

1. Philipp meldet sich im Internet erstmalig bei der Firma Booky an. Als Passwort wählt er aus Sicherheitsgründen eine zufällige Anordnung der 7 Großbuchstaben seines Vornamens.
  - a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er das Passwort „PPPIIHL“ wählt?
  - b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in seinem Passwort die beiden Buchstaben I nicht direkt hintereinander auftreten?
  
2. Anlässlich eines Jubiläums lädt die Firma Booky 300 Personen, von denen 100 bereits Booky-Kunden sind, zu einem Fest ein. Unter den Gästen werden im Laufe des Abends Preise verlost. Die Auswahl der Gewinner erfolgt dabei durch Ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne mit den Namen der 300 Gäste.
  - a) Wie viele Preise müssen mindestens verlost werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98% wenigstens einer der Booky-Kunden einen Preis erhält?
  - b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit geht von 10 verlostten Preisen nur der letzte an einen Booky-Kunden?
  - c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehen die ersten 5 Preise an 5 verschiedene Gäste?
  
3. Die Geschäftsleitung von Booky interessiert sich für den Bekanntheitsgrad ihres Firmennamens. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die relative Häufigkeit der Befragten, die Booky kennen, um weniger als 0,05 vom tatsächlichen Bekanntheitsgrad unterscheidet, soll mindestens 95% betragen. Schätzen Sie mit Hilfe der Tschebyschow-Ungleichung ab, wie viele Personen dafür mindestens befragt werden müssten.
  
4. Die Firma Booky will eine Fernsehwerbung starten, wenn ihr Bekanntheitsgrad unter 60% liegt. Die Entscheidung soll auf der Grundlage einer Umfrage unter 1200 zufällig ausgewählten Personen getroffen werden. Benützen Sie zur Berechnung die Normalverteilung als Näherung.
  - a) Bestimmen Sie eine Entscheidungsregel mit einem möglichst kleinen Annahmehbereich für die Einleitung der Werbekampagne, bei der die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Werbekampagne irrtümlich unterlassen wird, höchstens 5% ist.
  - b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird nach der Entscheidungsregel von Teilaufgabe 4a) die Werbekampagne eingeleitet, obwohl der Bekanntheitsgrad bei 65% liegt?
  
5. Die Standard-Normalverteilung wird durch die Funktion  $\Phi: x \rightarrow \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt \quad (x \in \mathbb{R})$  beschrieben, wobei  $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \quad (t \in \mathbb{R})$  ist.
  - a) Erläutern Sie die stochastische Bedeutung des Funktionswertes  $\Phi(x)$  und begründen Sie damit, dass  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1$  ist.
  - b) Begründen Sie unter Zuhilfenahme der Symmetrieeigenschaft von  $\varphi(t)$ , dass für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ .

## Booky-Aufgabe    Abiturprüfung LK Bayern 2002    Lösungen

1. Philipp meldet sich im Internet erstmalig bei der Firma Booky an. Als Passwort wählt er aus Sicherheitsgründen eine zufällige Anordnung der 7 Großbuchstaben seines Vornamens.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er das Passwort „PPPIIHL“ wählt?

$$|\Omega| = \frac{7!}{3! \cdot 2!} \implies P = 0,24\%$$

- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in seinem Passwort die beiden Buchstaben I nicht direkt hintereinander auftreten?

$$|A_{\text{II direkt hintereinander}}| = \frac{6!}{3!} \implies 1 - \frac{|A_{\text{II direkt hintereinander}}|}{|\Omega|} = 71,4\%$$

2. Anlässlich eines Jubiläums lädt die Firma Booky 300 Personen, von denen 100 bereits Booky-Kunden sind, zu einem Fest ein. Unter den Gästen werden im Laufe des Abends Preise verlost. Die Auswahl der Gewinner erfolgt dabei durch Ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne mit den Namen der 300 Gäste.

- a) Wie viele Preise müssen mindestens verlost werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98% wenigstens einer der Booky-Kunden einen Preis erhält?

$$P_{\frac{1}{3}}^n(Z \geq 1) = 1 - P_{\frac{1}{3}}^n(Z = 0) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n > 98\% \implies n \geq 10$$

- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit geht von 10 verlostten Preisen nur der letzte an einen Booky-Kunden?

$$\left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = 0,9\%$$

- c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehen die ersten 5 Preise an 5 verschiedene Gäste?

$$\frac{300 \cdot 299 \cdot 298 \cdot 297 \cdot 296}{300^5} = 96,7\%$$

3. Die Geschäftsleitung von Booky interessiert sich für den Bekanntheitsgrad ihres Firmennamens. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die relative Häufigkeit der Befragten, die Booky kennen, um weniger als 0,05 vom tatsächlichen Bekanntheitsgrad unterscheidet, soll mindestens 95% betragen. Schätzen Sie mit Hilfe der Tschebyschow-Ungleichung ab, wie viele Personen dafür mindestens befragt werden müssten.

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < 0,05\right) \geq 1 - \frac{1}{4 \cdot 0,05^2 \cdot n} \geq 0,95 \implies n \geq 2000$$

4. Die Firma Booky will eine Fernsehwerbung starten, wenn ihr Bekanntheitsgrad unter 60% liegt. Die Entscheidung soll auf der Grundlage einer Umfrage unter 1200 zufällig ausgewählten Personen getroffen werden. Benützen Sie zur Berechnung die Normalverteilung als Näherung.

- a) Bestimmen Sie eine Entscheidungsregel mit einem möglichst kleinen Annahmehbereich für die Einleitung der Werbekampagne, bei der die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Werbekampagne irrtümlich unterlassen wird, höchstens 5% ist.

$$\mu = 1200 \cdot 0,6$$

$$\sigma = \sqrt{1200 \cdot 0,60 \cdot 0,40}$$

$$P(Z \geq k) \approx 1 - \Phi\left(\frac{k - 0,5 - \mu}{\sigma}\right) \leq 0,05 \implies k \geq 749$$

$$A = \{0, \dots, 748\} \quad (\text{Annahmehbereich})$$

- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird nach der Entscheidungsregel von Teilaufgabe 4a) die Werbekampagne eingeleitet, obwohl der Bekanntheitsgrad bei 65% liegt?

$$P_{0,65}^{1200}(Z \leq 748) = 2,8\%$$

5. Die Standard-Normalverteilung wird durch die Funktion  $\Phi: x \rightarrow \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$  ( $x \in \mathbb{R}$ )

beschrieben, wobei  $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) ist.

- a) Erläutern Sie die stochastische Bedeutung des Funktionswertes  $\Phi(x)$  und begründen Sie damit, dass  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1$  ist. Erläuterung ...

- b) Begründen Sie unter Zuhilfenahme der Symmetrieeigenschaft von  $\varphi(t)$ , dass für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ . Erläuterung ...