Maschinen-Aufgabe aus Abiturprüfung Bayern LK 1977 *(abgeändert)*

1. a) Eine Maschine stellt Werkstücke mit einer Ausschussquote von 20 % her. Man entnimmt der Produktion eine Stichprobe von 10 Werkstücken.

   1) Wie viele Ausschussstücke sind zu erwarten?
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man genau zwei, mindestens zwei bzw. höchstens zwei Ausschussstücke?

   2) Die Ereignisse A und B sind wie folgt definiert:
   A = "In der Stichprobe sind genau zwei Ausschussstücke."
   B = "Die beiden ersten Stücke der Stichprobe sind Ausschussstücke."

   Was versteht man unter der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(A \mid B)$?
   Berechnen Sie den Wert von $P(A \mid B)$.

   b) Neben der Maschine aus Teilaufgabe a) arbeitet eine Maschine, die nur 10% Ausschuss erzeugt. Sie produziert in gleicher Zeit doppelt so viele Werkstücke wie die schlechtere Maschine.
   Es werden Packungen zu je 10 Werkstücken erzeugt. Man wählt auf gut Glück aus einer Tagesproduktion eine Packung aus. Sie enthält genau drei Ausschussstücke. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde ihr Inhalt von der besseren Maschine hergestellt?

   c) Die Werkstücke der besseren Maschine werden als 1. Qualität, die der schlechteren als 2. Qualität bezeichnet.
   Bei einer größeren Lieferung einheitlicher Qualität sind die Etiketten verloren gegangen. Durch einen Test mit einer Stichprobe von $n = 100$ soll entschieden werden, welche Qualität vorliegt. Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler, die 1. Qualität nicht zu erkennen, soll höchstens 5% betragen. Geben Sie eine Entscheidungsregel für diesen Test an, der außerdem die Wahrscheinlichkeit für den Fehler, die 2. Qualität nicht zu erkennen, möglichst klein hält.
   Wie groß sind die Fehlerwahrscheinlichkeiten dann?

   d) Zeichnen Sie die Gütefunktion des Tests und erläutern Sie an ihr die Auswirkungen auf die Fehler, falls sich die Ausschussanteile der Maschinen verändern.

   Die Gütefunktion ordnet jedem p die Wahrscheinlichkeit zu, mit der das Testergebnis, p vorausgesetzt, in den Ablehnungsbereich (kritischen Bereich) fällt.

Maschinen-Aufgabe Lösungen

1. a) Eine Maschine stellt Werkstücke mit einer Ausschussquote von 20 % her. Man entnimmt der Produktion eine Stichprobe von 10 Werkstücken.

   1) Wie viele Ausschussstücke sind zu erwarten?
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man genau zwei, mindestens zwei bzw. höchstens zwei Ausschussstücke?

   $E(X) = np = 2$
   $P(X = 2) = 30{,}2\,\%$
   $P(X \geq 2) = 62{,}4\,\%$
   $P(X \leq 2) = 67{,}8\,\%$

   2) Die Ereignisse A und B sind wie folgt definiert:
   A = "In der Stichprobe sind genau zwei Ausschussstücke."
   B = "Die beiden ersten Stücke der Stichprobe sind Ausschussstücke."

   Was versteht man unter der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(A\,|\,B)$?
   Berechnen Sie den Wert von $P(A\,|\,B)$.

   $P(B) = 0{,}2^2, \quad P(A \cap B) = 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^8$

   $P(A\,|\,B) = \frac{0{,}2^2 \cdot 0{,}8^8}{0{,}2^2}$ oder mit umgekehrtem Baumdiagramm: $P(A\,|\,B) = 0{,}8^8 = 16{,}8\,\%$

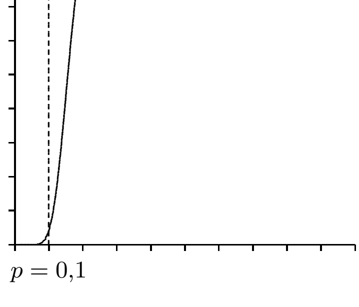
   b) Neben der Maschine aus Teilaufgabe a) arbeitet eine Maschine, die nur 10% Ausschuss erzeugt. Sie produziert in gleicher Zeit doppelt so viele Werkstücke wie die schlechtere Maschine.
   Es werden Packungen zu je 10 Werkstücken erzeugt. Man wählt auf gut Glück aus einer Tagesproduktion eine Packung aus. Sie enthält genau drei Ausschussstücke. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde ihr Inhalt von der besseren Maschine hergestellt?

   $$\frac{\frac{2}{3} \cdot \mathrm{B}(10;\, 0{,}1;\, 3)}{\frac{1}{3} \cdot \mathrm{B}(10;\, 0{,}2;\, 3) + \frac{2}{3} \cdot \mathrm{B}(10;\, 0{,}1;\, 3)} = 36{,}3\,\%$$

   c) Die Werkstücke der besseren Maschine werden als 1. Qualität, die der schlechteren als 2. Qualität bezeichnet.
   Bei einer größeren Lieferung einheitlicher Qualität sind die Etiketten verloren gegangen. Durch einen Test mit einer Stichprobe von $n = 100$ soll entschieden werden, welche Qualität vorliegt. Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler, die 1. Qualität nicht zu erkennen, soll höchstens 5% betragen. Geben Sie eine Entscheidungsregel für diesen Test an, der außerdem die Wahrscheinlichkeit für den Fehler, die 2. Qualität nicht zu erkennen, möglichst klein hält.
   Wie groß sind die Fehlerwahrscheinlichkeiten dann?

   Ablehnungsbereich: $\overline{K} = [16,\, 100]$
   $\alpha = 4{,}0\,\%$
   $\beta = 12{,}9\,\%$

   d) Zeichnen Sie die Gütefunktion des Tests und erläutern Sie an ihr die Auswirkungen auf die Fehler, falls sich die Ausschussanteile der Maschinen verändern.



Profilbrett-Aufgabe Abiturprüfung Bayern LK 2002

2. Die Firma Brettlmaier ist ein Holz verarbeitender Betrieb, der Profilbretter und Parkettdielen herstellt.

   a) Die Stämme, die zu Profilbrettern geschnitten werden, bezieht die Firma Brettlmaier von einem Händler, der das Holz waggonweise anliefert. 80% der Waggons enthalten ausschließlich Stämme aus Europa, der Rest der Waggons hat ausschließlich Ware aus nichteuropäischen Ländern geladen. Unter der Annahme, dass die Waggons unabhängig voneinander und rein zufällig angeliefert werden, berechne man

      1) die Anzahl der Waggons, die man mindestens untersuchen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % wenigstens einen mit nichteuropäischen Stämmen zu finden,

      2) die Wahrscheinlichkeit dafür, in einer Lieferung von 200 Waggons mehr als 150 mit europäischen Stämmen zu finden.

   b) Nach dem Schnitt werden die Profilbretter nach den Qualitätsstufen A und B sortiert. Man erhält aus den europäischen Stämmen 65 % A-Bretter. Insgesamt liegt der Anteil der A-Sortierung bei 58 %.

      1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebig ausgewähltes Brett der B-Sortierung aus nichteuropäischem Holz hergestellt worden ist?

      2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besitzen fünf aus einer großen Anzahl rein zufällig ausgewählte Bretter alle dieselbe Qualitätsstufe?

      3) Nach längerer Produktionszeit ist der Verdacht aufgekommen, dass sich der Anteil der A-Qualität auf einen Wert $p < 0{,}58$ verringert hat. Dazu soll die Nullhypothese $p \geq 0{,}58$ mit einem Signifikanztest auf dem Niveau 5 % getestet werden. Entwickeln sie einen geeigneten Test auf der Basis einer Stichprobe von 300 Brettern.

   c) Zur Herstellung von Parkettdielen stehen viele, jeweils gleich große Brettchen zur Verfügung, die nach dem Aussehen in drei Kategorien „ruhig“, „mittel“ und „lebhaft“ eingeteilt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, für eine Diele 15 Brettchen auszuwählen, wenn es nur darauf ankommt, in welcher Stückzahl die drei Kategorien auftreten?

   d) Die Parkettdielen werden verlegefertig mit hoher Maßgenauigkeit verkauft. Sie weisen eine mittlere Länge von 800,0 mm bei einer Standardabweichung von 0,2 mm auf. Beim Verlegen in einem Raum werden 10 Parkettdielen nahtlos aneinandergefügt. Die Gesamtlänge soll möglichst genau 8 m betragen. Schätzen Sie unter der Annahme, dass die Länge der einzelnen Parkettdielen und die Gesamtlänge aus den zehn Parkettdielen jeweils normalverteilt sind, die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass höchstens 1,0 mm abgeschliffen werden müssen.

   e) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße X kann näherungsweise mit Hilfe der kumulativen Verteilungsfunktion F der Standardnormalverteilung wie folgt angegeben werden:

   $$P(X \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k-20+0{,}5}{4}\right)$$

   Beschreiben Sie ein konkretes Zufallsexperiment und eine Zufallsgröße X mit der angegebenen Verteilung.

Profilbrett-Aufgabe Lösungen

2. Die Firma Brettlmaier ist ein Holz verarbeitender Betrieb, der Profilbretter und Parkettdielen herstellt.

   a) Die Stämme, die zu Profilbrettern geschnitten werden, bezieht die Firma Brettlmaier von einem Händler, der das Holz waggonweise anliefert. 80% der Waggons enthalten ausschließlich Stämme aus Europa, der Rest der Waggons hat ausschließlich Ware aus nichteuropäischen Ländern geladen. Unter der Annahme, dass die Waggons unabhängig voneinander und rein zufällig angeliefert werden, berechne man

   1) die Anzahl der Waggons, die man mindestens untersuchen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % wenigstens einen mit nichteuropäischen Stämmen zu finden,

   $$1 - 0{,}8^n \geq 0{,}9 \quad \Longrightarrow \quad n \geq 10{,}3 \quad \textit{ab} \;\; n = 11$$

   2) die Wahrscheinlichkeit dafür, in einer Lieferung von 200 Waggons mehr als 150 mit europäischen Stämmen zu finden.

   $$P(X > 150) = 95{,}1\,\%$$

   b) Nach dem Schnitt werden die Profilbretter nach den Qualitätsstufen A und B sortiert. Man erhält aus den europäischen Stämmen 65 % A-Bretter. Insgesamt liegt der Anteil der A-Sortierung bei 58 %.

   1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebig ausgewähltes Brett der B-Sortierung aus nichteuropäischem Holz hergestellt worden ist?

   Anteil der A-Sortierung bei nichteuropäischen Stämmen sei p_2, dann gilt:

   $$\text{(Baumdiagramm)} \quad 0{,}58 = 0{,}65 \cdot 0{,}8 + p_2 \cdot 0{,}2 \quad \Longrightarrow \quad p_2 = 0{,}3$$

   $$P(\textit{aus nichteuropäischem Holz} \mid \textit{B-Sortierung}) = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}2}{0{,}35 \cdot 0{,}8 + 0{,}7 \cdot 0{,}2} = 33{,}3\,\%$$

   2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besitzen fünf aus einer großen Anzahl rein zufällig ausgewählte Bretter alle dieselbe Qualitätsstufe?

   $$0{,}42^5 + 0{,}58^5 = 7{,}9\,\%$$

   3) Nach längerer Produktionszeit ist der Verdacht aufgekommen, dass sich der Anteil der A-Qualität auf einen Wert $p < 0{,}58$ verringert hat. Dazu soll die Nullhypothese $p \geq 0{,}58$ mit einem Signifikanztest auf dem Niveau 5 % getestet werden. Entwickeln sie einen geeigneten Test auf der Basis einer Stichprobe von 300 Brettern.

   Für $X \leq 159$ wird die Nullhypothese verworfen.

   c) Zur Herstellung von Parkettdielen stehen viele, jeweils gleich große Brettchen zur Verfügung, die nach dem Aussehen in drei Kategorien „ruhig“, „mittel“ und „lebhaft“ eingeteilt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, für eine Diele 15 Brettchen auszuwählen, wenn es nur darauf ankommt, in welcher Stückzahl die drei Kategorien auftreten?

   $$16 + 15 + 14 + \ldots + 2 + 1 = \frac{16 \cdot (1 + 16)}{2} = 136$$

   Falls die Stückzahl für „ruhig“ a ist (a kann 0, 1, 2, …, 15 sein),
   kommen für „mittel“ 0 bis $15 - a$ in Frage.
   Für „lebhaft“ gibt es keine Wahlmöglichkeiten mehr.

   oder einfacher: $k = 15$ *auf* $n = 3$ *Plätze verteilt:* $\binom{n+k-1}{k} = 136$

d) Die Parkettdielen werden verlegefertig mit hoher Maßgenauigkeit verkauft. Sie weisen eine mittlere Länge von $800{,}0\,mm$ bei einer Standardabweichung von $0{,}2\,mm$ auf. Beim Verlegen in einem Raum werden 10 Parkettdielen nahtlos aneinandergefügt. Die Gesamtlänge soll möglichst genau $8\,m$ betragen. Schätzen Sie unter der Annahme, dass die Länge der einzelnen Parkettdielen und die Gesamtlänge aus den zehn Parkettdielen jeweils normalverteilt sind, die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass höchstens $1{,}0\,mm$ abgeschliffen werden müssen.

Gesamtlänge Y

$$\mu = E(Y) = 10 \cdot 800$$

$$\sigma^2 = V(Y) = 10 \cdot 0{,}2^2$$

$$P(Y \leq 8001) \approx \Phi\Big(\frac{8001+0{,}5-\mu}{\sigma}\Big) = 99{,}1\,\%$$

e) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße X kann näherungsweise mit Hilfe der kumulativen Verteilungsfunktion F der Standardnormalverteilung wie folgt angegeben werden:

$$P(X \leq k) \approx \Phi\Big(\frac{k-20+0{,}5}{4}\Big)$$

Beschreiben Sie ein konkretes Zufallsexperiment und eine Zufallsgröße X mit der angegebenen Verteilung.

$$\mu = 20 = n \cdot p \quad *$$

$$\underline{\sigma = 4 = \sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

$$\Longrightarrow \quad q = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}, \quad \text{daher } p = \frac{1}{5}$$

$$\overset{*}{\Longrightarrow} \quad n = 100$$

In einer Urne liegen z. B. eine weiße und 4 schwarze Kugeln.

Zufallsexperiment:

100maliges Ziehen einer Kugel mit Zurücklegen.

X ist die Anzahl der weißen gezogenen Kugeln.