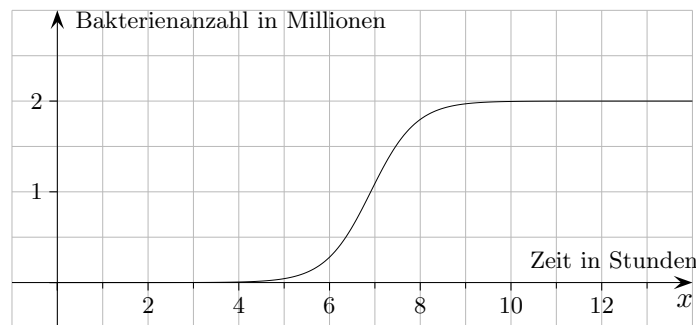


1. Gegeben ist die Schar der Funktionen  $f_k(x) = \frac{k}{1 + e^{-kx}}$  mit  $k \in \mathbb{R}^+$  und Definitionsmenge  $D_k = \mathbb{R}$ .  $G_k$  bezeichnet den Graphen von  $f_k$ .

- a) Untersuchen Sie das Verhalten von  $f_k$  für  $x \rightarrow +\infty$  und  $x \rightarrow -\infty$ .  
 b) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von  $f_k$  und geben Sie die Wertemenge an.

[ mögliches Zwischenergebnis:  $f'_k(x) = \frac{k^2 e^{-kx}}{(1 + e^{-kx})^2}$  ]

- c) Weisen Sie nach, dass der Punkt  $W_k(0 \mid \frac{k}{2})$  der einzige Wendepunkt von  $G_k$  ist.  
 d) Weisen Sie nach, dass für alle  $k \in \mathbb{R}^+$  und alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  $f_k(-x) + f_k(x) = k$ . Begründen Sie damit die Symmetrie von  $G_k$  zum Punkt  $W_k$ .  
 e) Die beiden Koordinatenachsen und  $G_k$  begrenzen im zweiten Quadranten ein sich ins Unendliche erstreckendes Flächenstück. Veranschaulichen Sie dieses Flächenstück in einer Skizze. Zeigen Sie, dass das Flächenstück den endlichen Inhalt  $\ln 2$  besitzt.  
 (Hinweis: Für die Integration ist es hilfreich, den Funktionsterm mit  $e^{kx}$  zu erweitern.)



2. Bei vielen Wachstumsvorgängen ist kein unbeschränktes Wachstum möglich. Dies gilt z.B. auch für eine Bakterienkultur, deren Bakterienzahl schließlich einer oberen Grenze entgegenstrebt. Die Zahl der Bakterien einer Kultur wird näherungsweise durch die Funktion  $N$  mit

$$N(x) = 10^6 \cdot \frac{2}{1 + e^{-2(x-6,908)}}, \quad x \geq 0, \text{ beschrieben.}$$

Dabei gibt  $x$  die Zeit in Stunden an, die seit dem Ansetzen der Bakterienkultur vergangen ist. Die Abbildung zeigt den Graphen von  $N$ .

- a) Geben Sie an, wie der Graph von  $N$  aus  $G_2$  der Aufgabe 1 entsteht.  
 b) Mit wie vielen Bakterien wurde die Kultur angesetzt, wie viele Bakterien sind es nach zwei Stunden?  
 c) Berechnen Sie, nach welcher Zeit 90% des Grenzbestandes von 2 Millionen Bakterien erreicht sind.  
 d) Schätzen Sie rechnerisch ab, wie viele Bakterien in der Minute stärksten Wachstums hinzukommen.

# Bakterienkultur-Aufgabe LK Abiturprüfung Bayern 2006 Lösungshinweise

1. Gegeben ist die Schar der Funktionen  $f_k(x) = \frac{k}{1 + e^{-kx}}$  mit  $k \in \mathbb{R}^+$  und Definitionsmenge  $D_k = \mathbb{R}$ .  $G_k$  bezeichnet den Graphen von  $f_k$ .

- a) Untersuchen Sie das Verhalten von  $f_k$  für  $x \rightarrow +\infty$  und  $x \rightarrow -\infty$ .  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = k$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = 0$   
 b) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von  $f_k$  und geben Sie die Wertemenge an.

[ mögliches Zwischenergebnis:  $f'_k(x) = \frac{k^2 e^{-kx}}{(1 + e^{-kx})^2}$  ]

$f_k$  ist streng monoton wachsend, da gilt:  $f'_k(x) > 0$  für  $x \in \mathbb{R}$ ,  $W_{f_k} = ]0; k[$

- c) Weisen Sie nach, dass der Punkt  $W_k(0 \mid \frac{k}{2})$  der einzige Wendepunkt von  $G_k$  ist.

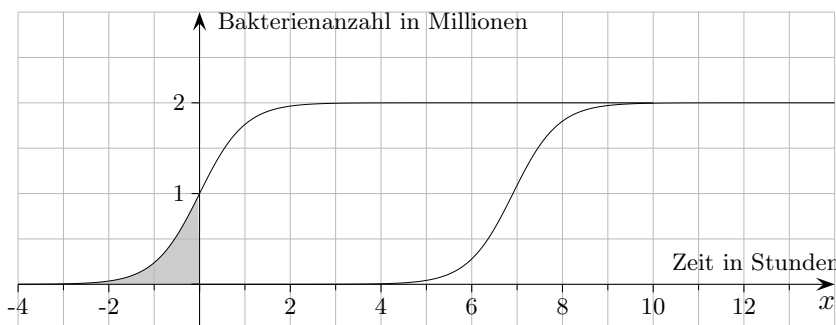
$$f''_k(x) = \frac{k^3 e^{-kx} (e^{-kx} - 1)}{(1 + e^{-kx})^3}, \text{ notw. Bed. } f''_k(x) = 0, \text{ Existenz folgt aus dem Vorigen.}$$

- d) Weisen Sie nach, dass für alle  $k \in \mathbb{R}^+$  und alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  $f_k(-x) + f_k(x) = k$ .  
 Begründen Sie damit die Symmetrie von  $G_k$  zum Punkt  $W_k$ .

beachte:  $\frac{1}{1 + e^{-kx}} = \frac{e^{kx}}{1 + e^{kx}}$ , Symmetriebedingung:  $f_k(x) - \frac{k}{2} = \frac{k}{2} - f_k(-x)$

- e) Die beiden Koordinatenachsen und  $G_k$  begrenzen im zweiten Quadranten ein sich ins Unendliche erstreckendes Flächenstück. Veranschaulichen Sie dieses Flächenstück in einer Skizze. Zeigen Sie, dass das Flächenstück den endlichen Inhalt  $\ln 2$  besitzt.

(Hinweis: Für die Integration ist es hilfreich, den Funktionsterm mit  $e^{kx}$  zu erweitern.)



$$\int_{-\infty}^0 \frac{k}{1 + e^{-kx}} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{k e^{kx}}{1 + e^{kx}} dx = \left[ \ln(1 + e^{kx}) \right]_{-\infty}^0 = \ln 2$$

2. Bei vielen Wachstumsvorgängen ist kein unbeschränktes Wachstum möglich. Dies gilt z.B. auch für eine Bakterienkultur, deren Bakterienzahl schließlich einer oberen Grenze entgegenstrebt. Die Zahl der Bakterien einer Kultur wird näherungsweise durch die Funktion  $N$  mit

$$N(x) = 10^6 \cdot \frac{2}{1 + e^{-2(x-6,908)}}, \quad x \geq 0, \text{ beschrieben.}$$

Dabei gibt  $x$  die Zeit in Stunden an, die seit dem Ansetzen der Bakterienkultur vergangen ist. Die Abbildung zeigt den Graphen von  $N$ .

- a) Geben Sie an, wie der Graph von  $N$  aus  $G_2$  der Aufgabe 1 entsteht. in  $x$ -Richtung um 6,908 verschoben,  
in  $y$ -Richtung um  $10^6$  gestreckt  
 b) Mit wie vielen Bakterien wurde die Kultur angesetzt, wie viele Bakterien sind es nach zwei Stunden? 2; 109  
 c) Berechnen Sie, nach welcher Zeit 90% des Grenzbestandes von 2 Millionen Bakterien erreicht sind. 8,0 Stunden  
 d) Schätzen Sie rechnerisch ab, wie viele Bakterien in der Minute stärksten Wachstums hinzukommen.  $N'(6,908) \cdot \frac{1}{60} = 16667$  oder  $N(6,908 + \frac{1}{60}) - N(6,908) = 16665$