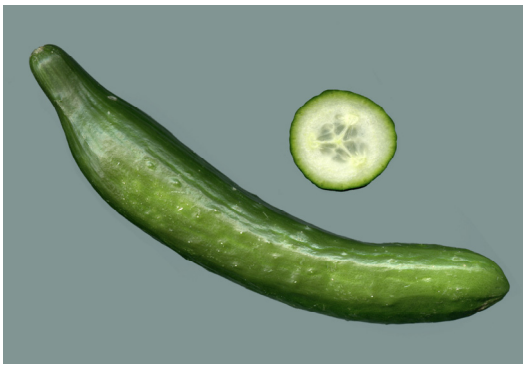
Analysis 1

I.1 Gurkenvermarktung



Der große Lebensmittelkonzern AKEDE bot in seinen Geschäften vor der EHEC-Epidemie im Frühjahr 2011 Salatgurken zu einem Preis von 0,50 € pro Stück an. Der Konzern zahlt den liefernden Landwirten 0,25 € pro Salatgurke.

Landwirt Kleinschmidt baut Salatgurken für AKEDE an. Er hat Fixkosten für die Salatgurkenproduktion in Höhe von 100 € pro Tag. Wenn er 10 Kisten Salatgurken pro Tag liefert, dann hat er tägliche Gesamtkosten von 250 €. Bei täglich 30 Kisten Salatgurken betragen diese 600 €. Bei einer Produktionsmenge von 10 Kisten Salatgurken pro Tag liegt die geringste Kostensteigerung vor. Eine Kiste enthält 5 Kartons zu jeweils 20 Salatgurken.

Landwirt Kleinschmidt interessiert sich zunächst für seinen Erlös E und seine Kosten K.

Hinweis: Im Folgenden steht die Variable x für die tägliche Produktionsmenge an Kisten mit jeweils 100 Salatgurken.

a)
- Geben Sie die Gleichung der Erlösfunktion E an.
- Skizzieren Sie den Graphen der Funktion E in das Koordinatensystem in der Anlage. (10P)

b) Ermitteln Sie die Gleichung der Kostenfunktion K als ganzrationale Funktion 3. Grades. (15P)

Zur Kontrolle: $K(x)=\frac{1}{120}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{50}{3}x+100$

c)
- Skizzieren Sie den Graphen der Kostenfunktion K in das Koordinatensystem in der Anlage.
- Beschreiben Sie die typischen Eigenschaften der Graphen von Kostenfunktionen 3. Grades im wirtschaftlichen Kontext. (10P)

Landwirt Kleinschmidt macht sich große Sorgen darüber, ob er seinen Hof langfristig wirtschaftlich betreiben kann. Aus diesem Grund lässt er seine Gewinnsituation untersuchen.

d)
- Bestätigen Sie:
  Die Gleichung der Gewinnfunktion G lautet $G(x)=-\frac{1}{120}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{25}{3}x-100$.
- Bestätigen Sie, dass sich die Gewinnschwelle bei einer Produktionsmenge von 10 Kisten Salatgurken pro Tag befindet.
- Bestimmen Sie rechnerisch die Gewinngrenze. (20P)

e) Berechnen Sie die Produktionsmenge, bei der Landwirt Kleinschmidt den maximalen Gewinn erzielt, und geben Sie den größtmöglichen Gewinn an. (15P)

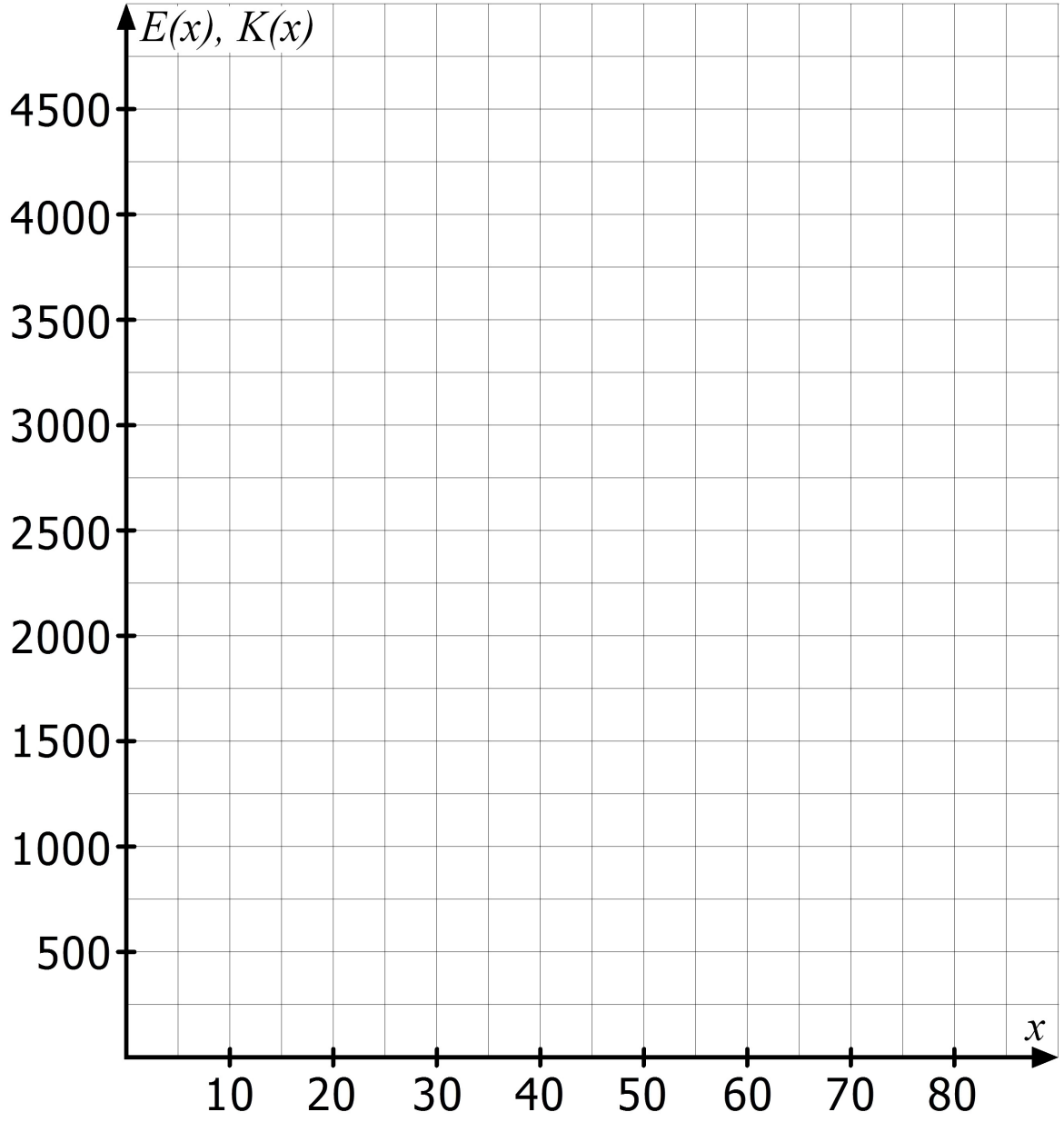
Im Frühjahr 2011 kam es zu einer Vielzahl an EHEC-Infektionen. Die Gesundheitsbehörden warnten in dieser Zeit eindringlich vor dem Verzehr von rohen Tomaten, Gurken, Salat und Sojasprossen. Um dennoch möglichst viele der gelieferten Salatgurken abzusetzen, beschloss das Unternehmen AKEDE einige Tage später, den Preis zu senken und auch den Landwirten wie Herrn Kleinschmidt nur noch 15 € pro Kiste zu zahlen. Da er in dieser kurzfristigen Krisensituation weitere Preissenkungen befürchtet, möchte er wissen, welcher Preis zur Deckung seiner minimalen variablen Stückkosten erforderlich ist.

f)
- Ermitteln Sie die kurzfristige Preisuntergrenze pro Kiste für den Landwirt Kleinschmidt.
- Begründen Sie, dass er seine Gurken langfristig nicht zu dem beschlossenen neuen Preis von 15 € pro Kiste verkaufen kann.
- Beurteilen Sie die wirtschaftliche Situation des Landwirtes Kleinschmidt, wenn AKEDE ihm weniger als die kurzfristige Preisuntergrenze pro Kiste bezahlt. (20P)

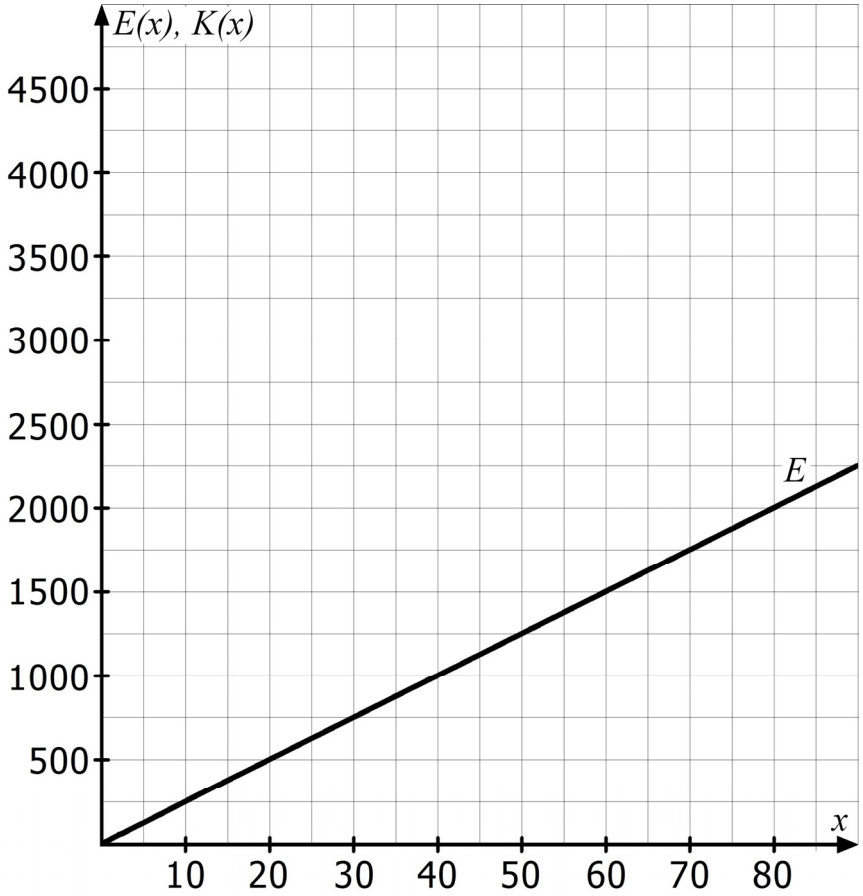
Vor der Epidemie wurden in der AKEDE-Filiale in Husstadt täglich 500 Salatgurken verkauft. Nach Beginn der Erkrankungen und vor der Preissenkung setzte die Filiale 70 % weniger ab.

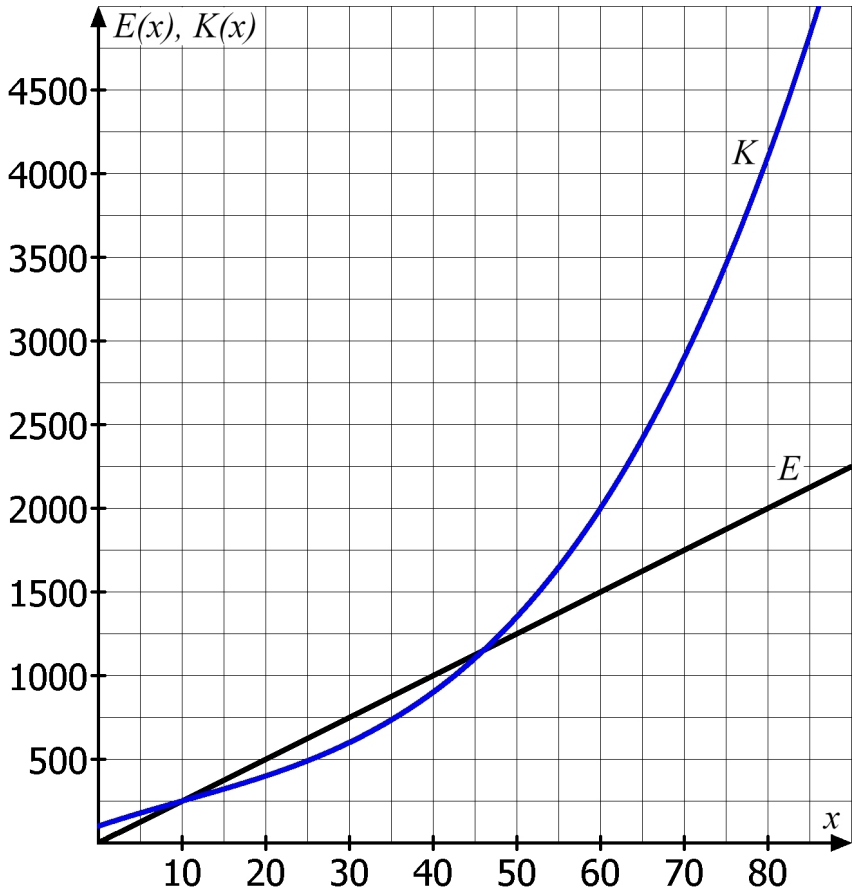
g) AKEDE verkaufte die Salatgurken nach der Preissenkung in seinen Geschäften zu einem Preis von 0,20 €.
- Ermitteln Sie, wie viele Salatgurken die Filiale in Husstadt nach der Preissenkung mindestens täglich verkaufen müsste, damit die Preissenkung nicht zu einer weiteren Reduzierung des Erlöses für AKEDE führt.
- Beurteilen Sie, ob das Ziel einer Steigerung des Erlöses mittels der beschriebenen Preissenkung in der Krisensituation realistisch ist. (10P)

Anlage zur Aufgabe „Gurkenvermarktung“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	• $E(x) = 25x$ • Graphische Darstellung:  	10		
b)	$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $K''(x) = 6ax + 2b$ Bedingungen: $I.\quad K(0) = 100$ $II.\quad K(10) = 250$ $III.\quad K(30) = 600$ $IV.\quad K''(10) = 0$ Durch Einsetzen gelangt man zu dem linearen Gleichungssystem, das dann wie folgt gelöst wird:			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	$I.\quad 0\cdot a+0\cdot b+0\cdot c+d=100;\ d=100$ $II.\quad 1000a+100b+10c+100=250$ $III.\quad 27000a+900b+30c+100=600$ $IV.\quad 60a+2b=0;\quad b=-30a$ $III.\ 27000a-27000a+30c=500$ $c=\frac{500}{30}=\frac{50}{3}$ $II.\quad 1000a-3000a+\frac{500}{3}=150;\quad -2000a=-\frac{50}{3}\ ;\ a=\frac{1}{120}$ $IV.\ b=-\frac{1}{4}$ $K(x)=\frac{1}{120}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{50}{3}x+100$		10	5
c)	• Graphische Darstellung:  			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	• Typische Eigenschaften der Graphen von Kostenfunktionen 3. Grades: Mit zunehmender Produktionsmenge steigen die gesamten Kosten. Selbst wenn ein Unternehmen nicht produziert ($x = 0$), entstehen Kosten. Diese werden als Fixkosten bezeichnet. Bis zur Wendestelle, d. h. bis zu der Produktionsmenge, bei der der Kostenanstieg am geringsten ist, ist der Kostenanstieg abnehmend, danach zunehmend. *Jede andere sinnvolle Antwort ist als richtig zu bewerten.*	5	5	
d)	• Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x)$ $G(x) = 25x - (\frac{1}{120}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{50}{3}x + 100)$ $G(x) = 25x - \frac{1}{120}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{50}{3}x - 100$ $G(x) = -\frac{1}{120}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{25}{3}x - 100$ • Nachweis der Gewinnschwelle bei $x = 10$: $G(10) = -\frac{1}{120} \cdot 1000 + \frac{1}{4} \cdot 100 + \frac{25}{3} \cdot 10 - 100 = 0$ Aufgrund des Verlaufs der Graphen von E und von K ist es ausgeschlossen, dass bei $x = 10$ die Gewinngrenze liegt. • Berechnung der Gewinngrenze: Ansatz: $G(x) = 0$ Zur Berechnung der Gewinngrenze sind neben der gegebenen Nullstelle (Gewinnschwelle) weitere Nullstellen von G gesucht. Zerlegung mit dem Horner-Schema:			

	$-\frac{1}{120}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{25}{3}$	-100
	0	$-\frac{1}{12}$	$\frac{5}{3}$	100
$x_1 = 10$	$-\frac{1}{120}$	$\frac{1}{6}$	10	0

$$G(x) = (x - 10) \cdot \left(-\frac{1}{120}x^2 + \frac{1}{6}x + 10 \right)$$

Diese Faktorzerlegung kann man auch durch Polynomdivision erhalten.

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	$-\frac{1}{120}x^2+\frac{1}{6}x+10=0$ $x^2-20x-1200=0$ $x_{2,3}=10\pm\sqrt{100+1200}$ $x_2\approx 46{,}06$ $x_3\approx -26{,}06$ (liegt außerhalb des ökonomisch sinnvollen Bereichs) Die Gewinngrenze liegt bei ungefähr 46 Gurkenkisten pro Tag.		20	
e)	$G'(x)=-\frac{1}{40}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{25}{3}=0$ $x^2-20x-\frac{1000}{3}=0$ $x_{1,2}=10\pm\sqrt{100+\frac{1000}{3}}$ $x_{1,2}\approx 10\pm 20{,}82$ $(x_1\approx -10{,}82;\ \textit{nicht die gesuchte Lösung})$ $x_2\approx 30{,}82$ Überprüfung: $G''(x)=-\frac{1}{20}x+\frac{1}{2}$ $G''(30{,}82)=-1{,}041<0$ *Alternativ könnte mit dem Verlauf der Graphen oder mit dem Sachkontext argumentiert werden.* Somit ist gezeigt, dass bei einer täglichen Produktionsmenge von ungefähr 31 Gurkenkisten der Gewinn maximal ist. $G(30{,}82)\approx 150{,}34$ *oder* $G(31)\approx 150{,}33$ Der maximale Gewinn beträgt etwa 150,34 € pro Tag.	15		
f)	• Gesucht ist das Minimum der variablen Stückkostenfunktion: $k_{\text{var}}(x)=\frac{K_{\text{var}}(x)}{x}=\frac{\frac{1}{120}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{50}{3}x}{x}=\frac{1}{120}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{50}{3}$ $k'_{\text{var}}(x)=\frac{1}{60}x-\frac{1}{4}=0$ $x=15$			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Überprüfung: $k''(15) = \frac{1}{60} > 0$ $k_{\text{var}}(15) = \frac{1}{120} \cdot 15^2 - \frac{1}{4} \cdot 15 + \frac{50}{3} \approx 14{,}79\,[€]$ Die kurzfristige Preisuntergrenze des Landwirtes Kleinschmidt liegt bei 14,79 € pro Kiste. • Langfristig kann Bauer Kleinschmidt seine Gurken nicht zu einem Preis von 15 € pro Kiste verkaufen, da bei diesem Preis nur die variablen Kosten (und ein kleiner Teil der Fixkosten) gedeckt sind. Er ist aus wirtschaftlichen Gründen langfristig darauf angewiesen, dass die Gesamtkosten gedeckt werden, also auch die kompletten Fixkosten. • Sofern die kurzfristige Preisuntergrenze unterschritten ist, werden nicht einmal die variablen Kosten komplett gedeckt. Damit ist die Produktion auch kurzfristig nicht wirtschaftlich.		10	10
g)	• Nach Beginn der Epidemie und vor der Preissenkung wurden in dieser Filiale täglich (30 % von 500 =) 150 Salatgurken verkauft. Dies erbrachte einen Erlös von (150·0,50 € =) 75 €. Um nach der Preissenkung den gleichen Erlös zu erzielen, müssen täglich mindestens (75:0,2 =) 375 Salatgurken verkauft werden. • Das Ziel einer Erlössteigerung ist nicht realistisch, da während einer Epidemie für viele Kunden nicht der Preis das für das Kaufverhalten ausschlaggebende Kriterium ist und diese Preissenkung lediglich zu einer geringfügigen Steigerung des Absatzes führen dürfte. (*Die Nachfrage reagiert weitgehend unelastisch auf Preissenkungen.*)		5	5
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

Analysis 2

I.2 Impfstoff

Es werden immer wieder neue Impfstoffe benötigt, die helfen sollen, Infektionen mit neuen (mutierten) Keimen einzudämmen. Die Teile a) bis e) beziehen sich auf einen speziellen Impfstoff gegen einen ansteckenden Hautausschlag.

Die Funktion v beschreibt in guter Näherung die Absatzmenge des Impfstoffs in Produktionseinheiten von 100 000 Ampullen in Abhängigkeit von der Zeit t (in Monaten) während der ersten 15 Monate nach der Zulassung für die Anwendung bei Menschen.

$$v(t) = 8 \cdot t \cdot e^{-0,4t}$$

Die Graphik in der Anlage zeigt den Graphen von v. Wenn ein Impfstoff neu auf dem Markt ist, muss die Produktionsfirma unbedingt lieferfähig sein. Andererseits ist die Produktion teuer und die Ware nur sehr begrenzt lagerfähig. Es muss also aus Kostengründen sorgfältig geplant werden.
Von besonderem Interesse sind dabei Zeitpunkt und Größenordnung von Produktionsspitzen, weil sie möglicherweise Sonderschichten oder die Einstellung von Leiharbeitern erforderlich machen.

a)
- Bestätigen Sie: $v'(t) = 8 \cdot e^{-0,4t} \cdot (1 - 0,4t)$
- Berechnen Sie den Zeitpunkt des maximalen Absatzes und den maximalen Absatz. (20P)

  Hinweis: Sie können voraussetzen, dass der Absatz tatsächlich ein Maximum annimmt.

b) Wenn der Absatz stark zurückgeht, lassen sich die Kosten am besten reduzieren, wenn rechtzeitig eine Produktionslinie vollständig abgeschaltet wird.

Bestimmen Sie den Zeitpunkt der stärksten Abnahme des Absatzes. (20P)

c) Der durchschnittliche monatliche Absatz, den die Einkaufsabteilung für die Materialplanung benötigt, kann mit einer Stammfunktion V von v ermittelt werden.

Zeigen Sie, dass die Funktion V mit $V(t) = 10 \cdot (5 - 5e^{-0,4t} - 2te^{-0,4t})$ eine Stammfunktion von v ist, und ermitteln Sie den durchschnittlichen monatlichen Absatz während der ersten sieben Verkaufsmonate. (20P)

d) Berechnen Sie näherungsweise auf einen vollen Monat gerundet die Zeit, in der von der erwarteten Gesamtabsatzmenge von 50 Produktionseinheiten 70 % verkauft sind. (10P)

Hinweis: Verwenden Sie direkt die in Teil c) *gegebene Stammfunktion V.*

e) Während der ersten sieben Monate wird ein Verkaufspreis von 5 Millionen Euro pro Produktionseinheit erzielt. Danach fällt der Verkaufspreis auf 3 Millionen Euro pro Produktionseinheit. Die Rechte für die nach sieben Monaten von 50 Produktionseinheiten noch verbliebene Restabsatzmenge sollen an einen anderen Hersteller verkauft werden.

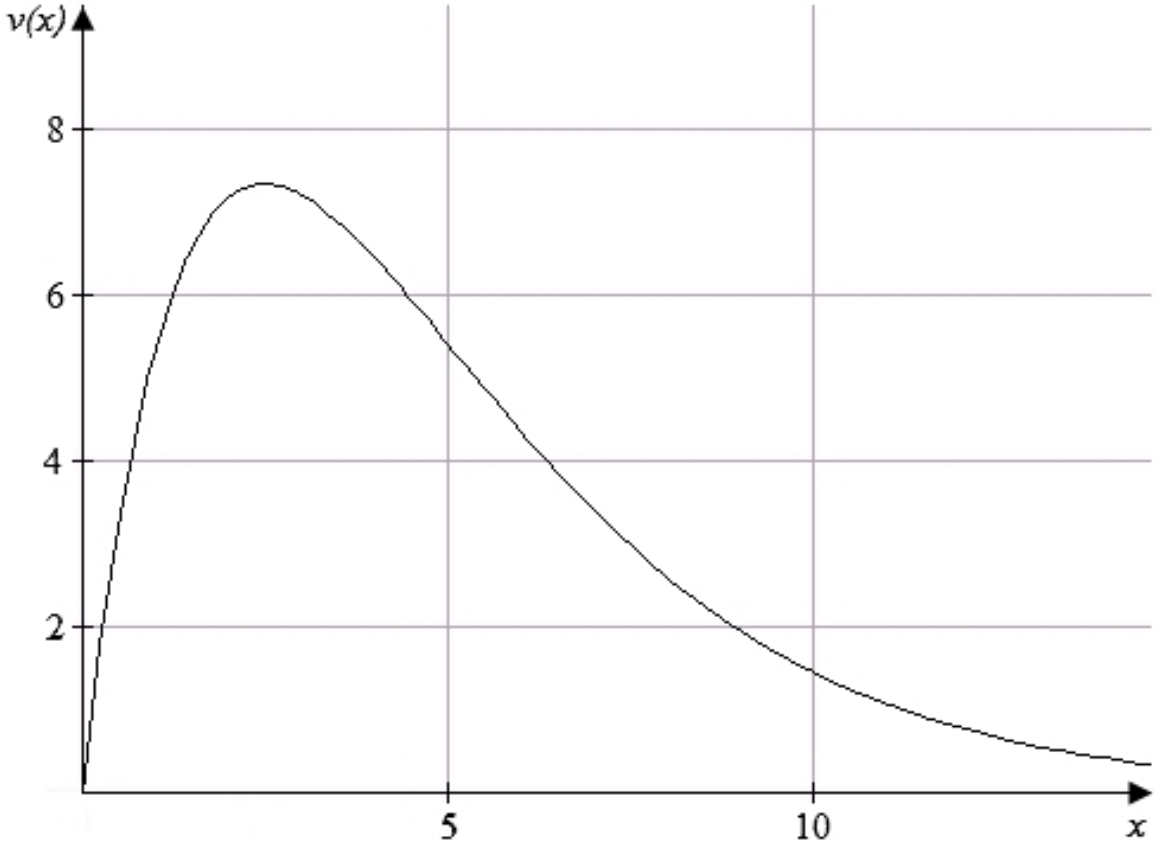
Ermitteln Sie, welcher Erlös für die restliche Absatzmenge zu erwarten ist. (10P)

Die Erfahrung zeigt, dass Impfstoffe jeweils nur eine beschränkte Zeit einsetzbar und verkäuflich sind. Die zeitliche Entwicklung des Absatzes lässt sich näherungsweise durch Funktionen w beschreiben, deren Funktionsterm analog zu dem der oben betrachteten Funktion v aufgebaut ist:

$$w(t) = a \cdot t \cdot e^{-bt} \quad \text{mit } a > 0,\ b > 0$$

f) Bestimmen Sie die Konstanten a und b für einen Impfstoff, bei dem der maximale Absatz nach sechs Monaten mit einer Absatzmenge von 10 Produktionseinheiten erreicht wird. (20P)

Anlage zur Aufgabe „Impfstoff“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	• Anwendung der Kettenregel: $v'(t) = 8 \cdot \left(e^{-0,4t} + t(-0,4)e^{-0,4t}\right) = 8 \cdot e^{-0,4t} \cdot (1 - 0,4t)$ Damit ist bestätigt, dass der angegebene Term richtig ist. • $v'(t) = 0 \Leftrightarrow 8e^{-0,4t} = 0 \vee 1 - 0,4t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{0,4} = 2,5$ $v(2,5) = 8 \cdot 2,5 \cdot e^{-1} = \frac{20}{e} \approx 7,3575888...$ Der maximale Absatz wird nach 2,5 Monaten mit etwa 736.000 Ampullen erreicht.	20		
b)	Gesucht ist eine Minimalstelle der Ableitung von v. $v''(t) = 8 \cdot \left(-0,4 \cdot e^{-0,4t} - 0,4 \cdot \left(e^{-0,4t} + t \cdot (-0,4) \cdot e^{-0,4t}\right)\right)$ $= 8 \cdot 0,4 \cdot \left(-e^{-0,4t} - \left(e^{-0,4t} + t \cdot (-0,4) \cdot e^{-0,4t}\right)\right)$ $= 3,2 \cdot \left(-e^{-0,4t} - e^{-0,4t} - t \cdot (-0,4) \cdot e^{-0,4t}\right)$ $= 3,2 \cdot e^{-0,4t} \cdot (-2 + 0,4t)$ $v''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 5$ Die Ableitung v'' wechselt bei 5 wegen des linearen Terms das Vorzeichen von Minus nach Plus. Also ist bei 5 ein relatives Minimum der Ableitung. *Eine Argumentation mit Bezug auf die gegebene Zeichnung ist auch möglich.* Die stärkste Abnahme des Absatzes findet nach 5 Monaten statt.		20	
c)	$V'(t) = 10 \cdot \left(0 + 2 \cdot e^{-0,4t} - 2 \cdot \left(e^{-0,4t} + t \cdot (-0,4) \cdot e^{-0,4t}\right)\right)$ $= 10 \cdot \left(0,8te^{-0,4t}\right) = 8 \cdot t \cdot e^{-0,4t} = v(t)$ *Hinweis: $V(0) = 0$; V steigt offenbar beginnend mit 0 streng monoton gegen 50 (Gesamtabsatz), denn die Exponentialterme nähern sich 0.* *$V(t)$* ist der Absatz bis zur Zeit t. Der durchschnittliche Absatz beträgt $\frac{1}{7} \cdot \int_0^7 v(t)dt = \frac{1}{7} \cdot [V(t)]_0^7 = \frac{1}{7} \cdot V(7)$ $= \frac{1}{7} \cdot 10 \cdot (5 - 5 \cdot e^{-0,4 \cdot 7} - 2 \cdot 7 \cdot e^{-0,4 \cdot 7}) \approx 5,492298...$ Der durchschnittliche monatliche Absatz in den ersten sieben Monaten beträgt etwa 550.000 Ampullen.		20	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	Gesucht ist t mit $V(t) = 35$. Mit Hilfe einer Wertetabelle, z. B. $V(6) = 34{,}6$ und $V(6{,}2) = 35{,}4$, kann t in der geforderten Genauigkeit bestimmt werden. Nach 6 Monaten sind 70 % der 50 Produktionseinheiten abgesetzt.	10		
e)	Bis zum Ende des 7. Monats sind verkauft V(7) ≈ 38,4 Einheiten. Für die Restabsatzmenge (50 – 38,4 = 11,6 Einheiten) ist ein Preis von 3 Mill. € pro Einheit anzusetzen: 11,6·3 = 34,8 Es sind also (theoretisch) 34,8 Millionen Euro zu erzielen.		10	
f)	Zur Zeit des Produktionsmaximums hat die 1. Ableitung von w eine Nullstelle. $w'(t) = a \cdot (e^{-bt} - bte^{-bt}) = a \cdot e^{-bt} \cdot (1 - bt)$ $w'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{b} \Rightarrow b = \frac{1}{6}$ w' hat wegen des linearen Terms $(1 - bt)$ an der Stelle $t = 6$ einen Vorzeichenwechsel von Plus nach Minus. Die Produktionsmenge erreicht dort also ein Maximum. $w(6) = a \cdot 6 \cdot e^{-1} = 10 \Rightarrow a = \frac{10e}{6} = \frac{5}{3}e \approx 4{,}53$ Die Funktionsgleichung lautet: $w(t) = 4{,}53 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{6}t}$.			20
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

LA/AG 1

II.1 Gartenhaus

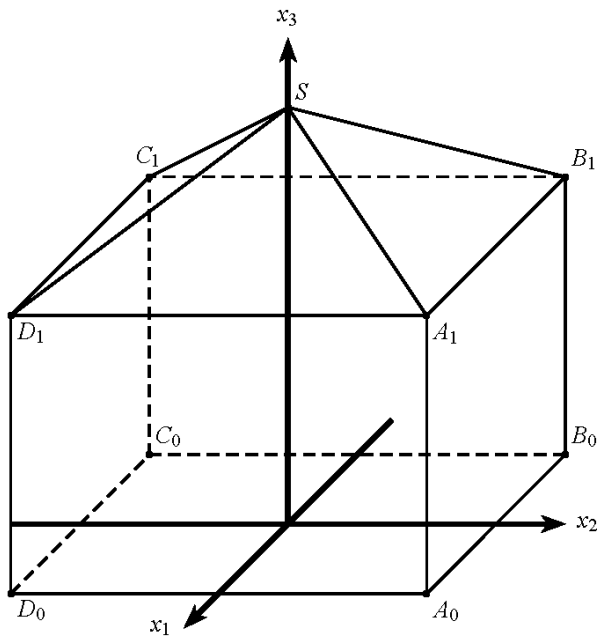
Ein Gartenhaus hat die Form eines Quaders mit quadratischer Grundfläche. Alle folgenden Maße sind in Metern (m) angegeben.

Die Grundfläche hat die Eckpunkte $A_0(2|2|0)$, $B_0(-2|2|0)$, $C_0(-2|-2|0)$ und $D_0(2|-2|0)$.

Die vier Seitenwände haben eine Höhe von 2,20 m, so dass die Decke durch die Eckpunkte $A_1(2|2|2{,}20)$, $B_1(-2|2|2{,}20)$, $C_1(-2|-2|2{,}20)$ und $D_1(2|-2|2{,}20)$ bestimmt ist.

Das Dach des Gartenhauses ist eine quadratische Pyramide, deren Spitze S sich in einer Höhe von 3,20 m befindet und damit die Koordinaten $S(0|0|3{,}20)$ hat.

Die vier Seitenflächen des Daches sind also vier kongruente gleichschenklige Dreiecke.



Für die Dachflächen soll wasserfestes Sperrholz eingekauft werden.

a) Berechnen Sie

- die Länge einer Dachkante, z. B. $\overline{A_1S}$,
- für die vier Dachflächen den Gesamtbedarf an Sperrholz in m^2. (15P)

Für die Konstruktion des Gartenhauses und der abdichtenden Bleche entlang der Dachkanten ist die Kenntnis der Winkel zwischen zwei benachbarten Dachflächen nötig.

b)
- Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Dachfläche A_1B_1S ist.
- Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen den Dachflächen A_1B_1S und A_1D_1S. (20P)

Im Schwerpunkt G des Dreiecks A_1B_1S möchte der stolze Besitzer eine Fahne seines Lieblingsvereins anbringen. Die Fahnenstange soll senkrecht zur Dachfläche stehen und eine sichtbare Länge von 1 m haben. Innen soll die Fahnenstange im Punkt F an einem Stab befestigt sein, der die Mittelpunkte der beiden Deckenkanten $\overline{A_1B_1}$ und $\overline{C_1D_1}$ miteinander verbindet.

c) Bestätigen Sie, dass $G\left(0\,|\,\frac{4}{3}\,|\,\frac{38}{15}\right)$ der gesuchte Schwerpunkt ist. (15P)

Hinweis: *Der Schwerpunkt eines Dreiecks ist der Schnittpunkt seiner Seitenhalbierenden.*
Der Schwerpunkt teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1.

d) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes F. (20P)

Zur Kontrolle: $F\left(0\,|\,\frac{7}{6}\,|\,\frac{11}{5}\right)$

e) Berechnen Sie, welchen prozentualen Anteil die Länge des sichtbaren Teils der Fahnenstange an ihrer Gesamtlänge aufweist. (10P)

Der Besitzer denkt auch darüber nach, den inneren Befestigungspunkt in den Mittelpunkt der Deckenebene zu legen, also in den Punkt $M(0|0|2{,}20)$. Auch in diesem Fall soll die Stange senkrecht zur Dachfläche A_1B_1S stehen und weiterhin eine sichtbare Länge von 1 m besitzen. Der Besitzer hat eine Fahnenstange von 1,80 m Länge zur Verfügung.

f) Untersuchen und beurteilen Sie, ob sich mit dieser Fahnenstange seine Vorstellung realisieren lässt. (20P)

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	• $\left\lvert\overline{A_1S}\right\rvert = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{9} = 3\,[\text{m}]$ • Zur Ermittlung des Flächeninhalts eines der vier gleichschenkligen Dreiecke wird die Höhe auf die Grundseite benötigt. *Es gibt verschiedene Möglichkeiten der Berechnung.* Der Satz des Pythagoras liefert $2^2+h^2=3^2 \rightarrow h=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}\approx 2{,}24\,[\text{m}]$ *Oder:* Die gesuchte Höhe entspricht der Distanz zwischen dem Mittelpunkt $M(0\,\vert\,2\,\vert\,2{,}20)$ der Seite $\overline{A_1B_1}$ und dem Punkt S. $h=\sqrt{0^2+2^2+1^2}=\sqrt{5}\approx 2{,}24\,[\text{m}]$ Damit ergibt sich für den gesuchten Inhalt der gesamten Fläche des Daches: $A=4\cdot A_{\text{Dreieck}}=4\cdot\frac{1}{2}\cdot g\cdot h=2\cdot\left\lvert\overline{A_1B_1}\right\rvert\cdot h=2\cdot 4\cdot\sqrt{5}=8\cdot\sqrt{5}\approx 17{,}89\,[\text{m}^2]$	15		
b)	• *Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese Teilaufgabe zu lösen:* Ein Normalenvektor der Ebene $E(A_1B_1S)$ muss auf zwei Spannvektoren der Ebene senkrecht stehen, z. B.: $\vec{n_1}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}=0 \quad\wedge\quad \vec{n_1}\cdot\overrightarrow{A_1S}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}=0$ *oder:* Rechnerische Ermittlung eines Normalenvektors: $\vec{n_1}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}=-4a=0\rightarrow a=0$ $\vec{n_1}\cdot\overrightarrow{A_1S}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}=-2a-2b+c=-2b+c=0\rightarrow c=2b$ Mit $b=1$ erhalten wir $\vec{n_1}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ *oder:* Auch das Kreuzprodukt zweier Vektoren, die $E(A_1B_1S)$ aufspannen, liefert einen Normalenvektor der Ebene $E(A_1B_1S)$. $\overrightarrow{A_1S}\times\overrightarrow{B_1S}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\8\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}.$			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Damit ist $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von $E(A_1B_1S)$. • In gleicher Weise wird ein Normalenvektor der Ebene $E(A_1D_1S)$ bestimmt. $\overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{A_1D_1} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = -4b = 0 \rightarrow b = 0$ $\overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{A_1S} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2a - 2b + c = -2a + c = 0 \rightarrow c = 2a$ Mit $a = 1$ erhalten wir $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ *Das entsprechende Kreuzprodukt würde selbstverständlich das gleiche Ergebnis liefern.* Den Winkel zwischen den **Ebenen** $E(A_1B_1S)$ und $E(A_1D_1S)$ erhalten wir über die bekannte Formel. $cos\,\varepsilon = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\lvert\overrightarrow{n_1}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{n_2}\rvert} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4}{5} = 0{,}8 \rightarrow \varepsilon \approx 36{,}87°$ Der gesuchte Winkel zwischen den **Dachflächen** A_1B_1S und A_1D_1S ist aber $\delta = 180° - \varepsilon = 143{,}13°$.		20	
c)	Der Mittelpunkt der Kante $\overline{A_1B_1}$ hat die Koordinaten $M(0\|2\|2{,}20)$. Damit ergibt sich für die Seitenhalbierende, genauer: die Gerade durch die Punkte M und S, folgende Gleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2{,}2 \end{pmatrix} + r \cdot \overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2{,}2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Den Schwerpunkt G des Dreiecks A_1B_1S erhält man, indem man für den Parameter r den Wert $\frac{1}{3}$ einsetzt.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	$\overrightarrow{OG}=\begin{pmatrix}0\\2\\2{,}2\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\frac{4}{3}\\\frac{38}{15}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1{,}\overline{3}\\2{,}5\overline{3}\end{pmatrix}$ $G\left(0\,\middle\vert\,\frac{4}{3}\,\middle\vert\,\frac{38}{15}\right)=G\left(0\,\middle\vert\,1{,}\overline{3}\,\middle\vert\,2{,}5\overline{3}\right)$	5	10	
d)	Die Fahnenstange wird durch die folgende Geradengleichung beschrieben: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\\frac{4}{3}\\\frac{38}{15}\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1{,}\overline{3}\\2{,}5\overline{3}\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}.$ Die Verbindung der Mittelpunkte der beiden Deckenkanten $\overline{A_1B_1}$ und $\overline{C_1D_1}$ wird durch die Geradengleichung $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\2\\\frac{11}{5}\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\2{,}2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ beschrieben. Berechnung des Schnittpunktes der beiden Geraden: Wir erhalten das lineare Gleichungssystem $\frac{4}{3}+s=2-t\wedge\frac{38}{15}+2s=\frac{11}{5}$ $s+t=\frac{2}{3}\wedge 2s=-\frac{5}{15}=-\frac{1}{3}\rightarrow s=-\frac{1}{6}\wedge t=\frac{5}{6}$ Damit erhalten wir für den Befestigungspunkt F der Fahnenstange $F\left(0\,\middle\vert\,\frac{7}{6}\,\middle\vert\,\frac{11}{5}\right)=F\left(0\,\middle\vert\,1{,}1\overline{6}\,\middle\vert\,2{,}2\right)$		10	10

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	Mit $\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ folgt für die Länge des inneren Teils der Fahnenstange $l_1 = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{6}\right)^2} = \frac{1}{6}\sqrt{5} \approx 0{,}37\,[\text{m}]$ Damit erhalten wir für den prozentualen Anteil der Länge des sichtbaren Teils an der Gesamtlänge der Fahnenstange $\frac{100}{137} \approx 0{,}73 = 73\,\%$.	10		
f)	Die Fahnenstange wird durch die folgende Geradengleichung bestimmt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Diese Gerade ist mit der Ebene $E(A_1B_1S)$ zum Schnitt zu bringen. $E(A_1B_1S)$ hat den Normalenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Es lässt sich daher die folgende Koordinatengleichung ansetzen: $x_2 + 2x_3 = c$. Einsetzen der Koordinaten eines Punktes der Ebene, z. B. S, liefert $c = 6{,}4$. Die Ebene $E(A_1B_1S)$ wird daher durch die folgende Gleichung bestimmt: $x_2 + 2x_3 = 6{,}4$ Einsetzen der Koordinaten der Geradengleichung in die Ebenengleichung liefert $u + 2 \cdot (2{,}2 + 2u) = 6{,}4$ $5u + 4{,}4 = 6{,}4$ $5u = 2 \quad \rightarrow \quad u = \frac{2}{5} = 0{,}4$ Einsetzen dieses ermittelten Werts in die Geradengleichung der Fahnenstange ergibt die Koordinaten des gesuchten Punktes: $K(0\|0{,}4\|3)$ Die Länge des inneren Teils dieser Fahnenstange beträgt damit $l_2 = \left\|\overline{MK}\right\| = \sqrt{0^2 + 0{,}4^2 + 0{,}8^2} = \sqrt{0{,}8} \approx 0{,}89\,[\text{m}]$ Die Gesamtlänge beläuft sich somit auf 1,89 m. Der Besitzer kann also seine Vorstellung nicht realisieren, weil die zur Verfügung stehende Fahnenstange um 9 cm zu kurz ist.		10	10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

LA/AG 2

II.2 Kapuzineraffen

Kapuzineraffen sind gesellige Tiere, die in Gruppen zusammen leben. Sie ernähren sich hauptsächlich von Insekten und Früchten.
Eine Unterart der Kapuzineraffen ist in Mittel- und Südamerika beheimatet und lebt dort hauptsächlich in Flusswäldern.
In manchen Regionen sind diese Affen durch die Zerstörung ihres Lebensraumes – Abholzen der Wälder oder Brandrodung – selten geworden.
Darum untersucht eine Forschergruppe in einer dieser Regionen die Populationsentwicklung der Tiere in zwei vergleichbaren, aber weit voneinander entfernt liegenden Gebieten P und Q.

In dieser Aufgabe sollen nur Populationen von weiblichen Tieren dieser Art betrachtet werden, die in vier Altersklassen eingeteilt sind: Jungtiere (J_1), die höchstens 1 Jahr alt sind, Jungtiere (J_2) zwischen 1 und 2 Jahren, Jungtiere (J_3) zwischen 2 und 3 Jahren sowie erwachsene geschlechtsreife Tiere (E), die älter als 3 Jahre sind.

Die Entwicklung der Populationen in beiden Gebieten lässt sich für jeweils eine Zeitspanne von einem Jahr durch nachfolgende Matrix darstellen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

a) Erstellen Sie für das beschriebene Modell einen Übergangsgraphen. (10P)

b) Beschreiben Sie, welche Bedeutung die Matrix-Elemente $a_{2,1} = 0{,}5$, $a_{2,2} = 0$ und $a_{4,3} = 0{,}6$ im Sachkontext haben. (10P)

Im Gebiet P existiert zu Beginn der Untersuchung eine Anfangspopulation $\overrightarrow{p_0}$ aus 20 Jungtieren (J_1), 15 Jungtieren (J_2), 25 Jungtieren (J_3) und 40 erwachsenen Tieren (E).

c) Berechnen Sie die Zusammensetzung der Population nach einem Jahr und nach zwei Jahren. (10P)

Im zweiten Gebiet Q werden ein Jahr nach Beginn der Untersuchung zur Bestandskontrolle die Tiere in den vier Altersklassen gezählt.

d) Ermitteln Sie für das Gebiet Q eine Population $\overrightarrow{q_0}$, aus der sich nach einem Jahr 30 Jungtiere (J_1), 8 Jungtiere (J_2), 10 Jungtiere (J_3) und 48 erwachsene Tiere (E) entwickelt haben. (15P)

e) Zeigen Sie, dass es in beiden Gebieten keine Startpopulation gibt, die sich nach einem Jahr reproduziert. (20P)

Unter günstigeren Lebensbedingungen sieht eine Populationsmatrix A^* für die Entwicklung der Kapuzineraffenpopulation folgendermaßen aus:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & \frac{9}{8}c \end{pmatrix}$$

Durch verschiedene Maßnahmen zur Verbesserung der Lebensbedingungen wie beispielsweise die Aufforstung der Flusswälder ist es möglich, die Überlebensraten der Tiere in den gefährdeten Gebieten zu erhöhen. Im Folgenden seien $a = 0{,}7$ und $b = 0{,}8$.

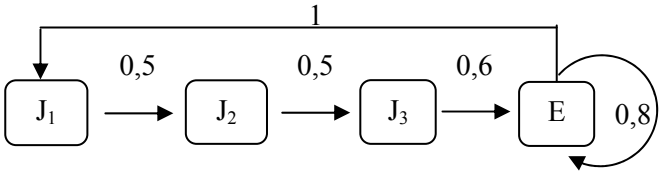
f) Bestimmen Sie c so, dass sich die Gesamtzahl der Anfangspopulation $\overrightarrow{p_0}$ im Gebiet P nach einem Jahr um 22 % erhöht, und geben Sie die zugehörige Matrix A^* an. (15P)

Zur Kontrolle: $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 & 0{,}9 \end{pmatrix}$

g) Ermitteln Sie die Population $\overrightarrow{p_{10}}$, die sich im Gebiet P aus der Anfangspopulation $\overrightarrow{p_0}$ innerhalb von 10 Jahren entwickelt, wenn während dieses gesamten Zeitraums die verbesserten Lebensbedingungen herrschen, und interpretieren Sie das Ergebnis im Hinblick auf die langfristige Entwicklung der Kapuzineraffenpopulation im Gebiet P. (20P)

Hinweis: Sie können die Matrix $(A^*)^5 \approx \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}6 & 1{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}9 & 1{,}4 \end{pmatrix}$ *ohne Nachweis verwenden.*

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Übergangsgraph: 	10		
b)	Das Matrix-Element $a_{2,1} = 0{,}5$ gibt an, dass 50 % der Jungtiere J_1 nach einem Jahr in die nächste Altersklasse wechseln. Das Element $a_{2,2} = 0$ beschreibt die Tatsache, dass kein Jungtier J_2 nach einem Jahr in seiner Altersklasse verbleibt, sondern in die Altersklasse der Jungtiere J_3 übergeht oder stirbt. Das Element $a_{4,3} = 0{,}6$ bringt zum Ausdruck, dass 60 % der Jungtiere J_3 nach einem Jahr zu geschlechtsreifen erwachsenen Tieren E werden.	10		
c)	Nach einem Jahr: $\overrightarrow{p_1} = A \cdot \overrightarrow{p_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 25 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 7{,}5 \\ 47 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 8 \\ 47 \end{pmatrix}$ Nach 2 Jahren: $\overrightarrow{p_2} = A \cdot \overrightarrow{p_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 8 \\ 47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 \\ 20 \\ 5 \\ 42{,}4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 47 \\ 20 \\ 5 \\ 42 \end{pmatrix}$ Nach einem Jahr besteht die Population aus 40 Jungtieren J_1, 10 Jungtieren J_2, 8 Jungtieren J_3 und 47 geschlechtsreifen erwachsenen Tieren E. Im zweiten Jahr ist die Zahl von J_1 leicht auf 47 gestiegen, die Zahl von J_2 hat sich verdoppelt, während die Zahl in der Altersklasse J_3 auf 5 und in der Altersklasse E auf 42 Tiere abgesunken ist. *Die Anzahlen der Tiere sind mathematisch gerundet. Auch Abrundungen auf ganze Tiere sind zu akzeptieren.*	10		
d)	Zu lösen ist die Gleichung: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 8 \\ 10 \\ 48 \end{pmatrix}$			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Damit ergibt sich das Gleichungssystem: I. $z = 30$ II. $0{,}5u = 8 \quad \Leftrightarrow \quad u = 16$ III. $0{,}5x = 10 \quad \Leftrightarrow \quad x = 20$ IV. $0{,}6y + 0{,}8z = 48 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{4}{3}z + 80$ $z = 30$ eingesetzt in IV: $y = -\frac{4}{3} \cdot 30 + 80 \quad \Leftrightarrow \quad y = 40$ Damit erhält man die Startpopulation $\vec{q_0} = \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix}$, aus der sich nach einem Jahr die gezählten Tiere entwickelt haben.		15	
e)	Es ist folgende Gleichung zu lösen: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ Aus dieser Gleichung ergibt sich folgendes Gleichungssystem: I. $d = a$ II. $0{,}5a = b$ III. $0{,}5b = c$ IV. $0{,}6c + 0{,}8d = d \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}2d = 0{,}6c \quad \Leftrightarrow \quad d = 3c$ Mit IV. erhält man aus I. $a = 3c$. Aus III. erhält man $b = 2c$. Setzt man nun in II. für a den Wert $3c$ ein, erhält man $b = 1{,}5c$. Es folgt also: $a = b = c = d = 0$ Das bedeutet, dass es für beide Gebiete keine sinnvolle Anfangspopulation gibt, die sich selbst reproduziert, sich also jährlich in ihrer Zusammensetzung nicht mehr ändert.		10	10

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	Ansatz: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & \frac{9}{8}c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 25 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 14 \\ 12 \\ 25c + \frac{9}{8} \cdot 40c \end{pmatrix}$ Da die Anfangspopulation aus 100 Tieren besteht, soll der Bestand auf 122 anwachsen. Also ergibt sich die Gleichung: $40 + 14 + 12 + 25c + \frac{9}{8} \cdot 40c = 122$ $\Leftrightarrow 70c = 56$ $\Leftrightarrow c = 0,8$ $\Leftrightarrow \frac{9}{8} \cdot c = 0,9$ Die zugehörige Populationsmatrix lautet dann: $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,9 \end{pmatrix}$		15	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
g)	Population nach 10 Jahren: $\overrightarrow{p_{10}} = (A^*)^{10} \cdot \overrightarrow{p_0} = (A^*)^5 \cdot (A^*)^5 \cdot \overrightarrow{p_0}$ $\overrightarrow{p_{10}} \approx \begin{pmatrix} 0,4 & 0,5 & 0,6 & 1,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,5 \\ 0,4 & 0,5 & 0,9 & 1,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,4 & 0,5 & 0,6 & 1,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,5 \\ 0,4 & 0,5 & 0,9 & 1,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 25 \\ 40 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{p_{10}} \approx \begin{pmatrix} 0,75 & 1,19 & 1,72 & 2,53 \\ 0,44 & 0,76 & 1,03 & 1,48 \\ 0,32 & 0,57 & 0,81 & 1,1 \\ 0,87 & 1,46 & 2,11 & 3,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 25 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 177,05 \\ 105,15 \\ 79,2 \\ 216,05 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 177 \\ 105 \\ 79 \\ 216 \end{pmatrix}$ *Bei anderer Reihenfolge der Multiplikationen ergeben sich u. U. (je nach Rundung) kleine Abweichungen.* Im Gebiet P gibt es unter den verbesserten Lebensbedingungen nach 10 Jahren 177 Jungtiere J_1, 105 Jungtiere J_2, 79 Jungtiere J_3 und 216 erwachsene Tiere E, insgesamt also 577 Kapuzineraffen. Interpretation: In 10 Jahren hat sich die Population also fast versechsfacht. Sie wird langfristig gesehen höchstens so lange weiter wachsen, bis die biologische Grenze der Nahrungsverfügbarkeit erreicht ist. Spätestens dann verändern sich die Überlebensraten, und das Wachstum hört auf. Vermutlich wird danach die Populationsgröße in etwa gleich bleiben. Es besteht aber auch die Gefahr, dass sie, z. B. wegen einer Krankheit oder wegen verminderter Nahrungsverfügbarkeit, wieder abnimmt. *Jede andere sinnvolle Interpretation ist als richtig zu werten.*		10	10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

STOCHASTIK 1

III.1 Sicherungen

Eine Firma stellt Elektro-Schraubsicherungen her, von denen erfahrungsgemäß etwa 10 % Mängel aufweisen und deshalb unbrauchbar sind.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Sicherungen, die man mindestens überprüfen müsste, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % auf mindestens eine unbrauchbare Sicherung zu stoßen. (15P)

Um aus seiner Sicht eine hinreichende Qualität zu sichern, trifft der Großhändler mit der Herstellerfirma folgende Vereinbarung:

Sind mehr als 10 % einer Lieferung unbrauchbar, so darf die ganze Lieferung zurückgeschickt werden. Der Großhändler ist berechtigt, zur Feststellung der Qualität der Lieferungen Qualitätskontrollen in Form von Stichprobenuntersuchungen an 20 Sicherungen durchzuführen.

Dabei hat sich der Großhändler für das folgende Entscheidungsverfahren entschieden:

Sind bei einer ersten Stichprobe von 20 Sicherungen höchstens drei unbrauchbar, wird die ganze Lieferung angenommen. Sind mindestens 5 nicht brauchbar, wird die ganze Lieferung abgelehnt. Sind genau vier Artikel unbrauchbar, so wird eine zweite Stichprobe von 20 Artikeln überprüft. Sind dann höchstens zwei unbrauchbar, wird die ganze Lieferung akzeptiert, andernfalls wird sie abgelehnt.

Eine Lieferung ist gerade eingegangen.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse für die erste 20er Stichprobe:

- E_1: Die ersten beiden Sicherungen sind unbrauchbar.
- E_2: Nur die ersten beiden Sicherungen sind unbrauchbar.
- E_3: Genau zwei Sicherungen sind unbrauchbar.
- E_4: Mindestens zwei und höchstens vier Sicherungen sind unbrauchbar. (20P)

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

- E_5: Die Lieferung wird nach der ersten Stichprobe abgelehnt.
- E_6: Es wird eine zweite Stichprobe erforderlich.
- E_7: Die Lieferung wird nach zwei Stichproben abgelehnt. (25P)

Der Großhändler kalkuliert sein Geschäft in Chargen zu 50 Sicherungen. Er geht nach wie vor von einem Ausschussanteil von 10 % aus. Dabei erzielt er für jede intakte Sicherung 2,00 € Gewinn. Wird eine defekte Sicherung verkauft, reklamiert sie der Kunde, und es entsteht dem Großhändler dadurch ein Verlust von 1,50 €.

d)
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der unter 50 verkauften Sicherungen höchstens 5 unbrauchbar sind.
- Ermitteln Sie für diesen Fall den Mindestgewinn des Händlers. (10P)

Der zu erwartende Gewinn beim Verkauf von 50 Schraubsicherungen beträgt 82,50 €. Der Großhändler kalkuliert seinen Gewinn in einem Kalkulationsintervall von 72,00 € bis 93,00 €.

e)
- Berechnen Sie, welche Stückzahlen unbrauchbarer Sicherungen einen Gesamtgewinn an den Rändern des Kalkulationsintervalls zur Folge haben.

  Hinweis: Es wird eine einfache Rechnung erwartet, kein Ausprobieren.

  Zur Kontrolle: Die Stückzahlen betragen 8 bzw. 2.
- Bestimmen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Gesamtgewinn bei 50 verkauften Sicherungen mindestens 72,00 € und höchstens 93,00 € beträgt. (15P)

Die Herstellerfirma behauptet, durch ein neues Herstellungsverfahren habe sie die Ausschusswahrscheinlichkeit auf nur noch 3 % reduziert.

f) Zur Überprüfung der Behauptung werden 50 Stücke entnommen. Sind mehr als n Stücke unbrauchbar, so wird die Behauptung verworfen.
- Bestimmen Sie n so, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der die Behauptung der Herstellerfirma zu Unrecht verworfen wird, kleiner als 10 % ist.
- Beschreiben Sie den mathematischen Hintergrund einer solchen Aufgabenstellung. (15P)

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Soll unter n Sicherungen sich mindestens eine befinden, die unbrauchbar ist, so bedeutet dies, dass das Gegenereignis (alle Sicherungen sind brauchbar) auszuschließen ist. Es muss also gelten: $1-0{,}9^n \geq 0{,}95$ $0{,}9^n \leq 0{,}05$ $n \cdot lg\,0{,}9 \leq lg\,0{,}05$ $n \geq \frac{lg\,0{,}05}{lg\,0{,}9} = 28{,}43...$ Es sind also mindestens 29 Sicherungen zu untersuchen. *Eine durch systematisches Probieren gefundene Lösung ist auch zulässig.*		15	
b)	• $P(E_1) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}1^2 = 0{,}01$ • $P(E_2) = 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{18} = 0{,}001500946 \approx 0{,}0015$ • $P(E_3) = \binom{20}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{18} = \binom{20}{2} \cdot P(E_2) = 0{,}285179807 \approx 0{,}29$ • $P(E_4) = \binom{20}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{18} + \binom{20}{3} \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^{17} + \binom{20}{4} \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^{16}$ $= 0{,}565078506 \approx 0{,}57$	20		
c)	• $P(E_5) = P(X \geq 5) = 1 - F_{20}(4)$ $= 1 - \left(\begin{array}{l} \binom{20}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{18} \\ + \binom{20}{3} \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^{17} + \binom{20}{4} \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^{16} \end{array} \right)$ $= 1 - 0{,}956825505 = 0{,}043174495 \approx 0{,}043$ • $P(E_6) = P(X = 4) = \binom{20}{4} \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^{16} = 0{,}089778828 \approx 0{,}09$			

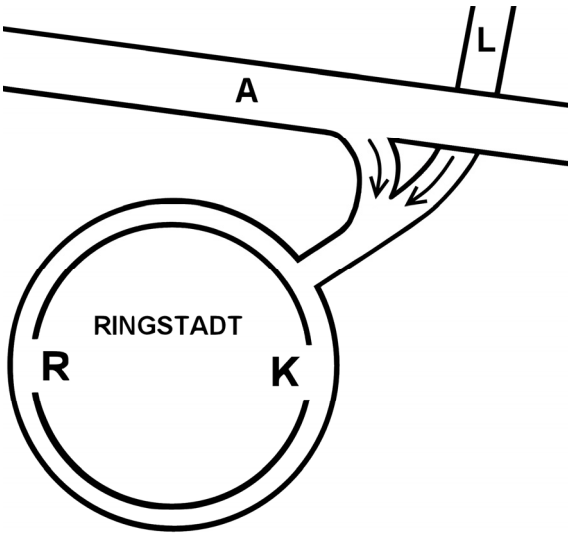
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	$P(E_7) = P(E_6) \cdot P(Y \geq 3) = P(X = 4) \cdot (1 - P(Y \leq 2))$ $= \binom{20}{4} \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^{16} \cdot (1 - F_{20}(2))$ $= \binom{20}{4} \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^{16} \cdot \left(1 - 0{,}9^{20} - \binom{20}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{19} - \binom{20}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{18}\right)$ $= 0{,}089778828 \cdot 0{,}323073194 = 0{,}029005133 \approx 0{,}029$		15	10
d)	$P(X \leq 5) = \sum_{i=0}^{5} \binom{50}{i} \cdot 0{,}1^i \cdot 0{,}9^{50-i} = F_{50}(5) = 0{,}6161$ Der Mindestgewinn für diesen Fall beträgt $G_{min} = 45 \cdot 2{,}00\,€ + 5 \cdot (-1{,}50\,€) = 82{,}50\,€$		10	
e)	• Bei einem Gesamtgewinn von 72,00 € berechnet sich die Stückzahl unbrauchbarer Sicherungen wie folgt: $(50 - x) \cdot 2{,}00 + x \cdot (-1{,}50) = 72$ $100 - 2x - 1{,}5x = 72$ $28 = 3{,}5x$ $x = 8$ Bei einem Gesamtgewinn von 93,00 € erhalten wir entsprechend: $(50 - x) \cdot 2{,}00 + x \cdot (-1{,}50) = 93$ $100 - 2x - 1{,}5x = 93$ $7 = 3{,}5x$ $x = 2$ • Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist somit die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 50 verkauften Sicherungen mindestens 2 und höchstens 8 unbrauchbare finden. Wir erhalten damit $P(2 \leq X \leq 8) = F_{50}(8) - F_{50}(1) = 0{,}9421 - 0{,}0338 = 0{,}9083 \approx 0{,}91$	10	5	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	• *Die Lösung dieser Aufgabe erfordert geschicktes Umgehen mit der Tabelle in der Formelsammlung.* <u>*Lösungsvariante mit Begründung in Worten*</u> Es ist die kleinste natürliche Zahl k zu bestimmen, der in der Tabelle der summierten Binomialverteilung für $n = 50$ und $p = 0{,}03$ ein Tabellenwert über 0,9 zugeordnet ist. Dies ist für $k = 3$ der Fall. <u>*Lösungsvariante mit Begründung durch Rechnungen*</u> $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F_{50}(2) = 1 - 0{,}8108 = 0{,}1892 > 0{,}1$ $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F_{50}(3) = 1 - 0{,}9372 = 0{,}0628 < 0{,}1$ Damit ist die gesuchte Anzahl 3. • Dies ist die Logik eines Signifikanztests (Hypothesentests) mit der Irrtumswahrscheinlichkeit (dem Signifikanzniveau) 10 %. *Jede andere plausible Antwort ist als richtig zu bewerten.*		5	10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

STOCHASTIK 2

III.2 Autofahrer

Nach Ringstadt kommen die Autofahrer entweder von der Autobahn oder von der Landstraße. In beiden Fällen gelangen sie auf eine Ringstraße und dann in die Stadt durch eines der beiden mittelalterlichen Tore, das Karlstor oder das Rudolfstor.



Der Bürgermeister des Ortes hat für die Verkehrsplanung für einen längeren Zeitraum alle von auswärts kommenden Autofahrer über ihren Weg in die Stadt befragen lassen und erhielt das folgende Ergebnis:

20 % aller Fahrer fahren durch das Karlstor.

60 % aller Fahrer kommen von der Landstraße.

95 % der Fahrer, die von der Autobahn kommen, fahren durch das Rudolfstor.

Diese Daten werden im Folgenden für Prognosen als (geschätzte) Wahrscheinlichkeiten verwendet.

Zur Auswertung der Aussagen betrachten Sie die folgenden Ereignisse:

A: Ein Autofahrer kommt von der Autobahn.

L: Ein Autofahrer kommt von der Landstraße.

K: Ein Autofahrer fährt durch das Karlstor.

R: Ein Autofahrer fährt durch das Rudolfstor.

a) Erstellen Sie zur Beschreibung der oben erhaltenen Daten **zwei** Baumdiagramme sowie eine Vierfeldertafel und ermitteln Sie die fehlenden Daten. (25P)

b)
- Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse an:

  E_1: Ein Fahrer kommt von der Landstraße.

  E_2: Ein Fahrer kommt von der Autobahn und fährt durch das Karlstor.

  E_3: Ein Fahrer, der von der Autobahn kommt, fährt durch das Karlstor

  E_4: Ein Fahrer, der durch das Rudolfstor fährt, kommt von der Autobahn
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis:

  E_5: Von 10 Fahrern, die durch das Rudolfstor fahren, kommen genau 4 von der Autobahn. (20P)

c) Entscheiden Sie, ob die oben genannten Ereignisse A und R stochastisch unabhängig sind oder nicht. (10P)

Bei der neuesten Befragung von auswärts kommenden Fahrern über ihren Weg nach Ringstadt haben sich die empirischen Daten verändert. Insbesondere kommen nur 1326 der 2500 erfassten Fahrer von der Landstraße. Das sind jetzt deutlich weniger als 60 %.
Verkehrsexperten führen das Ergebnis auf die verbreiterte Autobahn zurück. In der Presse steht dazu groß aufgemacht:

Nur noch 53,04 % kommen über die Landstraße nach Ringstadt

d) Beurteilen Sie, ob das eine angemessene Darstellung des geschilderten empirischen Befunds ist. (10P)

Die Polizei führte an einem Samstagabend bei 1000 Autofahrern in der Innenstadt von Ringstadt eine Geschwindigkeitskontrolle durch. Das Testergebnis ist mit absoluten Häufigkeiten in der Tabelle 1 in der Anlage festgehalten. Höhere Geschwindigkeiten als 80 km/h wurden nicht gemessen, da dies der Verkehrsfluss im Stadtverkehr mit Ampelschaltung nicht zulässt. Für Geschwindigkeitsüberschreitungen werden die in Tabelle 2 angegebenen Bußgelder erhoben, die der Stadtkasse zugutekommen.

Gehen Sie bei den folgenden Aufgabenteilen davon aus, dass die zulässige Höchstgeschwindigkeit an den Kontrollstellen 50 km/h beträgt.

e) Berechnen Sie die Höhe der Bußgeld-Einnahmen, mit denen die Stadtverwaltung nach dieser Verkehrskontrolle von 1000 Autofahrern rechnen kann. (10P)

Aus anderen statistischen Untersuchungen geht hervor, dass bei Kontrollen, die über einen längeren Zeitraum an einer festen Kontrollstelle innerhalb einer geschlossenen Ortschaft durchgeführt werden, die beim Blitzen gemessene Geschwindigkeit normalverteilt ist mit einem Mittelwert von 55 km/h. Man hat außerdem herausgefunden, dass 17,3 % der Autofahrer schneller als 60 km/h fahren.

f) Bestätigen Sie, dass die Standardabweichung der bei diesen Untersuchungen gemessenen Geschwindigkeiten ungefähr 5,3 km/h beträgt. (10P)
Rechnen Sie bitte beim nächsten Aufgabenteil mit diesem gerundeten Wert.

Aus den so gewonnenen Daten kann man die Werte in der „theoretischen“ Tabelle 3 in der Anlage ermitteln, aus der analog zu Tabelle 1 abgelesen werden kann, wie viele von 1000 kontrollierten Autofahrern in den verschiedenen Geschwindigkeitsbereichen zu erwarten sind.

g) Bestimmen Sie den fehlenden Wert und interpretieren Sie die Unterschiede zwischen Tabelle 1 und Tabelle 3 im Hinblick auf den Sachkontext. (15P)
Hinweis: Hier ist $P(a < v \leq b) = P(a \leq v \leq b)$.

Anlage zur Aufgabe „Autofahrer“

Tabelle 1: Statistische Erhebung

Fahrer kommt von der	Anzahl	Fahrer fährt					
		41-50 km/h	51-60 km/h	61-65 km/h	66-70 km/h	71-75 km/h	76-80 km/h
Autobahn	700	350	210	120	14	4	2
Landstraße	300	216	50	30	4	0	0
insgesamt	1000	566	260	150	18	4	2

Tabelle 2: Bußgeldkatalog

Für Geschwindigkeitsüberschreitungen innerhalb geschlossener Ortschaften gelten nach der aktuellen Bußgeldkatalog-Verordnung die folgenden Regelsätze:

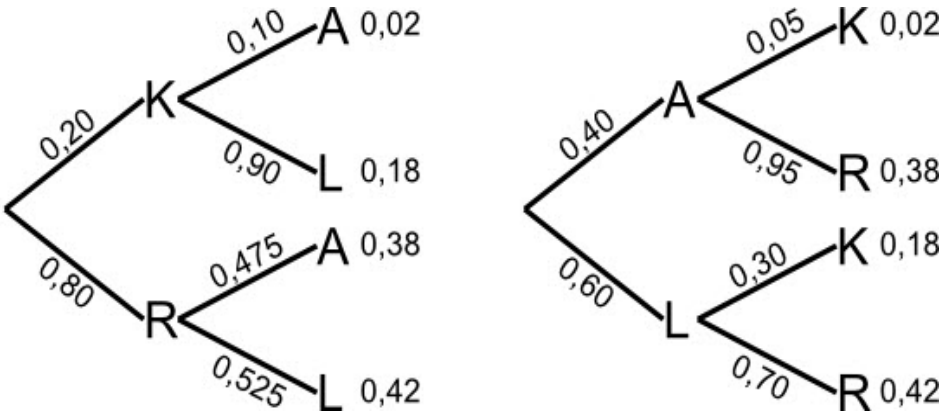
bis 10 km/h zu schnell	15 €
11-15 km/h zu schnell	25 €
16-20 km/h zu schnell	35 €
21-25 km/h zu schnell	80 €
26-30 km/h zu schnell	100 €

Hierbei sind evtl. zusätzliche Verwaltungsgebühren sowie weitere Sanktionen („Punkte“, Fahrverbot) nicht berücksichtigt.

Tabelle 3: Erwartete Anzahlen pro 1000 geblitzter Fahrer

Geschwindigkeit v in km/h	$40 < v \leq 50$	$50 < v \leq 60$	$60 < v \leq 65$	$65 < v \leq 70$	$70 < v \leq 75$	$75 < v \leq 80$
erwartete Anzahl	171		144	27	2	0

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Zwei Baumdiagramme:  Vierfeldertafel:			
		10	15	
b)	• $P(E_1) = P(L) = 0{,}6$ $P(E_2) = P(A \cap K) = 0{,}02$ $P(E_3) = P_A(K) = 0{,}05$ $P(E_4) = P_R(A) = 0{,}475$ *Die Angabe der Zwischenschritte gehört bei $P(E_1)$ bis $P(E_4)$* ***nicht*** *zur erwarteten Leistung!* • $P(E_5) = \binom{10}{4} \cdot 0{,}475^4 \cdot 0{,}525^6 = 0{,}2238461111 \approx 0{,}22$	10	10	
c)	$P(A \cap R) \neq P(A) \cdot P(R)$, denn $0{,}38 \neq 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}32$ Die beiden Ereignisse sind nicht stochastisch unabhängig.		10	
d)	*Dieser sehr offen gehaltene Aufgabenteil lässt viele sinnvolle Antworten zu.* Die Angabe der relativen Häufigkeit als Wahrscheinlichkeit mit vierstelliger Genauigkeit ist bestimmt nicht sinnvoll. Hier könnte man über eine stochastisch sinnvolle Rundung/Genauigkeit bei $n = 2500$ nachdenken – bis hin zu einer Abschätzung eines Rundungs-/Vertrauensintervalls mithilfe einer Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung – oder darüber, ob die Anzahl derer, die von der Landstraße kommen, signifikant abgenommen hat. *Jede andere sinnvolle Interpretation ist als richtig zu werten.*			10

	K	R	
A	0,02	0,38	0,4
L	0,18	0,42	0,6
	0,2	0,8	1

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	Höhe des Bußgeldes in € gemäß Tabelle: $260 \cdot 15 + 150 \cdot 25 + 18 \cdot 35 + 4 \cdot 80 + 2 \cdot 100 = 8960$ Die Stadtverwaltung kann nach dieser Verkehrskontrolle von 1000 Autofahrern mit einer Einnahme von 8.960 € rechnen.	10		
f)	Der Mittelwert ist gegeben mit $\mu = 55$. $P(X \leq 60) = 1 - 0{,}173 = 0{,}827$ Aus dem Tafelwerk ergibt sich $0{,}827 \approx \Phi(0{,}94)$ $\Phi(\frac{60-55}{\sigma}) = \Phi(0{,}94) \Leftrightarrow \frac{5}{\sigma} = 0{,}94 \Leftrightarrow \sigma \approx 5{,}3$ Für die bei den Untersuchungen gemessenen Geschwindigkeiten ergibt sich eine (*stochastische*) Standardabweichung von 5,3 km/h.		10	
g)	Die Formel $P(a \leq v \leq b) = \Phi\left(\frac{b-55}{5{,}3}\right) - \Phi\left(\frac{a-55}{5{,}3}\right)$ liefert: $P(50 < v \leq 60) = \Phi\left(\frac{60-55}{5{,}3}\right) - \Phi\left(\frac{50-55}{5{,}3}\right)$ $= \Phi(0{,}94) - \Phi(-0{,}94)$ $= 0{,}8264 - (1 - 0{,}8264)$ $= 0{,}6528$ Wegen 1000·0,6528 = 652,8 ist der in Tabelle 3 fehlende Wert **653**. *Die Anwendung der Näherungsformel von Moivre-Laplace (mit dem Korrekturglied* 0,5*), die dasselbe Resultat liefert, ist hier nicht sachgerecht und kann daher nur mit der halben Punktzahl bewertet werden.* *Anstelle der Rechnung ist auch folgende Argumentation erlaubt:* Wenn 17,3 % schneller sind als 60 km/h, dann müssen wegen der Symmetrie der Normalverteilung auch 17,3 % langsamer sein als 50 km/h. Mit einer Geschwindigkeit zwischen 50 km/h und 60 km/h fahren demnach die zu 100 % fehlenden 65,4 %, also **654** [*rundungsbedingte Abweichung*] von 1000. Interpretation: Auffällig ist, dass in Ringstadt vergleichsweise sehr viel mehr Fahrer mit Geschwindigkeiten unter 50 km/h unterwegs waren. Mögliche [!] Erklärungen sind der Straßenzustand (Kopfsteinpflaster, Schlaglöcher, Schneedecke?), die Verkehrsdichte (Einkaufsverkehr?), Hindernisse (Radfahrer auf der Fahrbahn, Zweite-Reihe-Parker?) oder eine „Radarwarnung“. *Es wird nicht erwartet, dass die Prüflinge alle denkbaren Erklärungen nennen. Jede andere sinnvolle Interpretation ist als richtig zu werten.*		5	10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20