Kaffeerösterei-Aufgabe   Abiturprüfung LK Bayern 2000

1. Eine Kaffeerösterei bezieht ihre Kaffeebohnen aus Lateinamerika, und zwar 2 Sorten aus Brasilien, 2 Sorten aus Venezuela und 4 Sorten aus Kolumbien. In der Rösterei werden jeweils 4 Sorten zusammengemischt, wobei aus jedem Land mindestens eine Sorte vertreten sein muss.
   Wie viele solche Mischungen sind möglich?

2. Angeblich bevorzugen mindestens 30 % der Kaffeetrinker koffeinfreien Kaffee.
   a) Entwerfen Sie auf der Basis von 800 Befragten einen geeigneten Signifikanztest mit dem Signifikanzniveau 5 %. Ermitteln Sie die Entscheidungsregel; legen Sie dabei die Normalverteilung als Näherung zugrunde.
   b) In München gaben 210 von 800 Befragten an, koffeinfreien Kaffee zu bevorzugen. Interpretieren Sie dieses Umfrageergebnis im Sinne des von Ihnen in Teilaufgabe a) entworfenen Tests.

3. Als Kaufanreiz legt die Kaffeerösterei in 20% aller Kaffeedosen ein Kaffeetässchen. Die Dosen gelangen in zufälliger Sortierung in die Regale eines Supermarkts. Monika kauft dort jede Woche eine Dose. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet sie
   a) in der 5. Woche das erste Tässchen,
   b) spätestens in der 5. Woche das erste Tässchen,
   c) frühestens in der 5. Woche das erste Tässchen,
   d) genau ein Tässchen in den ersten 5 Wochen?

4. Wie groß müsste der Anteil p der Kaffeedosen mit einem Tässchen mindestens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % unter 20 Dosen wenigstens eine mit einem Tässchen ist?

5. Bei einer größeren Lieferung von Porzellantässchen ist ein unbekannter Anteil d beschädigt. Schätzen Sie mithilfe der Tschebyschow-Ungleichung die Anzahl der Tässchen ab, die man mindestens überprüfen muss, um d mit einer Sicherheit von mindestens 90 % auf 5 Prozentpunkte genau zu bestimmen.

6. Der Hersteller der Kaffeetässchen, der normalerweise Tässchen mit einer Ausschussquote von 10 % liefert, kommt mit der Produktion nicht nach. Er bezieht daher 20 % der Tässchen von einem Zulieferer, bei dem die Ausschussquote 30 % beträgt. Hersteller und Zulieferer verpacken jeweils ihre Tässchen in gleicher Weise in nicht unterscheidbare Kisten, die jeweils eine große Anzahl Tässchen enthalten.
   In der Kaffeerösterei bemerkt man den erhöhten Ausschuss und führt folgenden Schnelltest durch: Einer Kiste werden 5 Tässchen entnommen. Wenn darunter höchstens ein Tässchen defekt ist, wird die Kiste verwendet, andernfalls ausgesondert. Für die Rösterei können dabei folgende zusätzliche Kosten entstehen: 150€ beim Aussondern einer Kiste mit der Ausschussquote 10% und 120€ bei der Verwendung einer Kiste mit der Ausschussquote 30 %.
   a) Berechnen Sie die mittleren zusätzlichen Kosten pro Kiste.
   b) Wie viel darf der Schnelltest pro Kiste höchstens kosten, damit er sich gegenüber der Alternative, alle Kisten ungeprüft zu verwenden, aus finanzieller Sicht lohnt?

Kaffeerösterei-Aufgabe   Abiturprüfung LK Bayern 2000   Lösungen

1. Eine Kaffeerösterei bezieht ihre Kaffeebohnen aus Lateinamerika, und zwar 2 Sorten aus Brasilien, 2 Sorten aus Venezuela und 4 Sorten aus Kolumbien. In der Rösterei werden jeweils 4 Sorten zusammengemischt, wobei aus jedem Land mindestens eine Sorte vertreten sein muss.
Wie viele solche Mischungen sind möglich?
$$\binom{2}{2}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{1}+\binom{2}{1}\cdot\binom{2}{2}\cdot\binom{4}{1}+\binom{2}{1}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{2}=40$$

2. Angeblich bevorzugen mindestens 30 % der Kaffeetrinker koffeinfreien Kaffee.

   a) Entwerfen Sie auf der Basis von 800 Befragten einen geeigneten Signifikanztest mit dem Signifikanzniveau 5 %. Ermitteln Sie die Entscheidungsregel; legen Sie dabei die Normalverteilung als Näherung zugrunde.
   $$P_{0,3}^{800}(X \le k) \le 0{,}05 \quad\Longrightarrow\quad \overline{A}=\{0,\ldots,218\} \quad \text{(Ablehnungsbereich für die Nullhypothese)}$$

   b) In München gaben 210 von 800 Befragten an, koffeinfreien Kaffee zu bevorzugen. Interpretieren Sie dieses Umfrageergebnis im Sinne des von Ihnen in Teilaufgabe a) entworfenen Tests.
   In München wird die Nullhypothese „mindestens 30 % der Kaffeetrinker bevorzugen koffeinfreien Kaffee“ abgelehnt.

3. Als Kaufanreiz legt die Kaffeerösterei in 20 % aller Kaffeedosen ein Kaffeetässchen. Die Dosen gelangen in zufälliger Sortierung in die Regale eines Supermarkts. Monika kauft dort jede Woche eine Dose.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet sie

   a) in der 5. Woche das erste Tässchen, $0{,}8^4 \cdot 0{,}2 = 8{,}2\,\%$

   b) spätestens in der 5. Woche das erste Tässchen, $1-0{,}8^5 = 67{,}2\,\%$

   c) frühestens in der 5. Woche das erste Tässchen, $0{,}8^4 = 41{,}0\,\%$

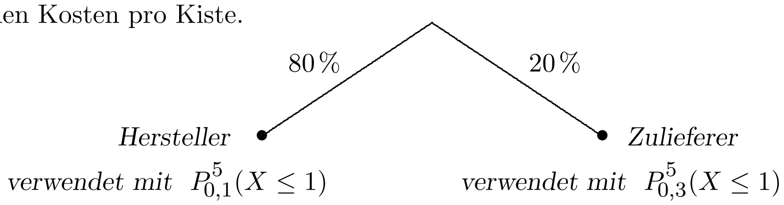
   d) genau ein Tässchen in den ersten 5 Wochen? $P_{0,2}^{5}(X=1) = 41{,}0\,\%$

4. Wie groß müsste der Anteil p der Kaffeedosen mit einem Tässchen mindestens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % unter 20 Dosen wenigstens eine mit einem Tässchen ist?
$$1-(1-p)^{20} \ge 0{,}99 \quad\Longrightarrow\quad p \ge 20{,}6\,\%$$

5. Bei einer größeren Lieferung von Porzellantässchen ist ein unbekannter Anteil d beschädigt. Schätzen Sie mithilfe der Tschebyschow-Ungleichung die Anzahl der Tässchen ab, die man mindestens überprüfen muss, um d mit einer Sicherheit von mindestens 90 % auf 5 Prozentpunkte genau zu bestimmen.
$$P\left(\left|\frac{X}{n}-d\right| \le 0{,}05\right) \;\ge\; 1-\frac{1}{4\cdot 0{,}05^2\cdot n} \;\ge\; 0{,}9 \quad\Longrightarrow\quad n \ge 1000$$

6. Der Hersteller der Kaffeetässchen, der normalerweise Tässchen mit einer Ausschussquote von 10 % liefert, kommt mit der Produktion nicht nach. Er bezieht daher 20 % der Tässchen von einem Zulieferer, bei dem die Ausschussquote 30 % beträgt. Hersteller und Zulieferer verpacken jeweils ihre Tässchen in gleicher Weise in nicht unterscheidbare Kisten, die jeweils eine große Anzahl Tässchen enthalten.
In der Kaffeerösterei bemerkt man den erhöhten Ausschuss und führt folgenden Schnelltest durch:
Einer Kiste werden 5 Tässchen entnommen. Wenn darunter höchstens ein Tässchen defekt ist, wird die Kiste verwendet, andernfalls ausgesondert. Für die Rösterei können dabei folgende zusätzliche Kosten entstehen: 150 € beim Aussondern einer Kiste mit der Ausschussquote 10 % und 120 € bei der Verwendung einer Kiste mit der Ausschussquote 30 %.

   a) Berechnen Sie die mittleren zusätzlichen Kosten pro Kiste.



$$150\cdot 0{,}8\cdot\left(1-P_{0,1}^{5}(X\le 1)\right)+120\cdot 0{,}2\cdot P_{0,3}^{5}(X\le 1) = 22{,}45$$

   b) Wie viel darf der Schnelltest pro Kiste höchstens kosten, damit er sich gegenüber der Alternative, alle Kisten ungeprüft zu verwenden, aus finanzieller Sicht lohnt?
   $120\cdot 0{,}2 - 22{,}45 = 1{,}55$
   höchstens 1,54

Tombola-Aufgabe Abiturprüfung LK Bayern 2000

Die Schüler der K13 des Graf-Felix-Gymnasiums wollen beim Herbstfest eine Tombola zum Thema „EURO“ veranstalten. Dazu werden die folgenden zwei Vorschläge diskutiert.

1. Vorschlag I:
   Auf einem Glücksrad sind vier gleich große Sektoren mit den Buchstaben E, U, R und O markiert. Nach jeder Drehung wird der angezeigte Buchstabe notiert.

   a) Das Glücksrad wird als ideal vorausgesetzt.
   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

   E_1 = „Bei den ersten vier Drehungen wird genau ein E notiert“,
   E_2 = „Spätestens bei der vierten Drehung wird erstmals ein E notiert“,
   E_3 = „Bei den ersten vier Drehungen werden vier verschiedene Buchstaben notiert“,
   E_4 = „Nach fünf Drehungen kann man aus den notierten Buchstaben unter Weglassen eines Buchstabens das Wort EURO bilden“. [Ergebnis: $P(E_4) = \frac{15}{64}$]

   b) Ein Spiel besteht aus fünfmaligem Drehen des idealen Glücksrads. Kann man aus den notierten Buchstaben unter Weglassen eines Buchstabens das Wort EURO bilden, gewinnt man einen Preis. Bestimmen Sie mithilfe der Tschebyschow-Ungleichung ein möglichst kleines Intervall, in dem die Zahl der zu vergebenden Preise mit mindestens 90 % Wahrscheinlichkeit liegt, wenn 640 Spiele ausgeführt werden.

   c) Es werden 640 Spiele wie in Teilaufgabe b) ausgeführt. Die Wahrscheinlichkeit, dass die bereitgestellten Preise nicht ausreichen, soll unter 5 % bleiben. Wie viele Preise müssen mindestens bereitgestellt werden, wenn man die Normalverteilung als Näherung zugrunde legt?

   d) Nach der Inbetriebnahme des Glücksrads ist der Verdacht aufgekommen, dass der Buchstabe E unerwartet oft als Ergebnis auftritt. Die Nullhypothese H_0: „Das Glücksrad liefert den Buchstaben E mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 25 %“ soll durch 200-maliges Drehen des Glücksrads getestet werden. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel für das Signifikanzniveau 5%.

2. Vorschlag II:
   In einer Urne liegen $4k$, $k \in \mathbb{N}$, gleichartige Kugeln, von denen jeweils k Kugeln einen der Buchstaben E, U, R oder O als Aufschrift tragen. Ein Teilnehmer an der Tombola zieht vier Kugeln ohne Zurücklegen. Er erhält einen Preis, wenn er aus seinen Buchstaben das Wort EURO bilden kann.

   a) Berechnen Sie für $k = 5$ die Wahrscheinlichkeit, dass er einen Preis gewinnt.

   b) Wie groß ist in Abhängigkeit von k die Wahrscheinlichkeit $p(k)$, dass er einen Preis gewinnt? Bestimmen Sie den Grenzwert von $p(k)$ für $k \to \infty$.

   c) Erläutern Sie in Worten, warum der Grenzwert aus Teilaufgabe 2b) mit dem Ergebnis für $P(E_3)$ aus Teilaufgabe 1a) übereinstimmt.

Tombola-Aufgabe   Abiturprüfung LK Bayern 2000   Lösungen

Die Schüler der K13 des Graf-Felix-Gymnasiums wollen beim Herbstfest eine Tombola zum Thema „EURO“ veranstalten. Dazu werden die folgenden zwei Vorschläge diskutiert.

1. Vorschlag I:
   Auf einem Glücksrad sind vier gleich große Sektoren mit den Buchstaben E, U, R und O markiert. Nach jeder Drehung wird der angezeigte Buchstabe notiert.

   a) Das Glücksrad wird als ideal vorausgesetzt.
   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

   E_1 = „Bei den ersten vier Drehungen wird genau ein E notiert“, $P^4_{0,25}(X=1) = 42{,}2\,\%$

   E_2 = „Spätestens bei der vierten Drehung wird erstmals ein E notiert“, $P^4_{0,25}(X \geq 1) = 68{,}4\,\%$

   E_3 = „Bei den ersten vier Drehungen werden vier verschiedene Buchstaben notiert“,
   $1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} = 9{,}4\,\%$

   E_4 = „Nach fünf Drehungen kann man aus den notierten Buchstaben unter Weglassen eines Buchstabens das Wort EURO bilden“. [Ergebnis: $P(E_4) = \frac{15}{64}$]

   EEURO, EUURO, EURRO, EUROO $\quad \dfrac{\frac{5!}{2} \cdot 4}{4^5}$

   b) Ein Spiel besteht aus fünfmaligem Drehen des idealen Glücksrads. Kann man aus den notierten Buchstaben unter Weglassen eines Buchstabens das Wort EURO bilden, gewinnt man einen Preis. Bestimmen Sie mithilfe der Tschebyschow-Ungleichung ein möglichst kleines Intervall, in dem die Zahl der zu vergebenden Preise mit mindestens 90 % Wahrscheinlichkeit liegt, wenn 640 Spiele ausgeführt werden.

   $$P(|\,X-\mu\,| \leq \alpha) \;\geq\; 1 - \frac{V(X)}{\alpha^2} \;\geq\; 0{,}9,\;\; \mu = 150,\;\; V(X) = 114{,}84 \implies \alpha \geq 33{,}9$$

   $[117, 183]$

   c) Es werden 640 Spiele wie in Teilaufgabe b) ausgeführt. Die Wahrscheinlichkeit, dass die bereitgestellten Preise nicht ausreichen, soll unter 5 % bleiben. Wie viele Preise müssen mindestens bereitgestellt werden, wenn man die Normalverteilung als Näherung zugrunde legt?

   $$P^{640}_{\frac{15}{64}}(Y > k) < 0{,}05 \quad \implies \quad k \geq 168$$

   d) Nach der Inbetriebnahme des Glücksrads ist der Verdacht aufgekommen, dass der Buchstabe E unerwartet oft als Ergebnis auftritt. Die Nullhypothese H_0: „Das Glücksrad liefert den Buchstaben E mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 25 %“ soll durch 200-maliges Drehen des Glücksrads getestet werden. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel für das Signifikanzniveau 5%.

   $P^{200}_{0,25}(Y \geq k) \leq 5\,\% \quad \implies \quad k \geq 61, \quad \overline{A} = \{61, \ldots, 200\}$ (Ablehnungsbereich für die Nullhypothese)

2. Vorschlag II:
   In einer Urne liegen $4k$, $k \in \mathbb{N}$, gleichartige Kugeln, von denen jeweils k Kugeln einen der Buchstaben E, U, R oder O als Aufschrift tragen. Ein Teilnehmer an der Tombola zieht vier Kugeln ohne Zurücklegen. Er erhält einen Preis, wenn er aus seinen Buchstaben das Wort EURO bilden kann.

   a) Berechnen Sie für $k = 5$ die Wahrscheinlichkeit, dass er einen Preis gewinnt. $\dfrac{5^4}{\binom{20}{4}} = 12{,}9\,\%$

   b) Wie groß ist in Abhängigkeit von k die Wahrscheinlichkeit $p(k)$, dass er einen Preis gewinnt? Bestimmen Sie den Grenzwert von $p(k)$ für $k \to \infty$.

   $$\frac{k^4}{\binom{4k}{4}} = \ldots = \frac{k^4 \cdot 4!}{4k(4k-1)(4k-2)(4k-3)} = \ldots = \frac{4!}{4(4-\frac{1}{k})(4-\frac{2}{k})(4-\frac{3}{k})} \implies \lim_{k\to\infty} p(k) = \frac{4!}{4^3}$$

   c) Erläutern Sie in Worten, warum der Grenzwert aus Teilaufgabe 2b) mit dem Ergebnis für $P(E_3)$ aus Teilaufgabe 1a) übereinstimmt.

   Erläuterung: ... (offensichtlich)