Joghurtbecher-Aufgabe   Abiturprüfung LK Bayern 2001

In einem Supermarkt werden Joghurtbecher angeboten. Die Lieferung der Becher erfolgt auf Paletten zu je 200 Stück. Langjährige Erfahrung zeigt: Ein Becher wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 85 % zum regulären Preis verkauft. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Becher bis zum Ablauf des Mindesthaltbarkeitsdatums nicht verkauft werden kann und danach zu einem Sonderpreis angeboten werden muss, ist 10 %. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Becher beschädigt und somit unverkäuflich ist, beträgt 5 %.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von einer Palette mehr als 175 Becher regulär verkauft werden?

2. Bestimmen Sie die kleinste Anzahl von Paletten, so dass sich darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98 % wenigstens eine Palette befindet, von der höchstens 6 Becher wegen Beschädigung unverkäuflich sind.

3. Unter 40 Joghurtbechern befinden sich genau 4 beschädigte. Die Becher stehen in rein zufälliger Anordnung in 4 Reihen zu je 10 Bechern in einem Regal.

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich alle beschädigten Becher in der hintersten Reihe?

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich in jeder Reihe genau ein beschädigter Becher?

4. Die beschädigten Becher weisen ausschließlich folgende Schäden auf:

   E = „Aludeckel eingedrückt“ oder

   G = „Becher gebrochen“.

   Der Schaden E tritt bei 4 % aller Becher, der Schaden G bei 40 % der beschädigten Becher auf.

   a) Ermitteln Sie, ob die Schäden E und G unabhängig voneinander auftreten.

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Becher, dessen Deckel eingedrückt ist, gebrochen?

5. Bei einem regulär verkauften Becher beträgt die Differenz aus Verkaufs- und Einkaufspreis 22 *ct*. Diejenigen Becher, die bis zum Ablauf des Mindesthaltbarkeitsdatums nicht verkauft werden konnten, werden für die Hälfte des ursprünglichen Verkaufspreises angeboten. Von diesen können dann erfahrungsgemäß 60 % doch noch verkauft werden. Für die Beseitigung der Becher, die wegen Beschädigung oder wegen Ablaufs des Mindesthaltbarkeitsdatums unverkäuflich sind, fallen keine zusätzlichen Entsorgungsgebühren an.
   Aus diesen Informationen errechnet sich für den Supermarkt im Mittel ein Gewinn von 11,2 *ct* pro Becher. Berechnen Sie den Einkaufspreis eines Bechers.

6. Der Supermarkt bezieht pro Jahr 50 Paletten Joghurtbecher. Schätzen Sie mit Hilfe der Tschebyschew-Ungleichung die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass der Anteil der in einem Jahr regulär verkauften Joghurts von dem langjährigen Erfahrungswert 0,85 um weniger als 0,01 abweicht.

7. Der Supermarkt will seine Joghurtbecher von einer anderen Firma beziehen und erwartet dadurch weniger Beschädigungen. Die Nullhypothese „Die neuen Becher sind mindestens so anfällig gegen Beschädigungen wie die alten“ soll auf der Basis von 1000 Joghurtbechern und dem Signifikanzniveau 5 % getestet werden.
   Bestimmen Sie mit Hilfe der Normalverteilung als Näherung die Entscheidungsregel.

Joghurtbecher-Aufgabe Abiturprüfung LK Bayern 2001 Lösungen

In einem Supermarkt werden Joghurtbecher angeboten. Die Lieferung der Becher erfolgt auf Paletten zu je 200 Stück. Langjährige Erfahrung zeigt: Ein Becher wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 85 % zum regulären Preis verkauft. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Becher bis zum Ablauf des Mindesthaltbarkeitsdatums nicht verkauft werden kann und danach zu einem Sonderpreis angeboten werden muss, ist 10 %. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Becher beschädigt und somit unverkäuflich ist, beträgt 5 %.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von einer Palette mehr als 175 Becher regulär verkauft werden?

   $$P_{0{,}85}^{200}(X > 175) = 13{,}7\,\%$$

2. Bestimmen Sie die kleinste Anzahl von Paletten, so dass sich darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98 % wenigstens eine Palette befindet, von der höchstens 6 Becher wegen Beschädigung unverkäuflich sind.

   $$p = P_{0{,}05}^{200}(Y \leq 6) = 0{,}1237$$

   $$1 - (1-p)^n > 0{,}98 \implies n > 29{,}6 \quad \textit{mindestens 30 Paletten}$$

3. Unter 40 Joghurtbechern befinden sich genau 4 beschädigte. Die Becher stehen in rein zufälliger Anordnung in 4 Reihen zu je 10 Bechern in einem Regal.

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich alle beschädigten Becher in der hintersten Reihe?

   $$\frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{36}{6}}{\binom{40}{10}} = 0{,}0023 \quad \textit{oder} \quad \frac{\binom{10}{4}}{\binom{40}{4}}$$

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich in jeder Reihe genau ein beschädigter Becher?

   $$\frac{10^4}{\binom{40}{4}} = 0{,}1094 \quad \textit{oder (Wenn Nr. 1 sich in Reihe a befindet, beträgt die W. für Nr. 2 ...)} \quad \frac{30}{39} \cdot \frac{20}{38} \cdot \frac{10}{37}$$

4. Die beschädigten Becher weisen ausschließlich folgende Schäden auf:

   E = „Aludeckel eingedrückt“ oder

   G = „Becher gebrochen“.

   Der Schaden E tritt bei 4 % aller Becher, der Schaden G bei 40 % der beschädigten Becher auf.

   a) Ermitteln Sie, ob die Schäden E und G unabhängig voneinander auftreten.

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Becher, dessen Deckel eingedrückt ist, gebrochen?

	G	$\overline{G}$	*Summe*
E	...	...	4 %
$\overline{E}$	...	95 %	...
Summe	2 %	...	100 %

beachte: 40 % von 5 % *sind* 2 %

$P(E \cap G) \neq P(E) \cdot P(G)$ *(Tabelle weiter ausfüllen)*

$$P(G \mid E) = \frac{0{,}01}{0{,}04} = 25\,\%$$

	G	$\overline{G}$	*Summe*
E	1 %	3 %	4 %
$\overline{E}$	1 %	95 %	...
Summe	2 %	98 %	100 %

5. Bei einem regulär verkauften Becher beträgt die Differenz aus Verkaufs- und Einkaufspreis 22 *ct*. Diejenigen Becher, die bis zum Ablauf des Mindesthaltbarkeitsdatums nicht verkauft werden konnten, werden für die Hälfte des ursprünglichen Verkaufspreises angeboten. Von diesen können dann erfahrungsgemäß 60 % doch noch verkauft werden. Für die Beseitigung der Becher, die wegen Beschädigung oder wegen Ablaufs des Mindesthaltbarkeitsdatums unverkäuflich sind, fallen keine zusätzlichen Entsorgungsgebühren an.
   Aus diesen Informationen errechnet sich für den Supermarkt im Mittel ein Gewinn von 11,2 *ct* pro Becher. Berechnen Sie den Einkaufspreis eines Bechers.

   Einkaufspreis x

$$(x+22)\cdot 0{,}85 + \frac{1}{2}(x+22)\cdot 0{,}10\cdot 0{,}60 - x = 11{,}2 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 68$$

6. Der Supermarkt bezieht pro Jahr 50 Paletten Joghurtbecher. Schätzen Sie mit Hilfe der Tschebyschew-Ungleichung die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass der Anteil der in einem Jahr regulär verkauften Joghurts von dem langjährigen Erfahrungswert 0,85 um weniger als 0,01 abweicht.

$$P(\,|\,\frac{X}{n} - 0{,}85\,| < 0{,}01) \;\geq\; 1 - \frac{p\cdot q}{n\cdot\alpha^2} \;= 0{,}8725, \quad n = 50\cdot 200$$

7. Der Supermarkt will seine Joghurtbecher von einer anderen Firma beziehen und erwartet dadurch weniger Beschädigungen. Die Nullhypothese „Die neuen Becher sind mindestens so anfällig gegen Beschädigungen wie die alten“ soll auf der Basis von 1000 Joghurtbechern und dem Signifikanzniveau 5 % getestet werden.
   Bestimmen Sie mit Hilfe der Normalverteilung als Näherung die Entscheidungsregel.

   Binomialverteilung (für eine geänderte Aufgabenstellung): $P_{0,05}^{1000}(X \leq k) \leq 0{,}05 \quad \Longrightarrow \quad k \leq 38$

   Für $X \leq 38$ kann die Nullhypothese verworfen werden.

$$\mu = 1000\cdot 0{,}05 = 50$$

$$\sigma = \sqrt{1000\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95}$$

$$P(\,X \leq k) \;\approx\; \Phi\Big(\frac{k+0{,}5-\mu}{\sigma}\Big) \;\leq\; 0{,}05 \qquad \Longrightarrow \qquad k \leq 38$$

Fitness-Studio-Aufgabe   Abiturprüfung LK Bayern 2001

Ein Fitness-Studio hat 300 weibliche und 200 männliche Mitglieder.

1. 30 % der weiblichen Mitglieder sind älter als 50 Jahre. Ein Viertel der über 50-jährigen Mitglieder sind Männer. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein männliches Mitglied älter als 50 Jahre?

2. In jeder Woche verlost der Inhaber des Fitness-Studios eine Wochenendreise unter den Mitgliedern.

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnen bei den nächsten 50 Verlosungen mehr Frauen als Männer?

   b) Wie oft muss die Verlosung mindestens durchgeführt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99,9 % wenigstens ein männliches Mitglied eine Wochenendreise gewinnt?

3. In einer Illustrierten wird behauptet, dass mindestens 20 % der Besucher von Fitness-Studios Mittel zu sich nehmen, mit denen sie gegen geltende Doping-Bestimmungen verstoßen würden. Spontan erklären sich alle Mitglieder des Fitness-Studios zu einem Test bereit. 200 Mitglieder werden rein zufällig dazu ausgewählt.

   a) Die Nullhypothese H_0: „Mindestens 20 % nehmen Doping-Mittel“ soll auf dem Signifikanzniveau 1 % getestet werden. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel.

   b) Wie groß ist bei obiger Entscheidungsregel die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man die Nullhypothese H_0 nicht ablehnen kann, obwohl nur 9 % der Besucher von Fitness-Studios Doping-Mittel verwenden. Verwenden Sie die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung.

4. 12 neue Mitglieder haben sich angemeldet, darunter ein Ehepaar. Sie werden rein zufällig so auf drei verschiedene Übungsgruppen aufgeteilt, dass in die 1. Gruppe 4, in die 2. Gruppe 3 und in die 3. Gruppe 5 der neuen Mitglieder kommen.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Ehepaar zusammen in einer Gruppe?

5. Eine Zufallsgröße X hat die folgende Verteilung:

k	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	0,11	0,32	0,35	0,12	a	b

   a) Wie groß sind die Werte a und b, wenn die Zufallsgröße X den Erwartungswert 1,8 hat?
   Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung von X.   [Zur Kontrolle: $\sigma \approx 1{,}2$]

   Das der Zufallsgröße X zugrunde liegende Zufallsexperiment wird 500-mal unabhängig ausgeführt. Wir betrachten die Zufallsgröße

   $$S = \sum_{i=1}^{500} X_i = X_1 + X_2 + \ldots X_{500},$$ wobei die X_i die gleiche Verteilung wie die Zufallsgröße X besitzen.

   b) Schätzen Sie mit der Tschebyschew-Ungleichung die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass der Wert von S größer als 850 und kleiner als 950 ist.

   c) Nach dem zentralen Grenzwertsatz ist die Zufallsgröße S nahezu normalverteilt. Berechnen Sie einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit, die in Teilaufgabe 5b) mit der Tschebyschew-Ungleichung abgeschätzt wurde.

Fitness-Studio-Aufgabe Abiturprüfung LK Bayern 2001 Lösungen

Ein Fitness-Studio hat 300 weibliche und 200 männliche Mitglieder.

1. 30% der weiblichen Mitglieder sind älter als 50 Jahre. Ein Viertel der über 50-jährigen Mitglieder sind Männer. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein männliches Mitglied älter als 50 Jahre?

	>50	<50	*Summe*
m	$\frac{1}{4}x$	...	200
w	90	...	300
Summe	x	...	500

$$\frac{1}{4}x + 90 = x \quad \Longrightarrow \quad x = 120$$
$$P(>50 \mid m) = \frac{30}{200} = 15{,}0\,\%$$

2. In jeder Woche verlost der Inhaber des Fitness-Studios eine Wochenendreise unter den Mitgliedern.

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnen bei den nächsten 50 Verlosungen mehr Frauen als Männer?
   $$P_{0,6}^{50}(X \geq 26) = 90{,}2\,\%$$

   b) Wie oft muss die Verlosung mindestens durchgeführt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99,9% wenigstens ein männliches Mitglied eine Wochenendreise gewinnt?
   $$1 - 0{,}6^n > 0{,}999 \quad \Longrightarrow \quad n > 13{,}5 \qquad \textit{mindestens } 14$$

3. In einer Illustrierten wird behauptet, dass mindestens 20% der Besucher von Fitness-Studios Mittel zu sich nehmen, mit denen sie gegen geltende Doping-Bestimmungen verstoßen würden. Spontan erklären sich alle Mitglieder des Fitness-Studios zu einem Test bereit. 200 Mitglieder werden rein zufällig dazu ausgewählt.

   a) Die Nullhypothese H_0: „Mindestens 20% nehmen Doping-Mittel“ soll auf dem Signifikanzniveau 1% getestet werden. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel.
   $$P_{0,20}^{200}(Z \geq k) \leq 0{,}01 \quad \Longrightarrow \quad k \leq 26$$
   Für $Z \leq 26$ kann die Nullhypothese verworfen werden.

   b) Wie groß ist bei obiger Entscheidungsregel die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man die Nullhypothese H_0 nicht ablehnen kann, obwohl nur 9% der Besucher von Fitness-Studios Doping-Mittel verwenden. Verwenden Sie die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung.

   Binomialverteilung (für eine geänderte Aufgabenstellung): $P_{0,09}^{200}(Z \geq 27) = 2{,}2\,\%$
   $$\mu = 18$$
   $$\sigma = \sqrt{200 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}91}$$
   $$P(Z \geq 27) \approx 1 - \Phi\left(\frac{27 - 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right) = 1{,}8\,\%$$

4. 12 neue Mitglieder haben sich angemeldet, darunter ein Ehepaar. Sie werden rein zufällig so auf drei verschiedene Übungsgruppen aufgeteilt, dass in die 1. Gruppe 4, in die 2. Gruppe 3 und in die 3. Gruppe 5 der neuen Mitglieder kommen.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Ehepaar zusammen in einer Gruppe?
   $$\frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} + \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} + \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{11} = 28{,}8\,\%$$

5. Eine Zufallsgröße X hat die folgende Verteilung:

k	0	1	2	3	4	5
$P(X=k)$	0,11	0,32	0,35	0,12	a	b

a) Wie groß sind die Werte a und b, wenn die Zufallsgröße X den Erwartungswert 1,8 hat?

$$0{,}9 + a + b = 1$$
$$1{,}38 + 4a + 5b = 1{,}8$$
$$\Longrightarrow \quad a = 0{,}08 \qquad b = 0{,}02$$

Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung von X.

[Zur Kontrolle: $\sigma \approx 1{,}2$]

$$V(X) = 1{,}34$$

Das der Zufallsgröße X zugrunde liegende Zufallsexperiment wird 500-mal unabhängig ausgeführt. Wir betrachten die Zufallsgröße

$$S = \sum_{i=1}^{500} X_i = X_1 + X_2 + \ldots X_{500},$$ wobei die X_i die gleiche Verteilung wie die Zufallsgröße X besitzen.

b) Schätzen Sie mit der Tschebyschew-Ungleichung die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass der Wert von S größer als 850 und kleiner als 950 ist.

$$\mu_S = 500 \cdot \mu_X = 900, \quad V(S) = 500 \cdot V(X) = 670, \qquad P(|\, S - \mu_S \,| < 50) \;\geq\; 1 - \frac{V(S)}{50^2} \;=\; 0{,}732$$

c) Nach dem zentralen Grenzwertsatz ist die Zufallsgröße S nahezu normalverteilt. Berechnen Sie einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit, die in Teilaufgabe 5b) mit der Tschebyschew-Ungleichung abgeschätzt wurde.

$$P(850 < S < 950) = P(|\, S - \mu_S \,| \leq 49) \;\approx\; 2\Phi\Big(\frac{49 + 0{,}5}{\sigma}\Big) - 1 \;=\; 0{,}944$$