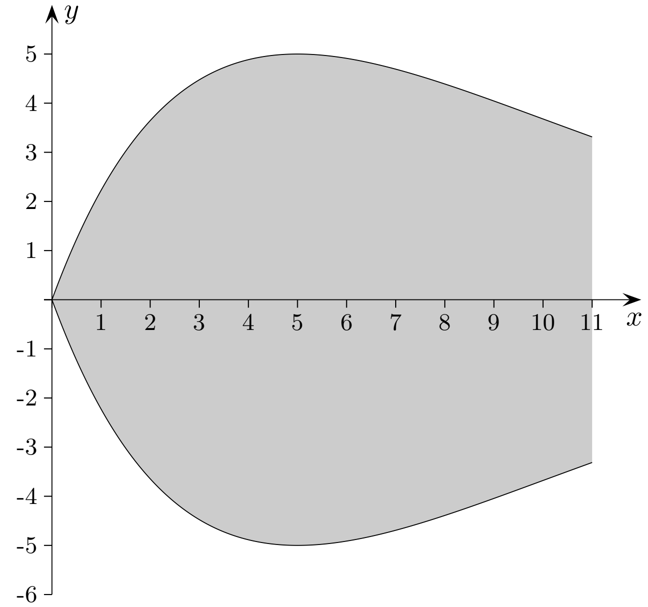
Bierglas-Aufgabe   LK Abiturprüfung Mecklenburg-Vorpommern 2005

Die Abbildung zeigt den Längsschnitt eines Bierglases.
Die obere Begrenzung der Fläche kann im 1. Quadranten durch Funktionen

$$f_a(x) = x \cdot e^{1-ax} \quad \text{mit } a > 0, \ \ 0 \le x \le 11$$

beschrieben werden.
Die Graphen von f_a sind G_a. Die Wandstärke des Glases wird vernachlässigt.
Alle Längenangaben erfolgen in *cm*.



1. Ermitteln Sie den maximalen Durchmesser des Glases sowie die Koordinaten des Wendepunktes von G_a jeweils in Abhängigkeit von a. (Auf den Nachweis der Existenz des Wendepunktes wird verzichtet.) Berechnen Sie, für welchen Wert von a der Durchmesser der oberen Öffnung des Glases $8\,cm$ ist.

2. Im Folgenden wird das spezielle Bierglas für $a = 0{,}2$ betrachtet.

   a) Geben Sie die Koordinaten des Extrem- und des Wendepunktes von $G_{0,2}$ an. Stellen Sie den Graphen $G_{0,2}$ für $0 \le x \le 11$ in einem Koordinatensystem dar. Ermitteln Sie eine Stammfunktion von $f_{0,2}$. Berechnen Sie den Inhalt der Schnittfläche (siehe Abbildung).

   b) Durch Füllen des Bierglases wurde festgestellt, dass es ein Fassungsvermögen von $V = 591\ ml$ besitzt. Mit $N(h) = -0{,}73 \cdot h^3 + 13 \cdot h^2 + h,\ 0 \le h \le 11$ ist eine Näherungsformel für die Berechnung des Volumens in Abhängigkeit von der Füllhöhe h gegeben. Berechnen Sie die prozentuale Abweichung von $N(11)$ gegenüber V. Ermitteln Sie mit Hilfe der Näherungsformel, in welcher Höhe h das Bierglas halb voll ist (Genauigkeit: eine Stelle nach dem Komma).

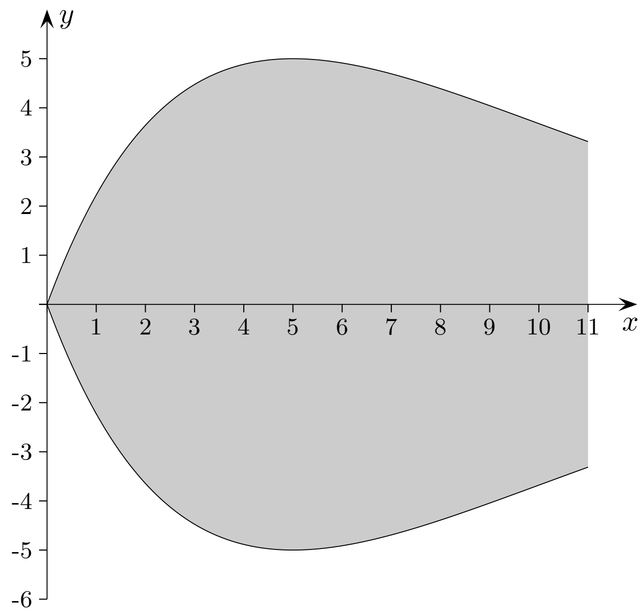
3. Der Abbau des Bierschaums kurz nach dem Einschenken kann durch die Funktion S mit der Gleichung $S(t) = S(0) \cdot e^{kt}$, t in Minuten, $k \in \mathbb{R}$, beschrieben werden. $S(t)$ ist die zum Zeitpunkt t vorhandene Schaummenge. Für die Abnahme des Schaums soll gelten: $\dfrac{S'(t)}{S(t)} = \ln 0{,}631$. Berechnen Sie, nach welcher Zeit weniger als $10\,\%$ des ursprünglichen Schaums vorhanden sind.

In Mecklenburg-Vorpommern scheinen die Biergläser sehr bauchig zu sein.
Der Term für $S(t)$ ist irreführend, besser wäre $S(t) = S(0) \cdot e^{-kt}$.

Die Abbildung zeigt den Längsschnitt eines Bierglases.
Die obere Begrenzung der Fläche kann im 1. Quadranten durch Funktionen

$$f_a(x) = x \cdot e^{1-ax} \quad \text{mit } a > 0, \quad 0 \leq x \leq 11$$

beschrieben werden.
Die Graphen von f_a sind G_a. Die Wandstärke des Glases wird vernachlässigt.
Alle Längenangaben erfolgen in cm.



1. Ermitteln Sie den maximalen Durchmesser des Glases sowie die Koordinaten des Wendepunktes von G_a jeweils in Abhängigkeit von a. (Auf den Nachweis der Existenz des Wendepunktes wird verzichtet.) Berechnen Sie, für welchen Wert von a der Durchmesser der oberen Öffnung des Glases $8\,cm$ ist.

   $$Max\left(\frac{1}{a} \mid \frac{1}{a}\right), \quad d_{max} = \frac{2}{a}, \quad W\left(\frac{2}{a} \mid \frac{2}{a \cdot e}\right), \quad a = 0{,}183$$

2. Im Folgenden wird das spezielle Bierglas für $a = 0{,}2$ betrachtet.

   a) Geben Sie die Koordinaten des Extrem- und des Wendepunktes von $G_{0,2}$ an. Stellen Sie den Graphen $G_{0,2}$ für $0 \leq x \leq 11$ in einem Koordinatensystem dar. Ermitteln Sie eine Stammfunktion von $f_{0,2}$. Berechnen Sie den Inhalt der Schnittfläche (siehe Abbildung).

   $$E(5 \mid 5), \quad W(10 \mid 3{,}68)$$
   $$F(x) = e^{1-0{,}2x} \cdot (-5x - 25)$$
   $$A = 87{,}7$$

   b) Durch Füllen des Bierglases wurde festgestellt, dass es ein Fassungsvermögen von $V = 591\ ml$ besitzt. Mit $N(h) = -0{,}73 \cdot h^3 + 13 \cdot h^2 + h$, $0 \leq h \leq 11$ ist eine Näherungsformel für die Berechnung des Volumens in Abhängigkeit von der Füllhöhe h gegeben. Berechnen Sie die prozentuale Abweichung von $N(11)$ gegenüber V. Ermitteln Sie mit Hilfe der Näherungsformel, in welcher Höhe h das Bierglas halb voll ist (Genauigkeit: eine Stelle nach dem Komma).

   $$3{,}6\,\%, \quad h = 5{,}7$$

3. Der Abbau des Bierschaums kurz nach dem Einschenken kann durch die Funktion S mit der Gleichung $S(t) = S(0) \cdot e^{kt}$, t in Minuten, $k \in \mathbb{R}$, beschrieben werden. $S(t)$ ist die zum Zeitpunkt t vorhandene Schaummenge. Für die Abnahme des Schaums soll gelten: $\frac{S'(t)}{S(t)} = \ln 0{,}631$. Berechnen Sie, nach welcher Zeit weniger als 10 % des ursprünglichen Schaums vorhanden sind.

   $$k = \ln 0{,}631 \text{ (negativ)}, \quad 0{,}631^t = 0{,}1 \implies t = 5{,}0$$