln dar.

## Parkplatz-Aufgabe Lösungen

4. a) 1) Auf dem Parkplatz  $A$  einer Autowerkstätte sollen die für den nächsten Tag angemeldeten 13 Fahrzeuge in zwei Reihen untergebracht werden. Die erste Reihe enthält sechs, die zweite sieben Stellplätze. Vier Autos mit normalem Kundendienst sollen in die erste Reihe ( $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$  Möglichkeiten), zwei Autos zur Ausrüstung mit Alarmanlagen in die zweite Reihe ( $7 \cdot 6$  Möglichkeiten), mit den übrigen werden die restlichen Plätze in den beiden Reihen aufgefüllt ( $7!$  Möglichkeiten). Wie viele Möglichkeiten gibt es, unter diesen Vorgaben die Autos zu verteilen? 76204800 (Produkt)

- 2) Der Parkplatz  $B$  ist für Betriebsangehörige reserviert. Die 20 Plätze in einer Reihe sind von 1 bis 20 nummeriert. Auf einem der Plätze, der kein Randplatz ist, steht der Wagen des Chefs. In der Mittagspause verlassen sieben Angestellte den vollbesetzten Parkplatz mit ihren Autos. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die beiden Plätze neben dem Wagen des Chefs nicht mehr besetzt?

$$\frac{\binom{17}{5}}{\binom{19}{7}} = 12,3\%$$

- b) Eine Statistik über das letzte Jahr zeigt:

Die in einem bestimmten Autotyp eingebauten Alarmanlagen lösten im Falle eines Einbruchs mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% Alarm aus. Bei 3% der Wagen, in die nicht eingebrochen wurde, stellte man einen Fehlalarm fest. Die Wahrscheinlichkeit für einen Einbruch in den betrachteten Wagentyp lag bei 1,5%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass tatsächlich ein Einbruch vorlag, falls Alarm ausgelöst wurde? 32,5% (bedingte Wahrscheinlichkeit)

- c) Die Herstellerfirma liefert Alarmanlagen, welche im Mittel zu 3% defekt sind.

- 1) Die Prüfabteilung der Autowerkstätte entnimmt zur Kontrolle aus jeder Lieferung  $n$  Geräte. Wie groß muss der Stichprobenumfang mindestens sein, damit in der Probe mit wenigstens 95% Wahrscheinlichkeit mindestens ein defektes Gerät vorkommt?

(Modell: Ziehen mit Zurücklegen)  $1 - 0,97^n \geq 0,95 \implies$  mindestens  $n = 99$

- 2) Die Herstellerfirma liefert an einen Großhändler 500 Geräte. In welchem kleinsten Intervall symmetrisch um den Erwartungswert liegt mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit die Anzahl der fehlerhaften Geräte? [9, 21]

- 3) Für einen dringenden Terminauftrag benötigt die Werkstatt 500 fehlerlose Alarmanlagen. Wie viele Geräte müssen wenigstens bestellt werden, damit der Auftrag termingerecht mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% mit fehlerlosen Anlagen ausgeführt werden kann? mindestens 525 Ohne GTR ist eine quadratische Gleichung aufzustellen (Normalverteilung).

- d) Für das Zentrallager der Autowerkstatt werden Anhängerkupplungen bestellt, von denen nach Angabe der Lieferfirma höchstens ein Fünftel Mängel aufweist. Die Prüfabteilung entscheidet sich für eine Rücksendung der Lieferung, falls bei einer Stichprobe von 20 Kupplungen mehr als acht Mängel zeigen. (Modell: Ziehen mit Zurücklegen)

- 1) Wie groß ist höchstens die Wahrscheinlichkeit, dass eine Lieferung, die der Angabe der Lieferfirma entspricht, fälschlicherweise zurückgeschickt wird?

Bernoullikette  $n = 20$ ,  $p = 0,2$ ,  $P(X > 8) = 1,0\%$

- 2) Wie muss die Annahmeregeln geändert werden, wenn bei gleichem Stichprobenumfang das Risiko, eine Sendung mit einem Viertel mangelhafter Anhängerkupplungen anzunehmen, kleiner als 10% werden soll? Stellen Sie kurz die Folgen dieser neuen Annahmeregeln dar.

$P(X \leq k) < 0,1 \implies k = 2$ , Annahme nur für  $X \leq 2$   
Viele Sendungen werden irrtümlich zurückgewiesen.