Sättigungsmenge-Aufgabe LK Abiturprüfung Baden-Württemberg 1997 *(abgeändert)*

1. Für jedes $a > 0$ ist die Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = \dfrac{ae^x}{a + e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$.
Ihr Graph sei K_a.

   a) Untersuchen Sie K_a auf gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte sowie auf Asymptoten. Zeichnen Sie K_5.
   Auf welcher Kurve liegen die Wendepunkte aller K_a?

   b) Zeigen Sie, dass jede Funktion f_a umkehrbar ist.
   Bestimmen Sie Definitionsmenge, Wertemenge und Funktionsgleichung der Umkehrfunktion.

   c) Die Kurve K_a begrenzt im zweiten Feld zusammen mit den Koordinatenachsen eine nach links offene Fläche. Bestimmen Sie ihren Inhalt.

   d) Zur Zeit $t = 0$ (t in Stunden) wird Salz in ein Reagenzglas mit destilliertem Wasser geschüttet. Ein Teil dieses Salzes löst sich im Laufe der Zeit in der Flüssigkeit auf. Dabei kann die gelöste Salzmenge $m(t)$ einen bestimmten Wert m_0, die Sättigungsmenge, nicht überschreiten.
   Beobachtungen haben gezeigt, dass näherungsweise die Geschwindigkeit, mit der sich $m(t)$ ändert, proportional ist zur Menge des noch lösbaren Salzes.

   Geben Sie eine Differentialgleichung an (Proportionalitätsfaktor 3), die diesen Vorgang beschreibt und bestimmen Sie so eine Funktionsgleichung von $t \to m(t)$.
   Welche Art von Wachstum liegt vor?
   Wie lange dauert es, bis die gelöste Salzmenge halb so groß wie die Sättigungsmenge ist?
   Skizzieren Sie den Graphen von $t \to m(t)$.

Sättigungsmenge-Aufgabe Lösungen

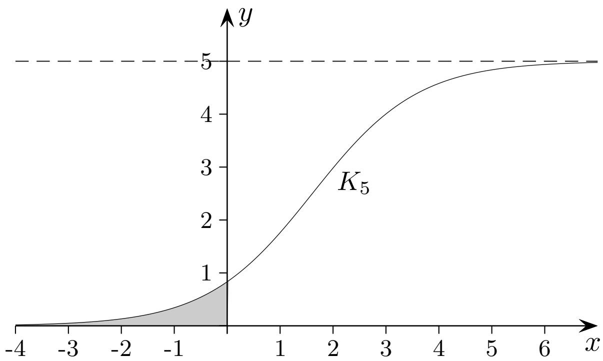
1. a) $f_a'(x) = \dfrac{a^2 e^x}{(a+e^x)^2}$, $\quad f_a''(x) = \dfrac{a^2 e^x (a - e^x)}{(a+e^x)^3}$, keine Nullstellen, $S_a\left(0 \mid \frac{a}{a+1}\right)$

keine Extrema, $W_a\left(\ln a \mid \frac{a}{2}\right)$, f_a'' wechselt an der Stelle $x = \ln a$ das Vorzeichen.

Asymptoten: $y = a$, da $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ae^x}{a+e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a}{ae^{-x}+1} = a$

$y = 0$, da $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{ae^x}{a+e^x} = 0$

Ortskurve der Wendepunkte: $y = \frac{1}{2} e^x$



b) f_a ist streng monoton wachsend, da gilt: $f_a'(x) > 0$ für $x \in \mathbb{R}$.

$f_a^{-1}(x) = \ln \dfrac{ax}{a-x}$, $\quad D_{f_a^{-1}} =]0;\, a[$, $\quad W_{f_a^{-1}} = \mathbb{R}$

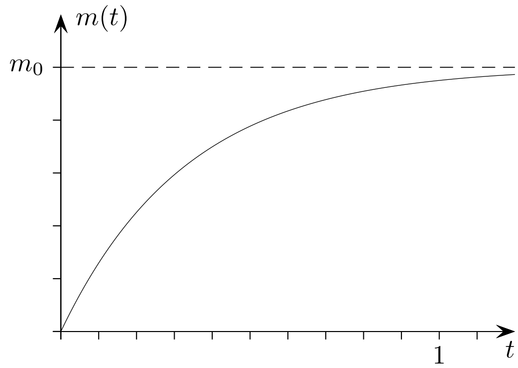
c) $A(z) = \displaystyle\int_z^0 \frac{ae^x}{a+e^x}\,dx = a \cdot \int_z^0 \frac{e^x}{a+e^x}\,dx = a \cdot \Big[\ln(a+e^x)\Big]_z^0$

beachte: $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln(u(x)) + C$

$= a \cdot \ln(a+1) - a \cdot \ln(a+e^z)$

$A = \lim\limits_{z\to-\infty} A(z) = a\cdot\ln(a+1) - a\cdot\ln a = a \cdot \ln \dfrac{a+1}{a}$

d) begrenztes Wachstum: $m'(t) = 3\cdot(m_0 - m(t)) \implies m(t) = m_0 - m_0 e^{-3t}$



$T = -\dfrac{1}{3} \ln \dfrac{1}{2} = 0{,}23$ (Stunden)

2. Gegeben sind die Funktionen f und g durch

$$f(x) = \frac{2}{1+e^{x}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{2}{1+e^{1-x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ihre Graphen seien K_f und K_g.

a) Ermitteln Sie die Asymptoten und den Wendepunkt von K_f.
Untersuchen Sie f auf Monotonie und geben Sie den Wertebereich von f an.
Zeichnen Sie K_f samt Asymptoten.

b) K_g entsteht aus K_f durch Spiegelung an der Geraden $x = \frac{1}{2}$.
Begründen Sie diesen Sachverhalt.
Skizzieren Sie K_g in das Koordinatensystem von Teilaufgabe a).
Geben Sie den Wertebereich und das Monotonieverhalten von g sowie den Wendepunkt von K_g an.

c) Weisen Sie nach, dass die Funktion g die Differenzialgleichung

$$g'(x) = \frac{1}{2}\, g(x) \cdot [2 - g(x)]$$

erfüllt.
Welche Form von Wachstum wird demzufolge von g beschrieben?
Geben Sie charakteristische Eigenschaften dieser Wachstumsform an.

d) Die momentane Änderungsrate des Energieverbrauchs $\left(\text{in } 10^8\, \frac{\text{kWh}}{\text{Jahr}}\right)$ eines Landes ab dem Jahr 1990 wird in guter Näherung durch $g(x)$ mit $x \geq 0$ (x in Jahren ab Anfang 1990) beschrieben.
Zu welchem Zeitpunkt erreicht diese momentane Änderungsrate 98 % ihres Sättigungswertes?
In welchem Jahr verlangsamt sich erstmals die Zunahme der momentanen Änderungsrate des Energieverbrauchs?
Berechnen Sie den gesamten Energieverbrauch im Zeitraum von Anfang 1990 bis Ende 2000.

2. a) Asymptoten:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+e^x} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{1+e^x} = 2$$

Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2}\,, \qquad f''(x) = \frac{2e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$$

Wendepunkt:

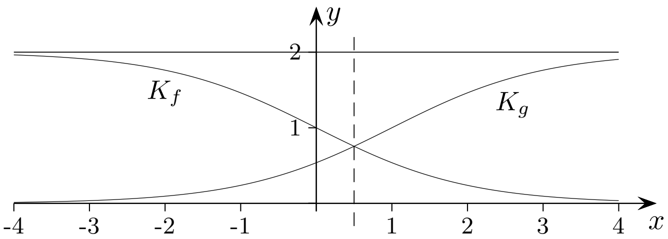
$W(0\,|\,1)$, Vorzeichenwechsel von f'' an der Stelle $x = 0$.

Monotonie von f:

$$f'(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} < 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}\,, \qquad f \text{ streng monoton fallend.}$$

Wertebereich von f:

$W_f =]0;\, 2[$



b) K_g geht aus K_f durch Spiegelung an der y-Achse und Verschiebung um 1 in x-Achsenrichtung hervor. Daraus ergeben sich:

$W_g =]0;\, 2[$

g ist streng monoton wachsend.

Wendepunkt von K_g: $W(1\,|\,1)$

c) $g'(x) = \dfrac{2e^{1-x}}{(1+e^{1-x})^2}\,,$ Nachweis durch Einsetzen

Die Funktion g beschreibt ein logistisches Wachstum, da die Wachstumsgeschwindigkeit $g'(x)$ proportional zum Produkt aus dem Bestand $g(x)$ und dem Sättigungsmanko $2 - g(x)$ ist.

Die Wachstumsfunktion nähert sich asymptotisch an die Sättigungsgrenze an.

Die maximale Wachstumsgeschwindigkeit wird im Wendepunkt erreicht, wenn also der Bestand die Hälfte der Sättigungsgrenze beträgt.

Zu Beginn kann das logistische Wachstum durch exponentielles, gegen Ende durch beschränktes Wachstum angenähert werden.

d) Nach 4,89 Jahren, d. h. gegen Ende des Jahres 1994 ...

Nach einem Jahr, d. h. zu Beginn des Jahres 1991 ...

$$E = \int_0^{11} g(x)\,dx = \int_0^{11} \frac{2}{1+e^{1-x}}\,dx = 2\cdot\int_0^{11} \frac{e^x}{e^x+e}\,dx = 2\cdot\Big[\ln(e^x+e)\Big]_0^{11} = 19{,}4$$

beachte: $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln|\,u(x)\,|$