Polizeidienst-Aufgabe Abiturprüfung Bayern LK 2003

a) Bei einem Einstellungstermin für den Polizeidienst waren 40 % der Bewerber Frauen, von denen 90 % die Aufnahmeprüfung bestanden. Drei Viertel derjenigen, die scheiterten, waren männlich.

1) Welcher Anteil der männlichen Teilnehmer hat die Aufnahmeprüfung bestanden?
[Ergebnis: 80 %]

2) Wie viele unter einer größeren Zahl von zufällig ausgewählten Prüfungsarbeiten müssen mindestens korrigiert werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % wenigstens eine darunter ist, welche als nicht bestanden bewertet wird?
Rechnen Sie wie bei "Ziehen mit Zurücklegen".

3) Wie verändert sich das Ergebnis aus Teilaufgabe a) *2)*, wenn nicht drei Viertel der Teilnehmer, die scheitern, männlich sind, sondern ein deutlich höherer Anteil, und die sonstigen Ausgangsbedingungen unverändert bleiben? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Bei einem Einstellungstermin stehen 750 Polizeianwärterstellen zur Verfügung. Erfahrungsgemäß scheitern 16 % der Bewerber bei der Aufnahmeprüfung. Mit welcher Wahrscheinlichkeit können bei 880 Bewerbern nicht alle, die die Prüfung bestehen, übernommen werden?

c) Für die EDV-Ausbildung einer Gruppe von 4 weiblichen und 6 männlichen Polizeianwärtern steht ein Schulungsraum mit 12 Computerarbeitsplätzen zur Verfügung.

1) Auf wie viele verschiedene Arten kann sich die Gruppe auf die Arbeitsplätze verteilen, wenn nur nach dem Geschlecht unterschieden wird?

2) Die Arbeitsplätze sind in 3 Reihen zu je 4 Plätzen angeordnet. Auf wie viele verschiedene Arten können die Anwärter Platz nehmen, wenn in jeder Reihe mindestens eine Polizeianwärterin sitzen soll und wiederum nur nach dem Geschlecht unterschieden wird?

d) Die Polizeianwärter sollen üben, Nachrichten an andere Dienststellen weiterzuleiten. Dazu soll die Nachricht "Die beiden Fingerabdrücke stimmen überein" von einem Computer zum nächsten und so fort übermittelt werden. Durch einen bewusst eingebauten Übertragungsfehler wird die Meldung bei jeder einzelnen Übermittlung mit einer Wahrscheinlichkeit p in ihr Gegenteil verkehrt; andere Übertragungsfehler treten nicht auf.

1) Berechnen Sie in Abhängigkeit von p die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Kette aus 4 Übermittlungen der Übertragungsfehler genau zweimal auftritt und die Nachricht somit wieder richtig ankommt. Berechnen Sie den größten Wert, den diese Wahrscheinlichkeit annehmen kann.

2) Wie groß ist für $p = 0{,}8$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Nachricht bei einer Kette von 7 Übertragungen am Ende richtig ankommt?

3) Es gilt die Beziehung: $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{2i} = 2^{n-1}$,
wobei k die größte ganze Zahl kleiner oder gleich $\frac{n}{2}$ ist. Bestätigen Sie die Gültigkeit der Beziehung für $n = 6$ und $n = 7$ durch Einsetzen.

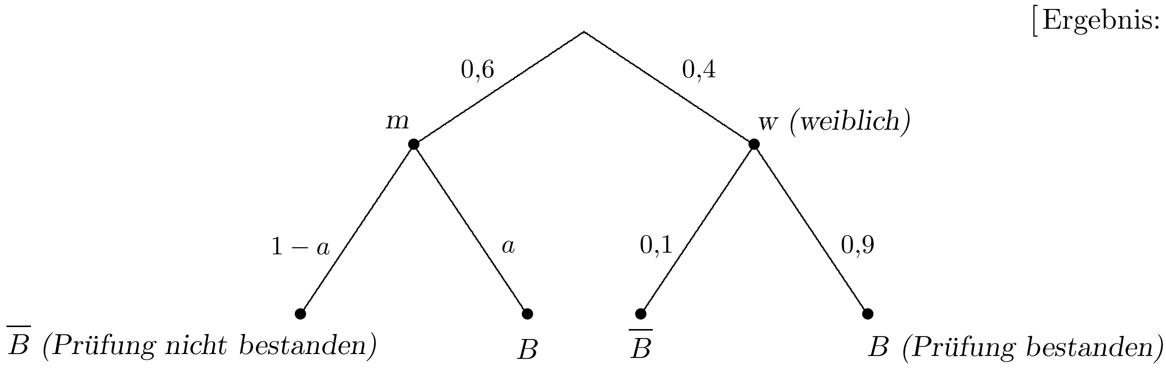
4) Zeigen Sie allgemein, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass für $p = 0{,}5$ bei einer Kette beliebiger Länge die Nachricht richtig ankommt, stets 0,5 beträgt. Die allgemein gültige Beziehung aus Teilaufgabe d) *3)* darf verwendet werden.

Polizeidienst-Aufgabe Lösungen

a) Bei einem Einstellungstermin für den Polizeidienst waren 40 % der Bewerber Frauen, von denen 90 % die Aufnahmeprüfung bestanden. Drei Viertel derjenigen, die scheiterten, waren männlich.

1) Welcher Anteil der männlichen Teilnehmer hat die Aufnahmeprüfung bestanden?

[Ergebnis: 80 %]



$$P(m \mid \overline{B}) \;=\; \frac{3}{4} \;=\; \frac{0{,}6\cdot(1-a)}{0{,}6\cdot(1-a)+0{,}4\cdot 0{,}1} \qquad\Longrightarrow\qquad a = 0{,}8$$

2) Wie viele unter einer größeren Zahl von zufällig ausgewählten Prüfungsarbeiten müssen mindestens korrigiert werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % wenigstens eine darunter ist, welche als nicht bestanden bewertet wird?
Rechnen Sie wie bei “Ziehen mit Zurücklegen“.

$$p = P(\overline{B}),\quad P_p^n(X \geq 0) > 0{,}90,\quad p \;=\; 0{,}6\cdot(1-0{,}8)+0{,}4\cdot 0{,}1 \;=\; 0{,}16$$

$$* \quad 1-0{,}84^n > 0{,}90 \quad\Longrightarrow\quad n > 13{,}2 \quad\Longrightarrow\quad n \geq 14$$

3) Wie verändert sich das Ergebnis aus Teilaufgabe a) *2)*, wenn nicht drei Viertel der Teilnehmer, die scheitern, männlich sind, sondern ein deutlich höherer Anteil, und die sonstigen Ausgangsbedingungen unverändert bleiben? Begründen Sie Ihre Antwort.

$1-a$ wird größer $\Longrightarrow$ p wird größer $\Longrightarrow$ $1-p$ wird kleiner $\Longrightarrow$ n wird kleiner,
betrachte $*$

b) Bei einem Einstellungstermin stehen 750 Polizeianwärterstellen zur Verfügung. Erfahrungsgemäß scheitern 16 % der Bewerber bei der Aufnahmeprüfung. Mit welcher Wahrscheinlichkeit können bei 880 Bewerbern nicht alle, die die Prüfung bestehen, übernommen werden? $P_{0{,}84}^{880}(Z > 750) = 14{,}9\,\%$

c) Für die EDV-Ausbildung einer Gruppe von 4 weiblichen und 6 männlichen Polizeianwärtern steht ein Schulungsraum mit 12 Computerarbeitsplätzen zur Verfügung.

1) Auf wie viele verschiedene Arten kann sich die Gruppe auf die Arbeitsplätze verteilen, wenn nur nach dem Geschlecht unterschieden wird?

$$\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{6} = 13860 \quad \left(= \frac{12!}{4!\cdot 6!\cdot 2!}\right)$$

2) Die Arbeitsplätze sind in 3 Reihen zu je 4 Plätzen angeordnet. Auf wie viele verschiedene Arten können die Anwärter Platz nehmen, wenn in jeder Reihe mindestens eine Polizeianwärterin sitzen soll und wiederum nur nach dem Geschlecht unterschieden wird?

Verteilung der weiblichen Anwärter: $\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot 3 = 288$

Verteilung der männlichen Anwärter: $\binom{8}{6} = 28$, insgesamt $288\cdot 28 = 8064$

d) Die Polizeianwärter sollen üben, Nachrichten an andere Dienststellen weiterzuleiten. Dazu soll die Nachricht "Die beiden Fingerabdrücke stimmen überein" von einem Computer zum nächsten und so fort übermittelt werden. Durch einen bewusst eingebauten Übertragungsfehler wird die Meldung bei jeder einzelnen Übermittlung mit einer Wahrscheinlichkeit p in ihr Gegenteil verkehrt; andere Übertragungsfehler treten nicht auf.

1) Berechnen Sie in Abhängigkeit von p die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Kette aus 4 Übermittlungen der Übertragungsfehler genau zweimal auftritt und die Nachricht somit wieder richtig ankommt. Berechnen Sie den größten Wert, den diese Wahrscheinlichkeit annehmen kann.

$$P_p^4(Y=2) \;=\; \binom{4}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^2 \;=\; 6p^2(1-p)^2 \;=\; f(p)$$

$$f'(p) = 12p \cdot (1-p) \cdot (1-2p) = 0 \quad \Longrightarrow \quad p_{max} = 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad P_{0,5}^4(Y=2) = 37{,}5\,\%$$

2) Wie groß ist für $p = 0{,}8$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Nachricht bei einer Kette von 7 Übertragungen am Ende richtig ankommt?

$$P(\textit{Nachricht kommt richtig an}) \;=$$

$$P_{0,8}^7(Y=0) + P_{0,8}^7(Y=2) + P_{0,8}^7(Y=4) + P_{0,8}^7(Y=6) \;=\; 48{,}6\,\%$$

3) Es gilt die Beziehung: $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{2i} = 2^{n-1}$,

wobei k die größte ganze Zahl kleiner oder gleich $\frac{n}{2}$ ist. Bestätigen Sie die Gültigkeit der Beziehung für $n = 6$ und $n = 7$ durch Einsetzen.

$n = 6,\; k = 3,\;$ *beide Seiten ergeben* 32

$n = 7,\; k = 3,\;$ *beide Seiten ergeben* 64

4) Zeigen Sie allgemein, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass für $p = 0{,}5$ bei einer Kette beliebiger Länge die Nachricht richtig ankommt, stets 0,5 beträgt. Die allgemein gültige Beziehung aus Teilaufgabe d) *3)* darf verwendet werden.

$$P(\textit{Nachricht kommt richtig an}) \;=$$

$$\underbrace{\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{2k}\right]}_{\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{2i}} \cdot 0{,}5^n \;=\; 2^{n-1} \cdot 0{,}5^n \;=\; 0{,}5$$

Laplace-Münze-Aufgabe Abiturprüfung LK Bayern 2003

1. Im Januar 2002 war in einer Zeitung zu lesen, dass die neuen Euro-Münzen keine Laplace-Münzen seien. Bei einem Experiment mit einer 2-Euro-Münze, die man 1000-mal auf dem Tisch kreiseln ließ, sei 600-mal Zahl oben liegen geblieben.

   a) Zeigen Sie, dass bereits bei 200 Würfen einer Laplace-Münze die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in wenigstens 60 % der Fälle Zahl oben liegen bleibt, kleiner als 0,5 % ist.

   b) Begründen Sie, dass die Stabdiagramme der Binomialverteilungen mit $p = 0{,}5$ achsensymmetrisch sind. Geben Sie die Symmetrieachse an.

   c) Ermitteln Sie mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyschow eine möglichst kleine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, bei 1000 Würfen einer Laplace-Münze wenigstens 600-mal Zahl zu erhalten. Vergleichen Sie diesen Wert mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe 1a) und nehmen Sie dazu kurz Stellung.

   d) Aufgrund des Zeitungsartikels führte ein Schüler eine eigene Versuchsreihe durch. Er ließ eine 2-Euro-Münze 250-mal auf dem Tisch kreiseln; dabei blieb 139-mal Zahl oben.
   Stellen Sie durch Näherung mit der Normalverteilung fest, ob dieses Ergebnis auf einem Niveau von 5 % signifikant dafür ist, dass bei dieser Münze häufiger Zahl oben liegen bleibt als bei einer Laplace-Münze.

2. Auf dem Schulfest des Laplace-Gymnasiums wurde untersucht, welchen Einfluss es hat, ob eine 2-Euro-Münze geworfen oder auf dem Tisch gekreiselt wird. Jeder Schüler durfte selbst entscheiden, ob er lieber werfen oder kreiseln wollte. In der Schülerzeitung war anschließend Folgendes zu lesen: "70 % der Schüler kreiselten die Münze. Insgesamt ist in 56 % aller Fälle Zahl oben liegen geblieben, wobei davon 72,5 % durch Kreiseln erzielt worden sind."
   Wie groß ist die relative Häufigkeit des Ereignisses „Zahl liegt oben" beim Werfen und wie groß ist sie beim Kreiseln?

3. Eine Laplace-Münze wird so oft geworfen, bis zweimal hintereinander die gleiche Seite oben liegen bleibt. Insgesamt wird aber höchstens n-mal geworfen. Die Zufallsgröße X sei die Anzahl der Würfe, $E_n(X)$ sei ihr Erwartungswert.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei n-maligem Werfen immer abwechselnd beide Seiten zu erhalten?

   b) Bestimmen Sie $E_2(X)$, $E_3(X)$ und $E_4(X)$.

   c) Zeigen Sie, dass gilt: $E_{n+1}(X) - E_n(X) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

   d) Erläutern Sie, warum $E_n(X)$ für $n \to +\infty$ nicht größer als 3 wird, und interpretieren Sie diese Tatsache im vorliegenden Zufallsexperiment.

Laplace-Münze-Aufgabe   Abiturprüfung LK Bayern 2003   Lösungen

1. Im Januar 2002 war in einer Zeitung zu lesen, dass die neuen Euro-Münzen keine Laplace-Münzen seien. Bei einem Experiment mit einer 2-Euro-Münze, die man 1000-mal auf dem Tisch kreiseln ließ, sei 600-mal Zahl oben liegen geblieben.

   a) Zeigen Sie, dass bereits bei 200 Würfen einer Laplace-Münze die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in wenigstens 60 % der Fälle Zahl oben liegen bleibt, kleiner als 0,5 % ist.
   $P_{0,5}^{200}(X \geq 120) = 0{,}3\,\%$

   b) Begründen Sie, dass die Stabdiagramme der Binomialverteilungen mit $p = 0{,}5$ achsensymmetrisch sind. Geben Sie die Symmetrieachse an.
   $a = \frac{n}{2}$

   $$P_p^n(X = k) = P_p^n(X = n - k) \iff \binom{n}{k} \cdot 0{,}5^n = \binom{n}{n-k} \cdot 0{,}5^n$$

   c) Ermitteln Sie mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyschow eine möglichst kleine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, bei 1000 Würfen einer Laplace-Münze wenigstens 600-mal Zahl zu erhalten. Vergleichen Sie diesen Wert mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe 1a) und nehmen Sie dazu kurz Stellung.

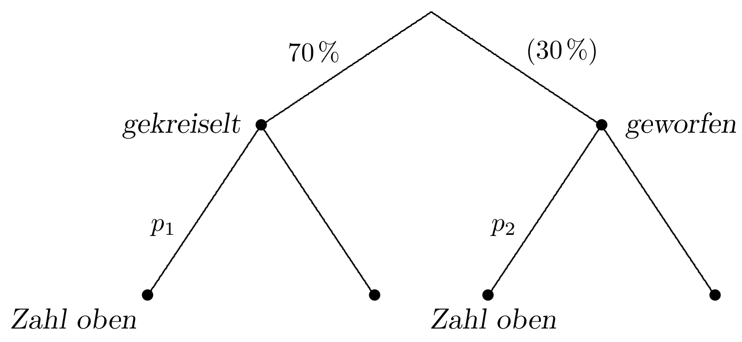
   $$P(|\,X - \mu\,| \geq \alpha) \;\leq\; \frac{V(X)}{\alpha^2}\,, \quad \alpha = 100,\ \mu = 500,\ V(X) = 250 \quad \Longrightarrow \quad P(|\,X - 500\,| \geq 100) \;\leq\; 0{,}025$$

   $$\Longrightarrow \quad P(X \geq 600) \leq 0{,}0125 \qquad \text{(Bereich wird halbiert)}$$

   Mit der Ungleichung von Tschebyschow wird die Wahrscheinlichkeit nur grob abgeschätzt.

   d) Aufgrund des Zeitungsartikels führte ein Schüler eine eigene Versuchsreihe durch. Er ließ eine 2-Euro-Münze 250-mal auf dem Tisch kreiseln; dabei blieb 139-mal Zahl oben.
   Stellen Sie durch Näherung mit der Normalverteilung fest, ob dieses Ergebnis auf einem Niveau von 5 % signifikant dafür ist, dass bei dieser Münze häufiger Zahl oben liegen bleibt als bei einer Laplace-Münze.
   $P_{0,5}^{250}(X \geq 139) = 4{,}4\,\%$

2. Auf dem Schulfest des Laplace-Gymnasiums wurde untersucht, welchen Einfluss es hat, ob eine 2-Euro-Münze geworfen oder auf dem Tisch gekreiselt wird. Jeder Schüler durfte selbst entscheiden, ob er lieber werfen oder kreiseln wollte. In der Schülerzeitung war anschließend Folgendes zu lesen: "70 % der Schüler kreiselten die Münze. Insgesamt ist in 56 % aller Fälle Zahl oben liegen geblieben, wobei davon 72,5 % durch Kreiseln erzielt worden sind."
   Wie groß ist die relative Häufigkeit des Ereignisses „Zahl liegt oben" beim Werfen und wie groß ist sie beim Kreiseln?



$$70\,\% \cdot p_1 = 72{,}5\,\% \cdot 0{,}56 \quad \Longrightarrow \quad p_1 = 0{,}58$$

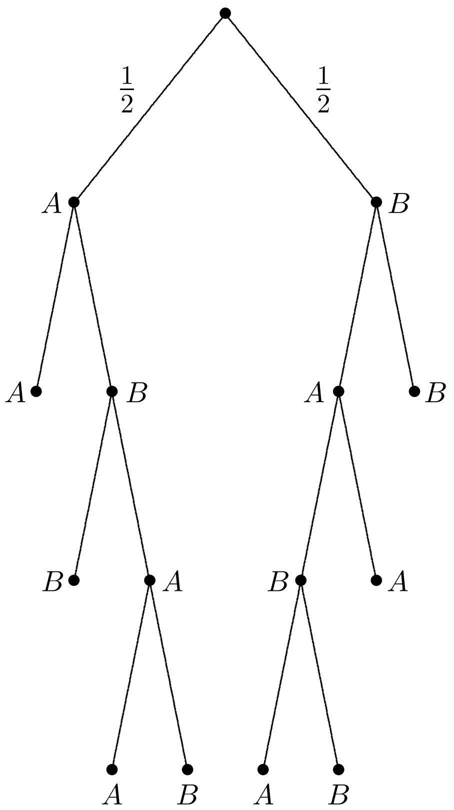
$$0{,}56 = 0{,}7 \cdot p_1 + 0{,}3 \cdot p_2 \quad \Longrightarrow \quad p_1 = 0{,}51$$

3. Eine Laplace-Münze wird so oft geworfen, bis zweimal hintereinander die gleiche Seite oben liegen bleibt. Insgesamt wird aber höchstens n-mal geworfen. Die Zufallsgröße X sei die Anzahl der Würfe, $E_n(X)$ sei ihr Erwartungswert.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei n-maligem Werfen immer abwechselnd beide Seiten zu erhalten?

   $$2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}$$

   b) Bestimmen Sie $E_2(X)$, $E_3(X)$ und $E_4(X)$.



$n = 2$

2	2	2	2
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$E_2(X) = 2$

ersetzen durch

$n = 3$

3	3	3	3
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$E_3(X) = 2{,}5$

ersetzen durch

$n = 4$

4	4	4	4
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

$E_4(X) = 2{,}75$

   c) Zeigen Sie, dass gilt: $E_{n+1}(X) - E_n(X) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

   (siehe den Schritt von 3 auf 4)

   $$E_{n+1}(X) - E_n(X) = 4 \cdot (n+1) \cdot \frac{1}{2^{n+1}} - 2 \cdot n \cdot \frac{1}{2^n} = \ldots = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}$$

   d) Erläutern Sie, warum $E_n(X)$ für $n \to +\infty$ nicht größer als 3 wird, und interpretieren Sie diese Tatsache im vorliegenden Zufallsexperiment.

   aus 3c) folgt $\lim\limits_{n\to\infty} E_n(X) = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 3$

   Auch wenn die maximale Anzahl der Würfe nicht mehr begrenzt wird, muss man im Schnitt nicht mehr als dreimal werfen.