Analysis 1

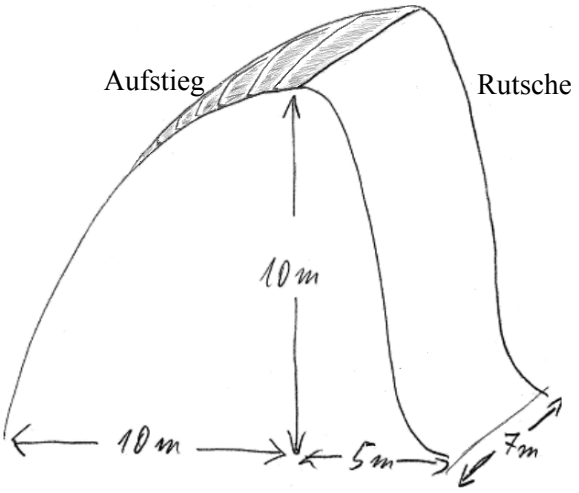
I.1 Wasserrutsche

Für ein Freibad wird eine Wasserrutsche entworfen. Diese Rutsche soll einfach geformt und nicht sehr lang sein.

Als Attraktion soll sie aber 7 m breit sein, so dass mehrere Personen nebeneinander herunter rutschen können.

Der Raum unter der Rutsche ist ein Erdwall, der seitlich von senkrechten Betonwänden gestützt wird.

Der Auftraggeber hat eine Handskizze erstellt, wie er sich die Rutsche vorstellt.



Der Aufstieg links wird durch die Parabel p mit der Gleichung $p(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + 10$ beschrieben, wobei der Ursprung des Koordinatensystems auf dem Boden direkt unter dem höchsten Punkt der Rutsche liegt.

Eine Einheit entspricht hierbei 1 m in der Realität.

a) Bestätigen Sie, dass die Funktion p den Daten aus der Zeichnung entspricht und ihr Graph im höchsten Punkt der Rutsche eine waagerechte Tangente hat. **(10P)**

Der Konstrukteur will die Rutsche durch eine ganzrationale Funktion f 3. Grades beschreiben. Für den ersten Versuch verwendet er die folgenden Daten:
Der Startpunkt der Rutsche liegt im Punkt $(0|10)$, der Endpunkt im Punkt $(5|0)$ und sowohl im Startpunkt als auch im Endpunkt soll die Steigung Null betragen.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion f und zeichnen Sie den Funktionsgraphen mit Hilfe einer Wertetabelle in das beigefügte Koordinatensystem ein (1 LE entspricht 1 m). (*Zur Kontrolle:* $f(x) = 0{,}16 \cdot x^3 - 1{,}2 \cdot x^2 + 10$). **(20P)**

Dem Konstrukteur kommen Bedenken wegen der Steilheit der Rutsche. Er möchte diese einschätzen.

c)
- Bestimmen Sie die Steigung an der Stelle mit dem größten Gefälle und den zugehörigen Steigungswinkel.
- Ermitteln Sie die durchschnittliche Steigung der Rutsche. **(15P)**

d) Gegeben ist der Rechenterm $7 \cdot \left(\int_{-10}^{0} p(x)\,dx + \int_{0}^{5} f(x)\,dx \right)$.

Berechnen Sie den Zahlenwert des Terms und interpretieren Sie ihn im Sachzusammenhang. **(15P)**

Der Konstrukteur sieht die Rutsche so als zu steil an. Er erstellt daraufhin einen Vorschlag, der <u>nur</u> die Höhe der Rutsche halbiert.

e)
- Bestimmen Sie den Funktionsterm, den der Konstrukteur für die halbhohe Rutsche erstellt.
- Vergleichen Sie die Steigung an der steilsten Stelle im Intervall $[0;5]$ mit der aus Teil c). **(10P)**

Der Auftraggeber möchte jedoch die Starthöhe von 10 m beibehalten und erbittet einen Entwurf, der die horizontale Länge der Rutsche verdoppelt.
Dem Konstrukteur fallen vier verschiedene Funktionsgleichungen ein, die jetzt der Rutsche entsprechen könnten:

$$f_1(x) = 2 \cdot \left(0{,}16 \cdot x^3 - 1{,}2 \cdot x^2 + 10\right); \qquad f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(0{,}16 \cdot x^3 - 1{,}2 \cdot x^2 + 10\right);$$

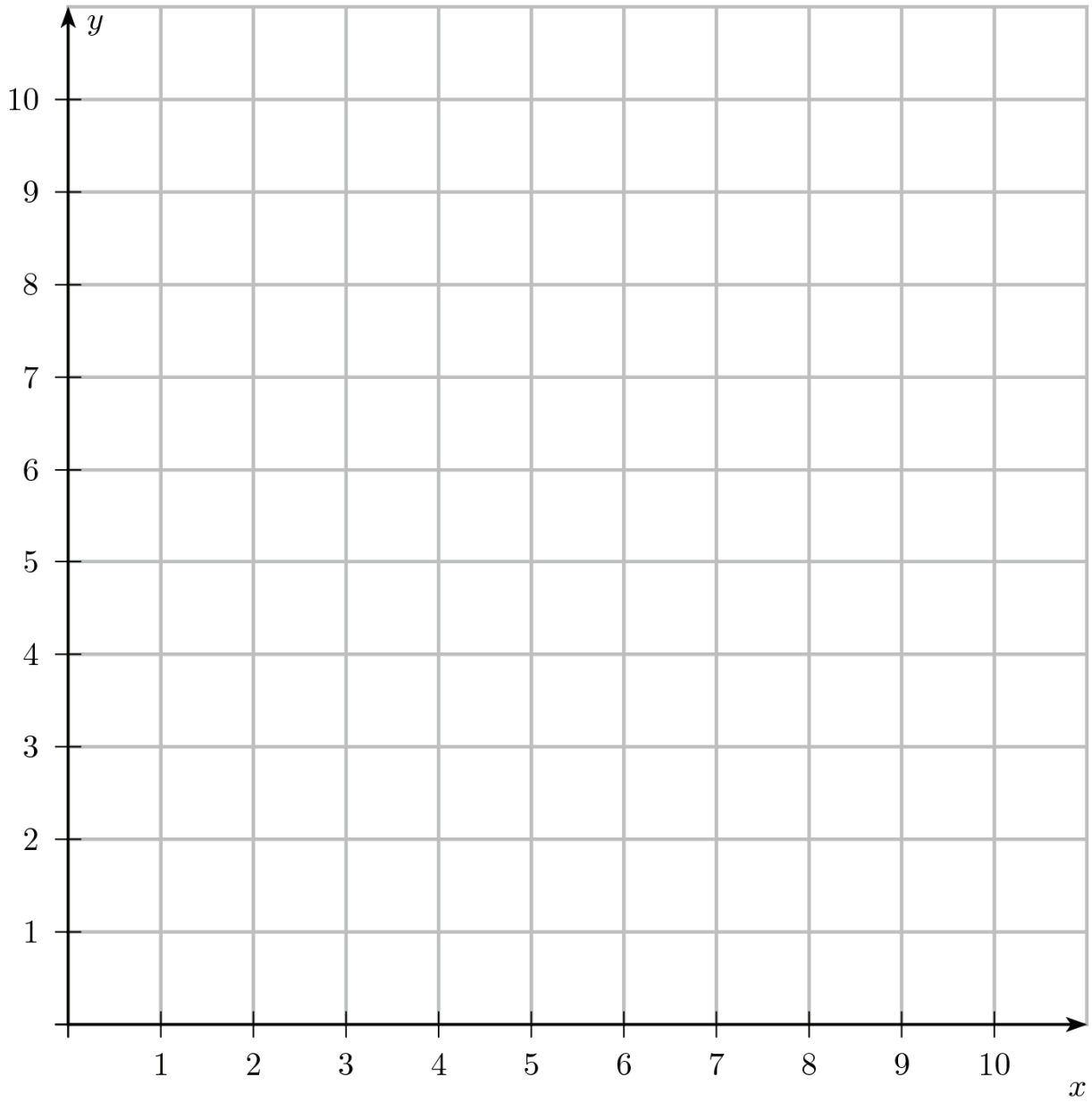
$$f_3(x) = 0{,}16 \cdot (2x)^3 - 1{,}2 \cdot (2x)^2 + 10; \qquad f_4(x) = 0{,}16 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x\right)^3 - 1{,}2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x\right)^2 + 10.$$

f) Entscheiden Sie, welcher Term den Vorgaben entspricht, und begründen Sie ihre Entscheidung. **(15P)**

Nach Abwägung der Vorschläge und der Einwände zur Steilheit soll es bei der ersten Funktion f bleiben. Aber ab $x = 4$ soll die Rutsche ohne Knick in einen linearen Verlauf entlang einer Geraden g übergehen.

g) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der zugehörigen Geraden g und den (neuen) Endpunkt der Rutsche. **(15P)**

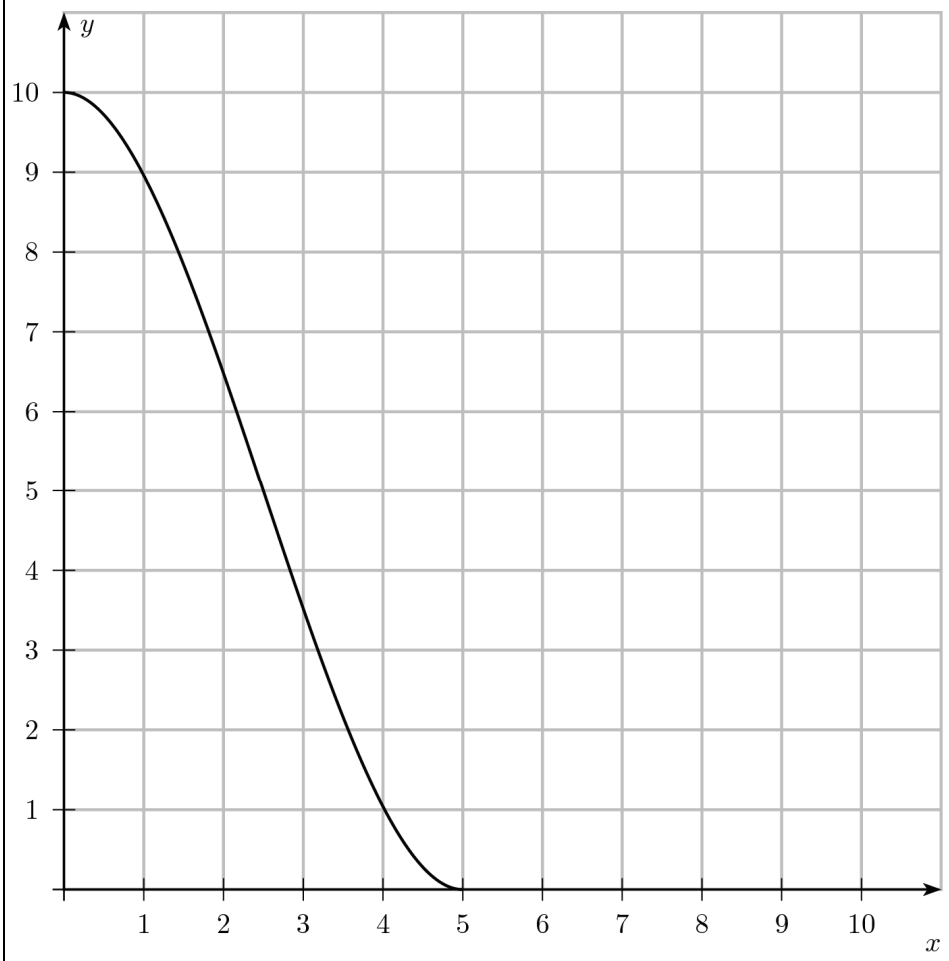
Anlage zur Aufgabe „Wasserrutsche“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	$p(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + 10$ - $p(0) = 10$, - $p(-10) = -0{,}1 \cdot 100 + 10 = 0$, - $p'(x) = -0{,}2 \cdot x$ und damit $p'(0) = 0$.	10		
b)	$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ $f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$ - $f(0) = 10$, also $d = 10$, - $f'(0) = 0$, also $c = 0$, - $f(5) = 0$, also $0 = 125a + 25b + 10 \Leftrightarrow -4 = 50a + 10b$, - $f'(5) = 0$, also $0 = 75a + 10b$. Subtraktion der beiden letzten Gleichungen ergibt: $4 = 25a$ $\frac{4}{25} = a = 0{,}16$. Einsetzen liefert: $0 = 75 \cdot \frac{4}{25} + 10b$ $-12 = 10b$ $-1{,}2 = b$. Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $f(x) = 0{,}16 \cdot x^3 - 1{,}2 \cdot x^2 + 10$ Wertetabelle:			

x	$f(x)$
0	10
1	8,96
2	6,48
3	3,52
4	1,04
5	0

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
		5	15	
c)	Stelle mit dem maximalen Gefälle: $f'(x) = 0{,}48 \cdot x^2 - 2{,}4 \cdot x$ $f''(x) = 0{,}96 \cdot x - 2{,}4$ $f''(x) = 0$ $0{,}96 \cdot x - 2{,}4 = 0$ $x = \frac{2{,}4}{0{,}96}$ $x = 2{,}5$ $f'''(2{,}5) = 0{,}96 > 0$, also liegt minimale Steigung (damit maximales Gefälle) vor. *Die x-Koordinate des Wendepunktes kann auch direkt aus der Symmetrie der Funktion gefolgert werden.* Steigung an der Stelle $x = 2{,}5$: $f'(2{,}5) = 0{,}48 \cdot 2{,}5^2 - 2{,}4 \cdot 2{,}5 = -3$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Damit ergibt sich für den Steigungswinkel: $\beta = \arctan(-3) \approx -71{,}57°$. Die durchschnittliche Steigung ergibt sich aus der Steigung zwischen Anfangspunkt und Endpunkt und beträgt offensichtlich: $m_{\text{mittel}} = \frac{0-10}{5-0} = -2$.	5		10
d)	$7 \cdot \left(\int_{-10}^{0} (-0{,}1 \cdot x^2 + 10)\, dx + \int_{0}^{5} (0{,}16 \cdot x^3 - 1{,}2 \cdot x^2 + 10)\, dx \right)$ ist zu berechnen. $\int_{-10}^{0} (-0{,}1 \cdot x^2 + 10)\, dx = \left[-0{,}1 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 + 10 \cdot x \right]_{-10}^{0} = \frac{200}{3} \approx 66{,}67$. $\int_{0}^{5} (0{,}16 \cdot x^3 - 1{,}2 \cdot x^2 + 10)dx = \left[0{,}16 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^4 - 1{,}2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 + 10x \right]_{0}^{5} = 25$. Addiert und mit 7 multipliziert: $7 \cdot 91{,}67 = 641{,}69 \approx 642$. Da alle Integralwerte positiv sind und die Graphen der „Rutsche-Funktionen“ oberhalb der x-Achse liegen, handelt es sich um die Summe der Flächeninhalte der Graphen mit der x-Achse, multipliziert mit der Breite der Rutsche. Der Term steht für das Gesamtvolumen des Erdwalls unter der Rutsche, das ca. 642 m^3 beträgt.	5	10	
e)	Der Funktionsterm muss nur mit 0,5 multipliziert werden: $h(x) = 0{,}08 \cdot x^3 - 0{,}6 \cdot x^2 + 5$. Aus $h(x) = \frac{1}{2} f(x)$ folgt $h'(x) = \frac{1}{2} f'(x)$. Da sich alle Steigungen halbieren, ist auch die Steigung an der steilsten Stelle halb so groß.	5	5	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	Den Vorgaben entspricht der Term: $f_4(x) = 0{,}16 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^3 - 1{,}2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 10 = 0{,}02x^3 - 0{,}3x^2 + 10$. Begründung entsprechend b): $\widehat{f}(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ $\widehat{f}(0) = 10 \Rightarrow d = 10$ $\widehat{f'}(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ $\widehat{f}(10) = 0 \Rightarrow 0 = 1000a + 100b + 10$ $\widehat{f'}(10) = 0 \Rightarrow 0 = 300a + 20b$ Daraus ergeben sich $a = 0{,}02$, $b = -0{,}3$, $c = 0$ und $d = 10$. Also: $\widehat{f}(x) = f_4$. *Alternative Begründungen:* - Punktprobe mit $x = 0$, $x = 10$, - Argumentation über den Streckfaktor.		10	5
g)	• Linearer Verlauf der Rutsche ab $x = 4$: Der linear verlaufende Teil der Rutsche beginnt im Punkt $(4 \mid f(4)) = (4 \mid 1{,}04)$ und hat die Steigung $f'(4) = -1{,}92$. Eingesetzt in die Geradengleichung ergibt sich $g(x) = -1{,}92 \cdot x + b$. $g(4) = 1{,}04$ und $1{,}04 = -1{,}92 \cdot 4 + b$ liefern $b = 8{,}72$. Damit gilt: $g(x) = -1{,}92 \cdot x + 8{,}72$. • Das Ende der Rutsche liegt in der Nullstelle der Geraden, also bei $x_0 = \frac{8{,}72}{1{,}92} \approx 4{,}54$. Endpunkt ist $(4{,}54 \mid 0)$.		10	5
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

Analysis 2

I.2 Bergziegen

Im Jahr 1964 wird eine kleine Anzahl vom Aussterben bedrohter Bergziegen in einem schwer zugänglichen Tal ausgesetzt, aus dem die Bergziegen nicht abwandern können. Die Bergziegen entwickeln sich prächtig, wie eine Zählung über die ersten fünf Jahre ergibt (siehe folgende Tabelle):

Jahr	1965	1966	1967	1968	1969
Anzahl Ziegen	476	906	1296	1648	1967

a)
- Bestätigen Sie, dass die Daten der Wertetabelle für die angegebenen Jahre gut durch die Funktion f_1 mit $f_1(t) = 5000 \cdot \left(1 - e^{-0{,}1\cdot(t-1964)}\right)$ wiedergegeben werden.
- Ergänzen Sie das anliegende Koordinatensystem um den Graphen von f_1 von 1964 bis 1980.
- Beschreiben Sie die Bedeutung der in der Funktion auftretenden Zahlen für die Entwicklung der Ziegenpopulation sowie den Fehler, den die Funktion für das Jahr 1964 macht. **(20P)**

In dem sehr kalten Winter 1980 wird zum Schutz des Bestandes eine ergänzende Fütterung durchgeführt, die jedoch fatale Folgen hat: Das Heu enthält ein giftiges Kraut, das bei sämtlichen erwachsenen Tieren zu schweren Leberschädigungen führt, die zum vorzeitigen Tod dieser Tiere in den nächsten Jahren führen. Aus vergleichbaren Ereignissen ist bekannt, dass sich die Anzahl der Alttiere etwa wie $a(t) = 3990 \cdot e^{-1{,}3\cdot(t-1980)}$ entwickelt.

b) Beschreiben Sie den Verlauf der Anzahl der Alttiere nach 1980 und berechnen Sie, in welcher Zeit sich ihr Bestand halbiert. **(10P)**

Die wenigen zum Zeitpunkt der Vergiftung lebenden und gesäugten Lämmer überleben die Katastrophe. Diese Lämmer begründen im Jahr 1980 eine neue Population, die sich genau so entwickelt wie die Bergziegen vor 1980, nämlich gemäß f_2 (vergleiche Anlage), wobei diese Anzahl Lämmer für den Beginn des Jahres 1980 weder von der Funktion f_2 noch von a gezählt werden, also wird auch hier ein kleiner Fehler in der Modellierung gemacht.

c) Begründen Sie, dass $n(t) = 5000 \cdot (1 - e^{-0{,}1\cdot(t-1980)}) + 3990 \cdot e^{-1{,}3\cdot(t-1980)}$ die Entwicklung der Gesamtzahl der Bergziegen in dem Tal nach 1980 sinnvoll beschreibt. **(5P)**

d) Bestimmen Sie
- die geringste Anzahl Bergziegen in der Zeit nach 1980,
- den Zeitpunkt maximalen Wachstums der Bergziegenpopulation nach 1980,
- das Langzeitverhalten der Anzahl der Bergziegen. **(35P)**

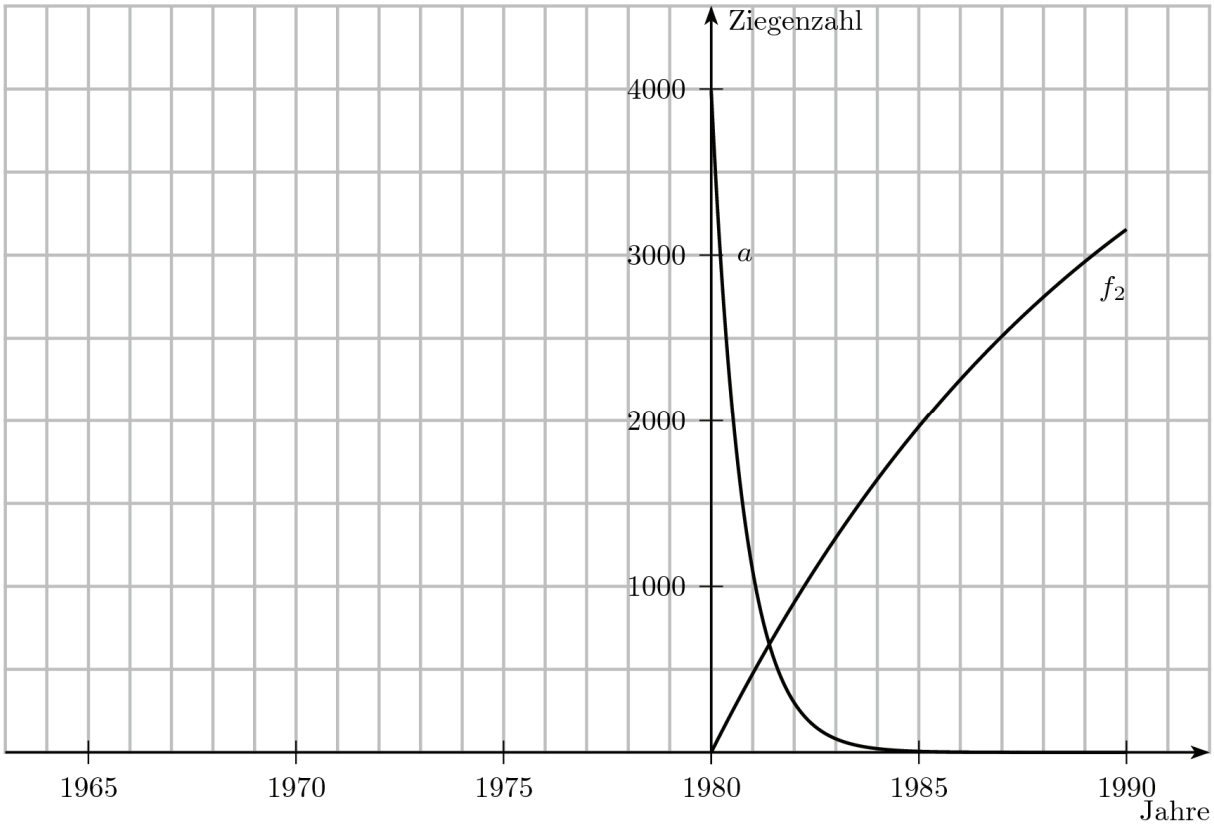
Kontrollergebnis: $n''(t) = -50 \cdot e^{-0{,}1\cdot(t-1980)} + 6743{,}1 \cdot e^{-1{,}3\cdot(t-1980)}$.

e) Bestimmen Sie die durchschnittliche Anzahl Bergziegen in der Zeit 1980 bis 1990. **(15P)**

f)
- Skizzieren Sie in der Anlage den Graphen von n.
- Beschreiben Sie die Beziehung zwischen dem Graphen von n sowie den Graphen von f_2 und a und interpretieren Sie diese im Sachkontext. **(15P)**

Hinweis: Gehen Sie dabei genauer auf das Jahr 1980 sowie auf das Langzeitverhalten ein.

Anlage zur Aufgabe „Bergziegen“

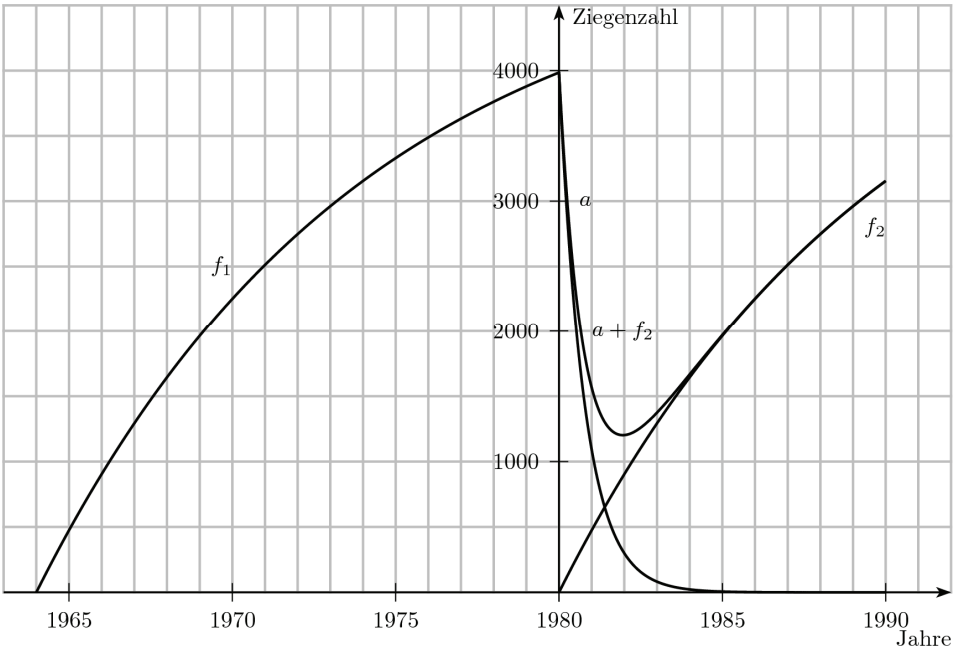


Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	• Der Nachweis kann durch Einsetzen der Jahreszahlen in den Funktionsterm leicht erbracht werden:			

1965	1966	1967	1968	1969
475,81	906,35	1295,91	1648,40	1967,35

• Grafische Darstellung von f_1:



• 5000 Ziegen können gemäß dem Funktionsterm maximal vorhanden sein, z.B. durch die räumliche Beschränkung und das begrenzte Nahrungsangebot.

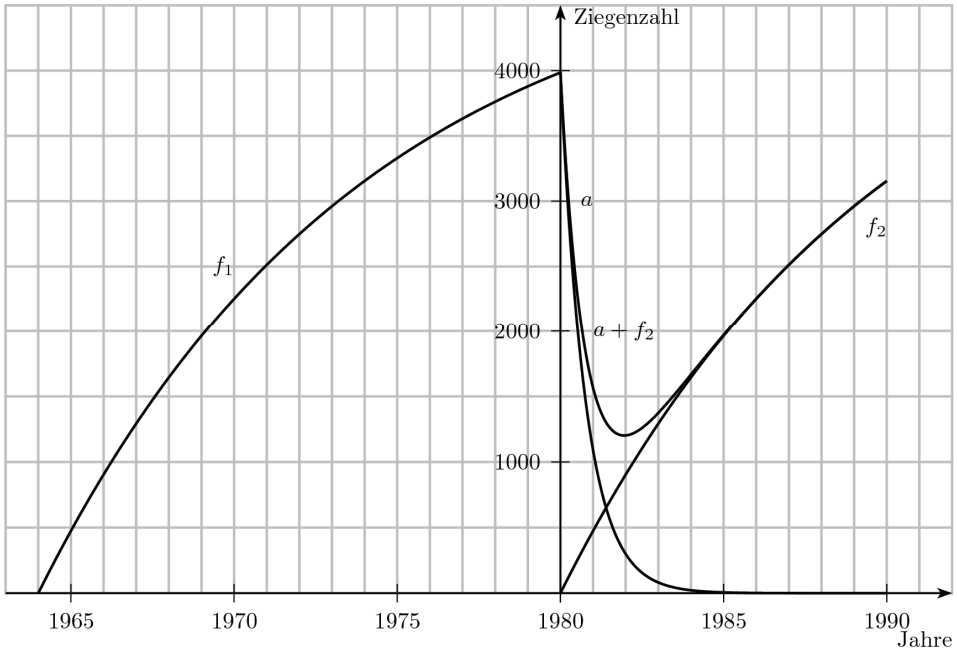
Der Summand 1 steht für 100 % dieser Grenzpopulation. Dies wird deutlich, wenn man die Klammer ausmultipliziert.

Der Faktor (–0,1) im Exponenten modelliert die Wachstumsgeschwindigkeit.

Die Jahreszahl 1964 verschiebt den Startzeitpunkt von Null auf 1964, dadurch ist der Funktionswert von 1964 Null, was nicht der Anzahl der neu angesiedelten Bergziegen entspricht. — I: 10, II: 10

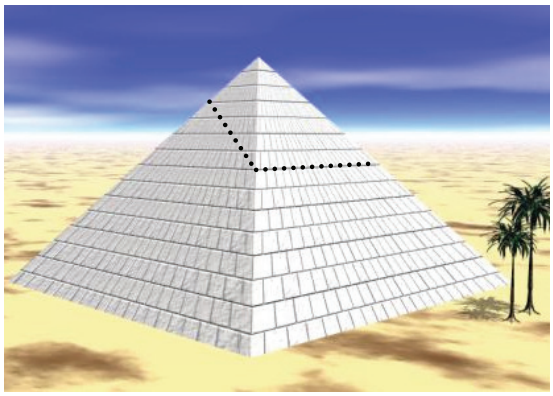
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
b)	• Die Anzahl der Alttiere sinkt exponentiell und nähert sich Null an. • Für die „Halbwertszeit“ gilt: $3990 \cdot e^{-1,3 \cdot x} = 1995$ $e^{-1,3 \cdot x} = 0,5$ $-1,3x = \ln 0,5$ $x = \frac{\ln 0,5}{-1,3}$ $x = 0,533...$ Die Anzahl der Alttiere halbiert sich etwa jeweils nach Ablauf eines halben Jahres. *Alternativrechnung:* $3990 \cdot e^{-1,3 \cdot (t-1980)} = 1995$ $e^{-1,3 \cdot (t-1980)} = 0,5$ $-1,3 \cdot (t-1980) = \ln 0,5$ $t = \frac{\ln 0,5}{-1,3} + 1980$ $t \approx 1980,53...$	5	5	
c)	$f_2(t) = 5000 \cdot (1 - e^{-0,1 \cdot (t-1980)})$ gibt die Entwicklung der Anzahl der neuen Ziegenpopulation an. Die Gesamtzahl der Ziegen ist $n(t) = f_2(t) + a(t)$ und damit die angegebene Funktion.			5
d)	$n'(t) = 500 \cdot e^{-0,1 \cdot (t-1980)} - 5187 \cdot e^{-1,3 \cdot (t-1980)}$ $n''(t) = -50 \cdot e^{-0,1 \cdot (t-1980)} + 6743,1 \cdot e^{-1,3 \cdot (t-1980)}$ $n'''(t) = 5 \cdot e^{-0,1 \cdot (t-1980)} - 8766,03 \cdot e^{-1,3 \cdot (t-1980)}$ • Zeitpunkt der geringsten Anzahl: $n'(t) = 0$. $500 \cdot e^{-0,1 \cdot (t-1980)} - 5187 \cdot e^{-1,3 \cdot (t-1980)} = 0$ $500 \cdot e^{-0,1 \cdot (t-1980)} = 5187 \cdot e^{-1,3 \cdot (t-1980)}$ $\frac{e^{-0,1 \cdot (t-1980)}}{e^{-1,3 \cdot (t-1980)}} = \frac{5197}{500}$ $e^{1,2 \cdot (t-1980)} = 10,374$ $1,2 \cdot (t-1980) = \ln 10,374$ $t = \frac{\ln 10,374}{1,2} + 1980 \approx 1981,95$			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	$n''(1981{,}95) > 0$, also Minimum. $n(1981{,}95) = 5000 \cdot (1 - e^{-0{,}1 \cdot 1{,}95}) + 3990 \cdot e^{-1{,}3 \cdot 1{,}95} = 1202{,}08...$ Die Population erreicht Ende 1981 ihren Tiefpunkt mit etwa 1 200 Tieren. • Zeitpunkt des maximalen Wachstums: $n''(t) = 0$. $-50 \cdot e^{-0{,}1 \cdot (t-1980)} + 6743{,}1 \cdot e^{-1{,}3 \cdot (t-1980)} = 0$ $6743{,}1 \cdot e^{-1{,}3 \cdot (t-1980)} = 50 \cdot e^{-0{,}1 \cdot (t-1980)}$ $\frac{e^{-1{,}3 \cdot (t-1980)}}{e^{-0{,}1 \cdot (t-1980)}} = \frac{50}{6743{,}1}$ $e^{1{,}2 \cdot (t-1980)} = 134{,}862$ $1{,}2 \cdot (t - 1980) = \ln 134{,}862$ $t = \frac{\ln 134{,}862}{1{,}2} + 1980 \approx 1984{,}09$ $n'''(1984{,}09) \neq 0$. Also liegt der Zeitpunkt maximalen Wachstums Anfang 1984. • $n(t) = 5000 \cdot (1 - e^{-0{,}1 \cdot (t-1980)}) + 3990 \cdot e^{-1{,}3 \cdot (t-1980)}$. Langfristig geht der zweite Summand der Funktion gegen Null, der erste gegen 5000, damit nähert sich der Bestand der Grenze 5000 an.	10	25	
e)	Es ist das Integral von 1980 bis 1990 über n zu bestimmen und durch 10 Jahre zu teilen. Eine Stammfunktion lautet (andere sind natürlich auch richtig): $N(t) = 5000(t - 1980) + 50000e^{-0{,}1 \cdot (t-1980)} - \frac{39900}{13} \cdot e^{-1{,}3 \cdot (t-1980)}$ $N(1980) = 50000 - \frac{39900}{13} \approx 46931$. $N(1990) = 50000 + 50000e^{-1} - \frac{39900}{13} \cdot e^{-13} \approx 68394$. Durchschnittswert: $\frac{68394 - 46931}{10} = 2146{,}3$. Damit beträgt die durchschnittliche Populationsgröße etwa 2146 Tiere. *Sollte statt des Integrals hier die Summe von zehn oder elf Jahreswerten verwendet werden (also eine Riemannsumme), so ist die volle Punktzahl zu erteilen.*		10	5

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	• Graph der Funktion n:  • Der Graph von n ist die Summe der Graphen von f_2 und a. In der Nähe von 1980 verläuft der Graph von n nahezu auf dem Graphen von a, für größere Zeiten nähert sich der Graph von n asymptotisch an den Graphen von f_2 an, da die alten Ziegen anfänglich die Gesamtzahl bestimmen, dann aber aussterben und nur noch die neue Population die gesamte Ziegenanzahl ausmacht.	5		10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

LA/AG 1

II.1 Grabstätte eines Pharaos



Die Grabstätte eines Pharaos hat die Form einer senkrechten quadratischen Pyramide. Die quadratische Grundfläche ist durch die Eckpunkte $A(80|0|0)$, $B(80|80|0)$, $C(0|80|0)$ und $D(0|0|0)$ bestimmt, die Spitze durch den Punkt $S(40|40|80)$.

Im oberen Bereich ist ein Teil der Pyramide abgetragen worden. Die obere Fläche des verbliebenen Pyramidenstumpfes ist ein Viereck mit den Eckpunkten $E(50|30|60)$, $F(60|60|40)$, $G(20|60|40)$ und $H(30|30|60)$.

In der Anlage zur Aufgabe finden Sie eine Skizze der Pyramide. Eine Einheit entspricht 1 m in der Realität.

a) • Bestätigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene E_1 durch die Punkte B, C und S ist.

• Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene.
(*Zur Kontrolle:* E_1: $2x_2 + x_3 - 160 = 0$). **(15P)**

b) Betrachten Sie die ursprüngliche Pyramide $ABCDS$.
Berechnen Sie ihr Volumen und bestimmen Sie den Inhalt ihrer Mantelfläche. **(15P)**

c) Die Punkte E, F, G und H liegen auf den vier Seitenkanten der ursprünglichen Pyramide.

• Bestätigen Sie exemplarisch für den Punkt E, dass er tatsächlich auf der Kante $\overline{AS}$ liegt, wie in der Skizze in der Anlage zu sehen ist.

• Zeigen Sie, dass die Punkte E, F, G und H in einer Ebene E_2 liegen, und bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E_2. (*Zur Kontrolle:* E_2: $2x_2 + 3x_3 - 240 = 0$)

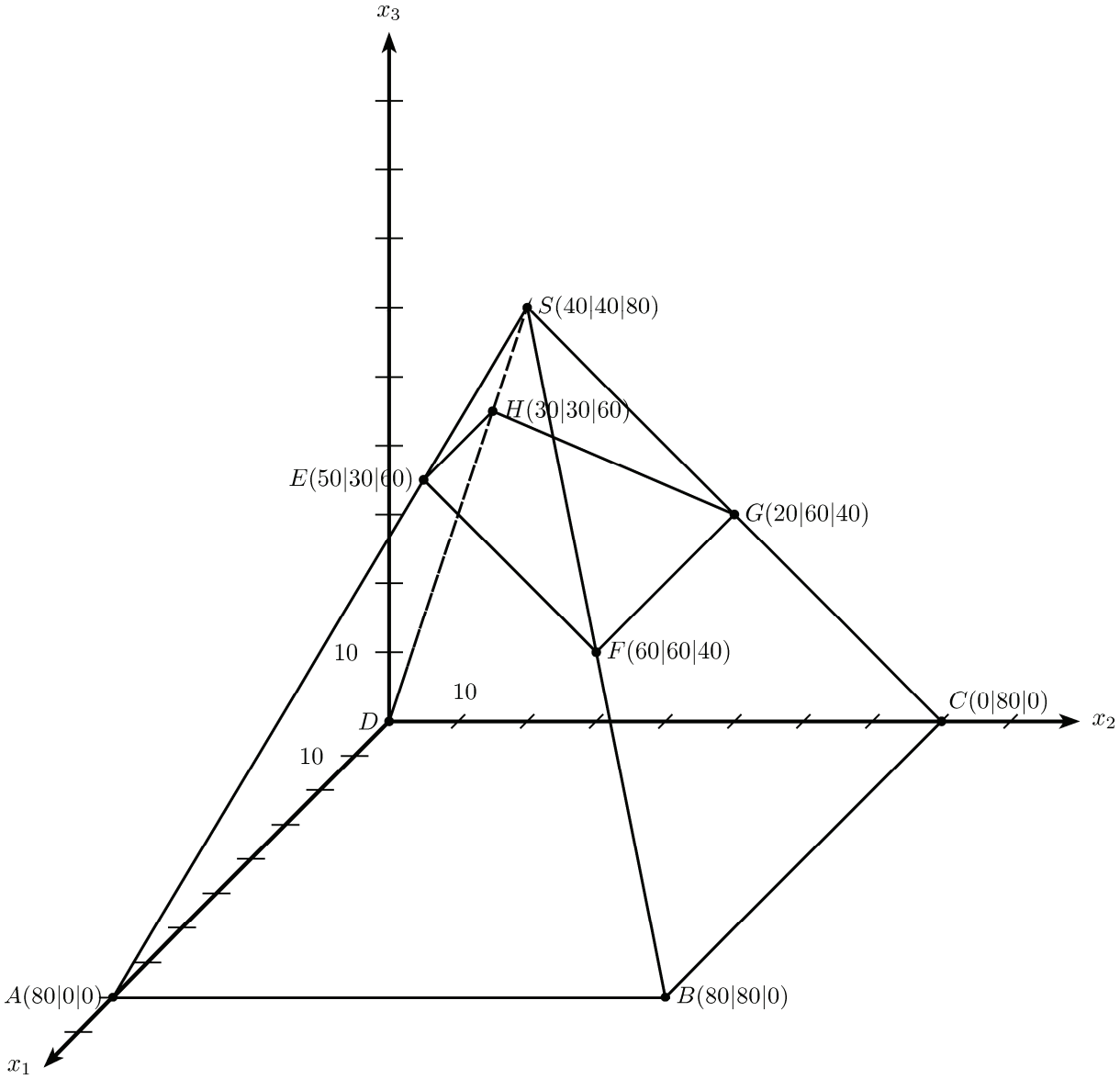
• Ermitteln Sie den Schnittwinkel der Ebenen E_1 und E_2. **(30P)**

d) Weisen Sie nach, dass das Viereck $EFGH$ ein Trapez ist, und bestimmen Sie den Abstand der parallelen Seiten sowie den Flächeninhalt des Trapezes. **(20P)**

e) Im Innern der ursprünglichen Pyramide ist die Grabkammer des Pharaos. Q sei der Mittelpunkt der Kammer. Ein Archäologe bestimmt die Koordinaten von Q mit $(40|40|24{,}72)$. Er vermutet, dass Q von den Seitenwänden und von der Grundfläche $ABCD$ jeweils den gleichen Abstand hat.

Begründen Sie, dass es bei den Seitenwänden reicht, lediglich eine Wand zu betrachten, und weisen Sie nach, dass der Archäologe Recht hat. **(20P)**

Anlage zur Aufgabe „Grabstätte eines Pharaos“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Koordinatengleichung der Ebene E_1: $\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}80\\0\\0\end{pmatrix}=80\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{SB}=\begin{pmatrix}40\\40\\-80\end{pmatrix}=40\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}.$ Ein Normalenvektor $\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$ muss senkrecht auf den Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ stehen, es muss also gelten: $\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=0$ und $\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=0$. Dies liefert die beiden Gleichungen $n_1=0$ $n_1+n_2-2n_3=0$ Wir wählen $n_3=1$ und erhalten dann $n_2=2$. Der Nachweis gilt natürlich auch als erbracht, wenn gezeigt wird, dass die Skalarprodukte des Vektors $\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ mit zwei linear unabhängigen Vektoren der Ebene jeweils 0 ergeben. *Die Bildung des Kreuzprodukts* $\overrightarrow{n_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ *liefert selbstverständlich auch das gewünschte Ergebnis.* Da nun ein Normalenvektor bekannt ist, ergibt sich die folgende Gleichung für die Ebene E_1: $2x_2+x_3+c=0$. Wir bestimmen c durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes. $C(0\|80\|0)$: $160+c=0$. Es folgt $c=-160$ und für die Ebenengleichung E_1: $2x_2+x_3-160=0$.	10	5	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
b)	Volumen und Mantel der Pyramide *ABCS*: $V=\frac{1}{3}\cdot G\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 80^2\cdot 80=170\,666,\overline{6}$. Das Volumen der Pyramide beträgt ca. 170 667 m^3. Der Mantel der Pyramide besteht aus vier gleichen gleichschenkligen Dreiecken. Aus den Werten der x_1 und x_2 Koordinaten der Punkte *A, B, C* und D folgt: Für die Länge der Grundseite eines solchen Dreiecks gilt: $g=80$ m. Die Dreieckshöhe berechnet sich am einfachsten nach dem Satz des Pythagoras. Der Mittelpunkt der quadratischen Grundfläche, die Spitze und der Mittelpunkt der Grundseite eines Dreiecks bilden ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse die gesuchte Höhe ist. $80^2+40^2=h^2$ $h=\sqrt{8000}$. Entsprechend gilt für die Mantelfläche: $M=4\cdot\frac{1}{2}\cdot 80\cdot\sqrt{8000}=14310{,}84$. Der Inhalt der Mantelfläche der Pyramide beträgt ca. 14 311 m^2.	10	5	
c)	<u>Lage des Punktes *E*:</u> Die Gerade durch die Punkte *A* und *S* ist gegeben durch die Gleichung: $\vec{x}=\begin{pmatrix}80\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-40\\40\\80\end{pmatrix}$. Das Gleichungssystem $\begin{pmatrix}80\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-40\\40\\80\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}50\\30\\60\end{pmatrix}$ liefert für *r* die Lösung 0,75. Somit liegt der Punkt $E(50\,\vert\,30\,\vert\,60)$ auf der Geraden durch die Punkte *A* und *S*. <u>*E, F, G* und *H* Punkte einer Ebene E_2:</u> Wir ermitteln eine Gleichung der Ebene E_2 durch die Punkte $E(50\,\vert\,30\,\vert\,60)$, $F(60\,\vert\,60\,\vert\,40)$, $G(20\,\vert\,60\,\vert\,40)$. Ein Normalenvektor $\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$ der Ebene muss senkrecht auf			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	$\overrightarrow{EF}=\begin{pmatrix}10\\30\\-20\end{pmatrix}=10\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{GF}=\begin{pmatrix}40\\0\\0\end{pmatrix}=40\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ stehen, es müssen also die beiden Gleichungen $n_1+3n_2-2n_3=0$ und $n_1=0$ erfüllt sein. Wegen $3n_2=2n_3$ wählen wir $n_3=3$ und $n_2=2$. *Natürlich lässt sich auch hier mit dem Kreuzprodukt arbeiten:* $\overrightarrow{n_2}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\-3\end{pmatrix}$. Wir erhalten die folgende allgemeine Ebenengleichung: E_2: $2x_2+3x_3+c=0$. Einsetzen eines Punktes liefert *c*. $E(50\|30\|60)$: $60+180+c=0$. Es folgt: $c=-240$. Die Ebenengleichung lautet somit: E_2: $2x_2+3x_3-240=0$. Wir prüfen, ob $H(30\|30\|60)$ in E_2 liegt, indem wir die Koordinaten in die Ebenengleichung einsetzen: $60+180-240=0$. Mit der Richtigkeit dieser Aussage ist der gewünschte Nachweis erbracht. Schnittwinkel der Ebenen E_1 und E_2: $\cos\alpha=\dfrac{\left\|\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}\right\|}=\dfrac{7}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}}\Rightarrow\alpha=29{,}74°$. Die Ebenen schneiden sich unter einem Winkel von ca. 30°.	10	20	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	<u>Trapez *EFGH*:</u> Für die beiden Vektoren $\overrightarrow{FG}$ und $\overrightarrow{EH}$ gilt: $\overrightarrow{FG}=\begin{pmatrix}-40\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EH}=\begin{pmatrix}-20\\0\\0\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{FG}$ ist also ein Vielfaches von $\overrightarrow{EH}$ und *EFGH* damit ein Trapez. <u>Höhe und Fläche des Trapezes:</u> Die Länge des Verbindungsvektors der Mittelpunkte M_1 und M_2 der Trapezkanten $\overline{FG}$ und $\overline{EH}$ ist die gesuchte Höhe des Trapezes. Wir berechnen zunächst die Koordinaten der Mittelpunkte der Trapezkanten: Mittelpunkt M_1 von $\overline{FG}$: $\overrightarrow{m_1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{f}+\vec{g}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix}60\\60\\40\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}20\\60\\40\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}40\\60\\40\end{pmatrix}$. Mittelpunkt M_2 von $\overline{EH}$: $\overrightarrow{m_2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{e}+\vec{h}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix}50\\30\\60\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}30\\30\\60\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}40\\30\\60\end{pmatrix}$. Mit $\overrightarrow{M_1M_2}=\begin{pmatrix}40\\30\\60\end{pmatrix}-\begin{bmatrix}40\\60\\40\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-30\\20\end{pmatrix}$ folgt für die Höhe des Trapezes $h=\lvert M_1M_2\rvert=\sqrt{(-30)^2+20^2}=10\cdot\sqrt{13}=36{,}055...$ Die Höhe des Trapezes beträgt 36,06 m. Für die beiden parallelen Seiten gilt: $\lvert FG\rvert=40(\text{m})$ und $\lvert EH\rvert=20(\text{m})$. Damit erhalten wir für die Fläche des Trapezes $A_T=\frac{40+20}{2}\cdot 10\cdot\sqrt{13}=1081{,}66...$. Der Flächeninhalt des Trapezes beträgt ca. 1 082 m^2.		10	10

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	Überprüfung der Vermutung: Der Punkt $Q(40 \mid 40 \mid 24{,}72)$ hat von der Grundfläche den Abstand 24,72 m. Da der Punkt auf der Mittelachse der Pyramide liegt, hat er gleichen Abstand von allen vier Seitenflächen. Wir berechnen stellvertretend den Abstand des Punktes Q von der Ebene E_1. Der Vektor $\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ ist Normalenvektor von E_1. Für die Gerade s durch Q, die zur Ebene E_1 senkrecht liegt, gilt somit: $s:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}40\\40\\24{,}72\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$. Einsetzen dieser Koordinaten in die Gleichung der Ebene E_1 liefert: $2\cdot(40+2r)+24{,}72+r-160=0$ $5r=160-80-24{,}72$ $5r=55{,}28$ $r=11{,}056$. Dies liefert den Schnittpunkt: $I\,(40 \mid 62{,}112 \mid 35{,}776)$. Der Vektor $\overrightarrow{QI}=\begin{pmatrix}40\\62{,}112\\35{,}776\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}40\\40\\24{,}72\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\22{,}112\\11{,}056\end{pmatrix}$ hat die Länge $\sqrt{22{,}112^2+11{,}056^2}=24{,}721\ldots$. Damit erweist sich die Vermutung des Archäologen als richtig. Der jeweils gleiche Abstand zu den Seitenwänden und zur Grundfläche beträgt 24,72 m. *Alternative:* *Der Abstand des Punktes Q von der Ebene E_1 lässt sich natürlich auch ermitteln, indem die Koordinaten von Q in die Abstandsformel der Hesse'schen Normalenform eingesetzt werden:* $d(Q, E_1)=\left\lvert\frac{80+24{,}72-160}{\sqrt{5}}\right\rvert\approx 24{,}72$.		10	10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

LA/AG 2

II.2 Silberfischchenpopulation

Das Silberfischchen (Lepisma saccharina) ist ein flinkes, lichtscheues und flügelloses Insekt, das seinen Namen durch seinen silbergrauen, stromlinienförmigen Körper bekommen hat.
Das junge Silberfischchen **(J)** braucht in Abhängigkeit von den Lebensbedingungen bis zur Geschlechtsreife etwa sechs Monate. Dieses zweite Stadium, die Zeit des reifen Silberfischchens **(R)**, erreichen zwar nur ca. 2 % der jungen Silberfischchen, dafür vermehren sich diese reifen Silberfischchen so, dass sie etwa 100 Nachkommen haben, bevor sie sich innerhalb eines weiteren Halbjahres zu einem ausgewachsenen Insekt, dem alten Silberfischchen **(A)**, entwickeln.
In diesem ebenfalls ca. sechsmonatigen letzten Abschnitt, den ca. 25 % der reifen Silberfischchen erreichen, produziert ein altes Silberfischchen etwa 50 Nachkommen, bevor es sich zur Ruhe legt.

<u>Wichtig:</u> Runden Sie ihre Ergebnisse erst bei der Gesamtpopulation auf ganzzahlige Werte.

a) • Begründen Sie, dass das beschriebene Modell der Populationsentwicklung durch die Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 50 \\ 0{,}02 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$$

angegeben wird.

• Zeichnen Sie den Übergangsgraphen für die Populationsentwicklung der Silberfischchen. **(15P)**

In einer Tiefgarage befinden sich 800 junge, 60 reife und 20 alte Silberfischchen.
Die folgende Tabelle gibt den gerundeten Gesamtbestand der Silberfischchenpopulation nach Ablauf von 3 bis 9 Halbjahren an:

Zeit (Halbjahre)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Summe	880			14282	6746	29188	17062	60061	41421	124388

b) • Berechnen Sie die Populationsentwicklung für die ersten beiden Halbjahre und ergänzen Sie die fehlenden Werte in der Tabelle.

• Stellen Sie die Entwicklung der Gesamtpopulation in dem beigefügten Koordinatensystem grafisch dar und beschreiben Sie den Verlauf des Graphen. **(20P)**

c) Bestätigen Sie mit Hilfe der Matrix L^2, dass sich die Population nach dem gegebenen Modell am Ende des vierten Halbjahres rechnerisch aus 6450 jungen, 284 reifen und 11,75 alten Silberfischchen zusammensetzt. **(15P)**

Um der Plage Herr zu werden, werden in der befallenen Tiefgarage nach dem vierten Halbjahr kurzzeitig Köderdosen aufgestellt, welche die Anzahl der jungen Silberfischchen im Mittel um 60 %, die Anzahl der reifen Silberfischchen im Mittel um 40 % und die Anzahl der alten Silberfischchen im Mittel um 50 % reduzieren. Dieser Vorgang wird am Ende der folgenden Halbjahre wiederholt.

d) Begründen Sie, dass der Einfluss der Köderdosen durch die folgende Matrix K beschrieben werden kann, und berechnen Sie mit Hilfe der Matrix K den Bestand am Ende des 4. Halbjahres *(aus Teilaufgabe c))* nach Einsatz der Köderdosen:

$$K = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$ **(10P)**

e)
- Bestimmen Sie eine neue Populationsmatrix N, welche die Populationsentwicklung während eines halben Jahres bei Einsatz der Köderdosen beschreibt.
- Beurteilen Sie auf der Grundlage geeigneter Rechnungen, ob durch diese Maßnahme das weitere Anwachsen der Silberfischchenpopulation verhindert werden kann.
- Leiten Sie eine Prognose für die langfristige Entwicklung der in Teilaufgabe c) genannten Population her. **(15P)**

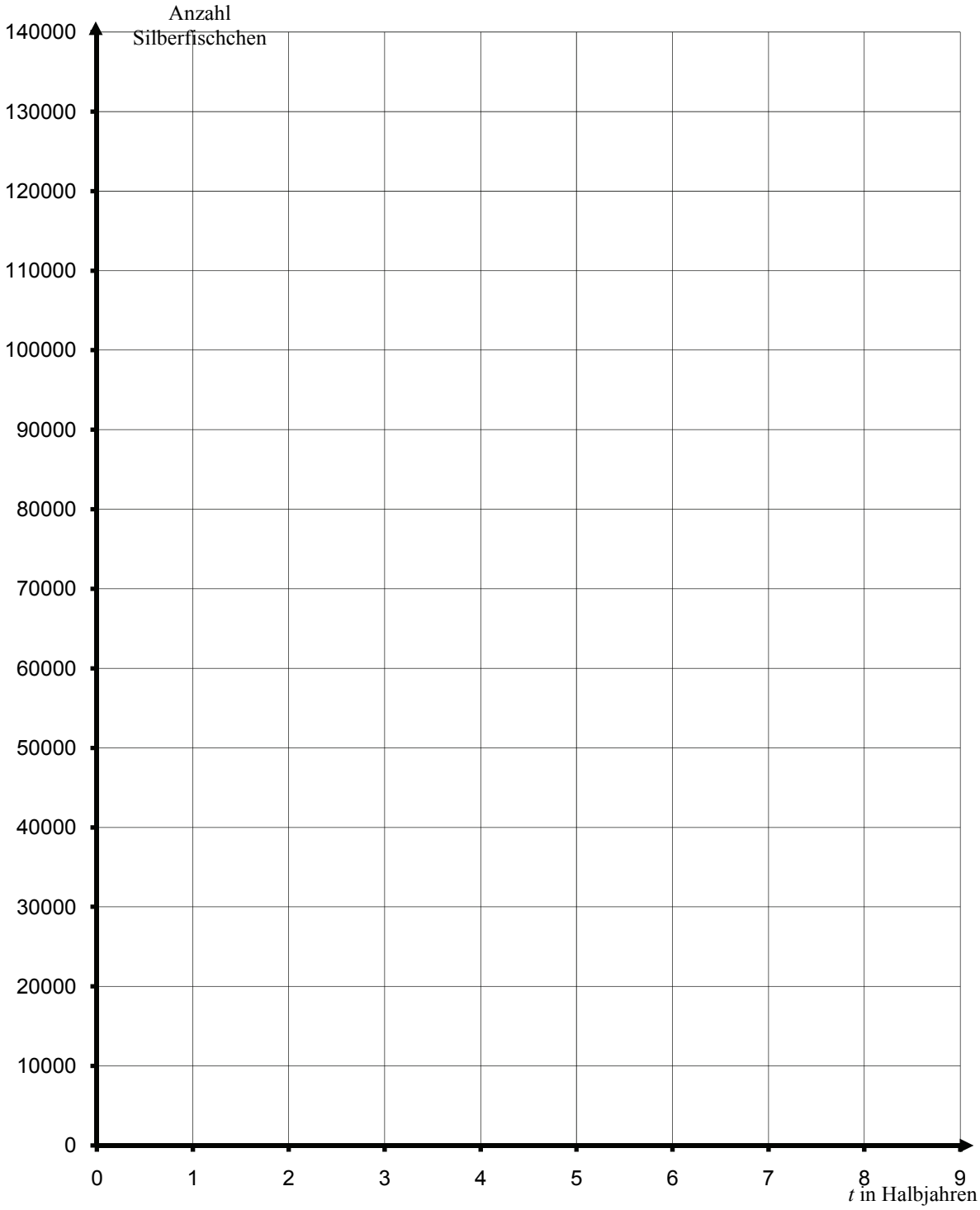
f) Ermitteln Sie mit Hilfe der Matrix L rechnerisch, ob es nach dem Modell eine Population geben kann, die sich halbjährlich reproduziert, also sich auch ohne weitere Maßnahmen nicht mehr verändert. **(15P)**

Nimmt man den Bestand am Ende des dritten Halbjahres als neuen Anfangsbestand zum Zeitpunkt $t = 0$ und betrachtet man den Bestand am Ende der folgenden drei Jahre, so ergibt sich die Tabelle:

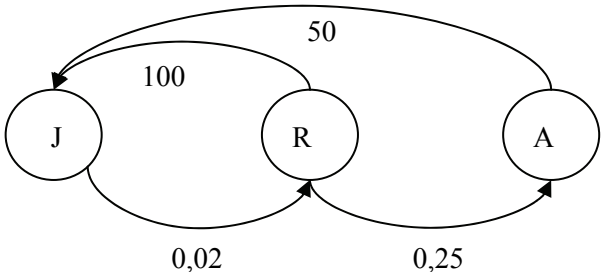
t in Jahren	0	1	2	3
$B(t)$	14 282	29 188	60 061	124 388

g) Zeigen Sie, dass die Silberfischchenpopulation näherungsweise exponentiell wächst, wenn man nur diese Bestände zu Grunde legt. **(10P)**

Anlage zur Aufgabe „Silberfischchenpopulation“



Erwartungshorizont

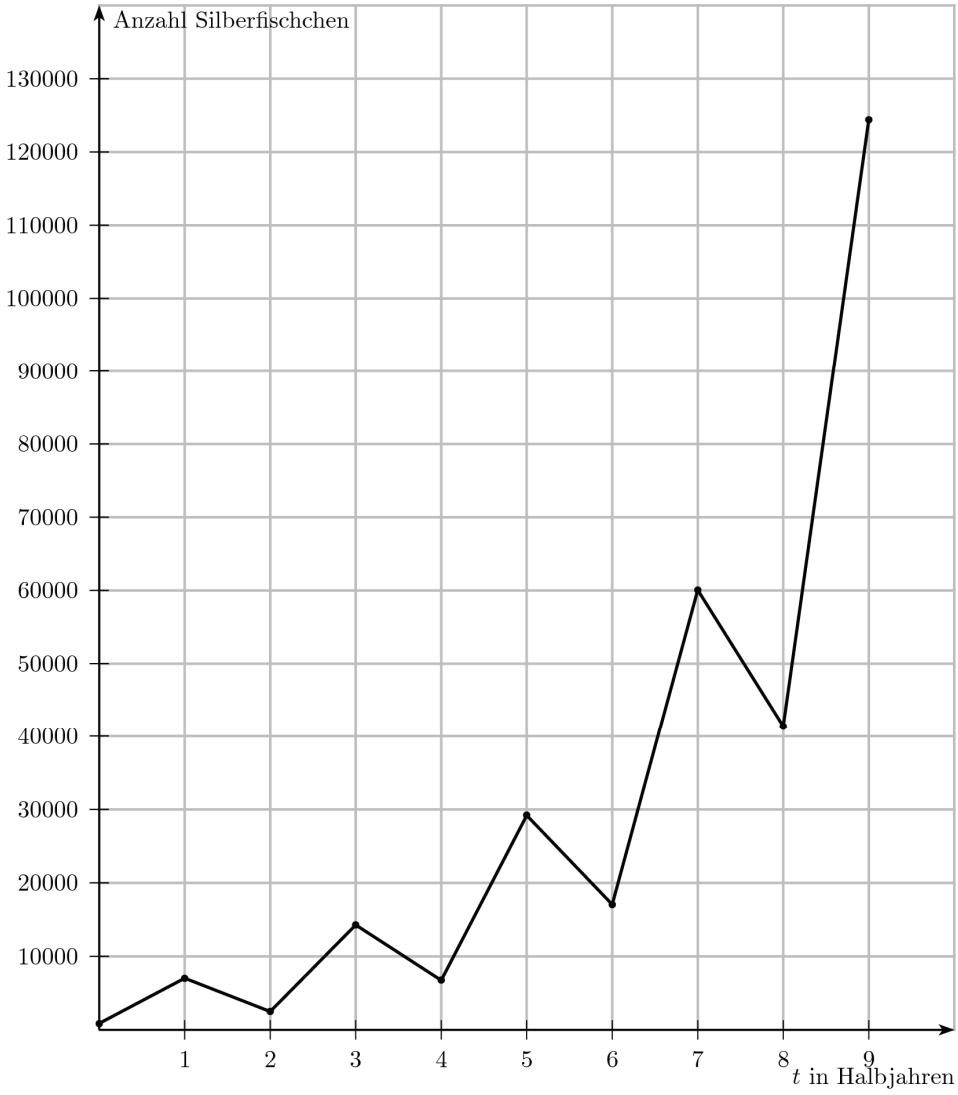
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	**Übergangsgraph und Populationsmatrix**  $L = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 50 \\ 0{,}02 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$ In der ersten Zeile der Populationsmatrix stehen die Vermehrungsraten für die einzelnen Entwicklungsstadien: Die reifen Silberfischchen produzieren Eier, aus denen durchschnittlich 100 junge Silberfischchen hervorgehen; die alten Silberfischchen produzieren Eier, aus denen durchschnittlich 50 junge Silberfischchen hervorgehen. Unterhalb der Hauptdiagonale stehen die Überlebensraten beim Übergang in die nächste Entwicklungsstufe: 2 % der jungen Silberfischchen entwickeln sich innerhalb von 6 Monaten zu reifen Silberfischchen; 25 % der reifen Silberfischchen entwickeln sich innerhalb von 6 Monaten zu alten Silberfischchen.	5	10	
b)	**Berechnung der Populationsentwicklung** $\vec{b}_0 = \begin{pmatrix} 800 \\ 60 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 50 \\ 0{,}02 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$ $\vec{b}_1 = L \cdot \vec{b}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 50 \\ 0{,}02 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 800 \\ 60 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7000 \\ 16 \\ 15 \end{pmatrix}$ $\vec{b}_2 = L \cdot \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2350 \\ 140 \\ 4 \end{pmatrix}$			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III

Gesamtpopulation gerundet:

Zeit (Halbjahre)	0	**1**	**2**	3	4	5	6	7	8	9
Summe	880	**7031**	**2494**	14282	6746	29188	17062	60061	41421	124388

Graph der Populationsentwicklung



Die Verbindungslinien zwischen den Punkten sind mathematisch eigentlich nicht korrekt und dienen nur der besseren Veranschaulichung. Sie sind von den Schülern nicht gefordert!

Die Silberfischchenpopulation wächst langfristig über alle Grenzen. Im Jahresrhythmus steigt die Gesamtpopulation jeweils an, obwohl vom Ende des 1. zum Ende des 2. Halbjahres, vom Ende des 3. zum Ende des 4. Halbjahres usw. ein Rückgang festzustellen ist.

I	II	III
15	5	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
c)	**Berechnung der Populationsverteilung nach vier Halbjahren:** $L=\begin{pmatrix}0 & 100 & 50\\ 0{,}02 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}25 & 0\end{pmatrix}$ $L^2=\begin{pmatrix}0 & 100 & 50\\ 0{,}02 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}25 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 100 & 50\\ 0{,}02 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}25 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 12{,}5 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0{,}005 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $L^4=\begin{pmatrix}2 & 12{,}5 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0{,}005 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 12{,}5 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0{,}005 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 50 & 12{,}5\\ 0{,}005 & 4 & 2\\ 0{,}01 & 0{,}0625 & 0\end{pmatrix}$ $\vec{b}_4=L^4\cdot\vec{b}_0=\begin{pmatrix}4 & 50 & 12{,}5\\ 0{,}005 & 4 & 2\\ 0{,}01 & 0{,}0625 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}800\\ 60\\ 20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6450\\ 284\\ 11{,}75\end{pmatrix}$ *Alternative:* Doppelte Anwendung von L^2 oder Anwendung von L^2 auf $\vec{b}_2$.	5	10	
d)	**Begründung** Die Matrix K ist eine Diagonalmatrix, deren Multiplikation mit einem Vektor zu einer Vergrößerung bzw. Verkleinerung der einzelnen Vektorkomponenten führt. Eine Reduktion um 60 % der jungen Silberfischchen wird durch den Faktor 0,4 ausgedrückt, die Reduktion um 40 % der reifen Silberfischchen durch den Faktor 0,6 und die Reduktion um 50 % der alten Silberfischchen durch den Faktor 0,5. $K=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}6 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}5\end{pmatrix}$ $\vec{b}_{4neu}=K\cdot\vec{b}_4=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}6 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6450\\ 284\\ 11{,}75\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2580\\ 170{,}4\\ 5{,}875\end{pmatrix}$	5	5	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
e)	**Entwicklung und Anwendung einer neuen Übergangsmatrix** $\vec{b}_{4neu} = \begin{pmatrix} 2580 \\ 170,4 \\ 5,875 \end{pmatrix}$ $\quad K = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$ $N = K \cdot L = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 100 & 50 \\ 0,02 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 40 & 20 \\ 0,012 & 0 & 0 \\ 0 & 0,125 & 0 \end{pmatrix}$ *Hinweis: Die Definition der neuen Übergangsmatrix als $N_2 = L \cdot K \cdot K$ scheidet aus, da man die Köderdosen erst kurz nach dem Ende eines Halbjahres aufstellt. Sie wirken also näherungsweise sofort auf den Bestand nach der Taktrate „halbes Jahr“.* $\vec{b}_{5neu} = N \cdot \vec{b}_{4neu} = \begin{pmatrix} 0 & 40 & 20 \\ 0,012 & 0 & 0 \\ 0 & 0,125 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2580 \\ 170,4 \\ 5,875 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6933,5 \\ 30,96 \\ 21,3 \end{pmatrix}$ $\vec{b}_{6neu} = N \cdot \vec{b}_{5neu} = \begin{pmatrix} 0 & 40 & 20 \\ 0,012 & 0 & 0 \\ 0 & 0,125 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6933,5 \\ 30,96 \\ 21,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1664,4 \\ 83,202 \\ 3,87 \end{pmatrix}$ Die Population stirbt langfristig aus, weil die Anzahl der Silberfischchen in jedem Entwicklungsstadium vom Ende des 4. Halbjahres bis zum Ende des 6. Halbjahres deutlich abnimmt. Also wird sich auch die Population zum Ende des 8., 10. usw. Halbjahres weiter verringert haben. *Auch Rechnungen unter Verwendung des unter c) angegebenen bzw. ermittelten Bestandsvektors* $\begin{pmatrix} 6450 \\ 284 \\ 11,75 \end{pmatrix}$ *sind anzuerkennen.*		5	10
f)	**Untersuchung auf konstante Population** $\begin{pmatrix} 0 & 100 & 50 \\ 0,02 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 100x_2 + 50x_3 = x_1 \\ 0,02x_1 = x_2 \\ 0,25x_2 = x_3 \end{matrix}$ $\Leftrightarrow 100 \cdot 0,02x_1 + 50 \cdot 0,25 \cdot 0,02x_1 = x_1$ $\Leftrightarrow 2,25x_1 \neq x_1$ Die Gleichung ist also falsch, sofern die Ausgangspopulation nicht den Bestand Null besitzt. Daher gibt es keine Population, die sich mit L selbst reproduziert.		10	5

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
g)	**Nachweis des exponentiellen Wachstums** Wenn es sich um eine Exponentialfunktion der Form $f(t) = c \cdot a^t$, t in Jahren, $t \geq 0$ handelt, gibt es einen gemeinsamen Faktor, mit dem der jeweils nachfolgende Bestand aus dem Vorgänger berechnet werden kann: $a_{35} = \frac{B_5}{B_3} = \frac{29188}{14282} \approx 2{,}04$ $\quad a_{57} = \frac{B_7}{B_5} = \frac{60061}{29188} \approx 2{,}06$ $a_{79} = \frac{B_9}{B_7} = \frac{124388}{60061} \approx 2{,}07$ Es handelt sich näherungsweise um exponentielles Wachstum mit dem Wachstumsfaktor $a \approx 2$.		5	5
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

STOCHASTIK 1

III.1 Manhattan

Der Tourist Thomas Sumner steigt in Manhattan an der Ecke der 3rd Avenue und der East 14th Street aus der U-Bahn **M** (siehe Karte in der Anlage 1 bzw. vereinfachte Karte in Anlage 2). Er möchte tendenziell in östlicher und südlicher Richtung gehen, hat aber keine genaue Planung für seinen Weg.

So entschließt er sich, beginnend bei **M** an jeder Ecke eine Münze zu werfen und bei KOPF in Richtung Ost-Süd-Ost zu gehen, bei ZAHL in Richtung Süd-Süd-West.

a)
- Ergänzen Sie die Anlage 2 um ein Baumdiagramm (ohne Wahrscheinlichkeiten), das Thomas` mögliche Wege über 4 Münzwürfe hinweg enthält.
- Geben Sie zu jeder Ecke im Baumdiagramm die Anzahl der verschiedenen Wege an, die vom Startpunkt zu dieser Ecke führen.
- Berechnen Sie die Anzahl der Wege bis zur Nordecke des „Tompkins Square Park“ und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Thomas diese Ecke erreicht. **(20P)**

Thomas wirft ZAHL, bemerkt aber nach wenigen Metern Weg entlang der 3rd Avenue, dass die Streets einen kleineren Abstand voneinander haben als die Avenues. Damit er tendenziell in beide Richtungen gleich weit vorankommt, entscheidet sich Thomas, in Richtung Ost-Süd-Ost mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{4}$ zu gehen und mit der Wahrscheinlichkeit $q = \frac{3}{4}$ in Richtung Süd-Süd-West.

b) Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem Thomas die Wahrscheinlichkeiten p und q mit Hilfe von zwei Münzen erzeugen kann, und ergänzen Sie die Wahrscheinlichkeiten in Ihrem Baumdiagramm. **(5P)**

c) Begründen Sie, dass die angenommenen Wahrscheinlichkeiten dem Wunsch von Thomas gerecht werden. Der Abstand zwischen zwei Streets ist hier ca. 70 m, der Abstand zwischen zwei Avenues ca. 210 m. **(15P)**
(*Hinweis: Eine Skizze kann die Argumentation sinnvoll unterstützen.*)

d) Bestimmen Sie mit Hilfe von p und q die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass
- Thomas den FDR-Drive (Franklin Delano Roosevelt) am Wasser (rechts auf der Karte) auf **geradem** Weg erreicht,
- Thomas die Nordecke des Tompkins Square Park erreicht,
- Thomas die Ostecke des Tompkins Square Park erreicht, ohne vorher an der Nordecke gewesen zu sein,
- Thomas die Westecke des Tompkins Square Park erreicht. Dabei würde Thomas an den Punkten A und B keine Münzen werfen, da er nicht in den Park hinein gehen will. **(25P)**

Tatsächlich gerät Thomas zur Ecke Avenue A und 5th Street. Dort trifft er einen Bekannten, dem er von seinem Verfahren und seinem Startpunkt erzählt, jedoch nicht davon, wo er genau entlang gekommen ist.

e) Nachdem sich die beiden voneinander verabschiedet haben, fragt sich der Bekannte, ob Thomas auch das Schuhgeschäft „Footgear Plus“ gesehen hat.
Der Bekannte schließt bei seinen Überlegungen nicht aus, dass Thomas auch an den Punkten A und B die Münze geworfen hat und gegebenenfalls auch quer durch den Park gegangen ist.

Bestimmen Sie aus Sicht des Bekannten die Wahrscheinlichkeit, dass Thomas bei „Footgear Plus“ an der Ecke 1st Avenue und St Marks Place (siehe **x** in Anlage 2) vorbei gekommen ist, und zeigen Sie,dass das Ergebnis nicht von p und q abhängig ist. **(20P)**

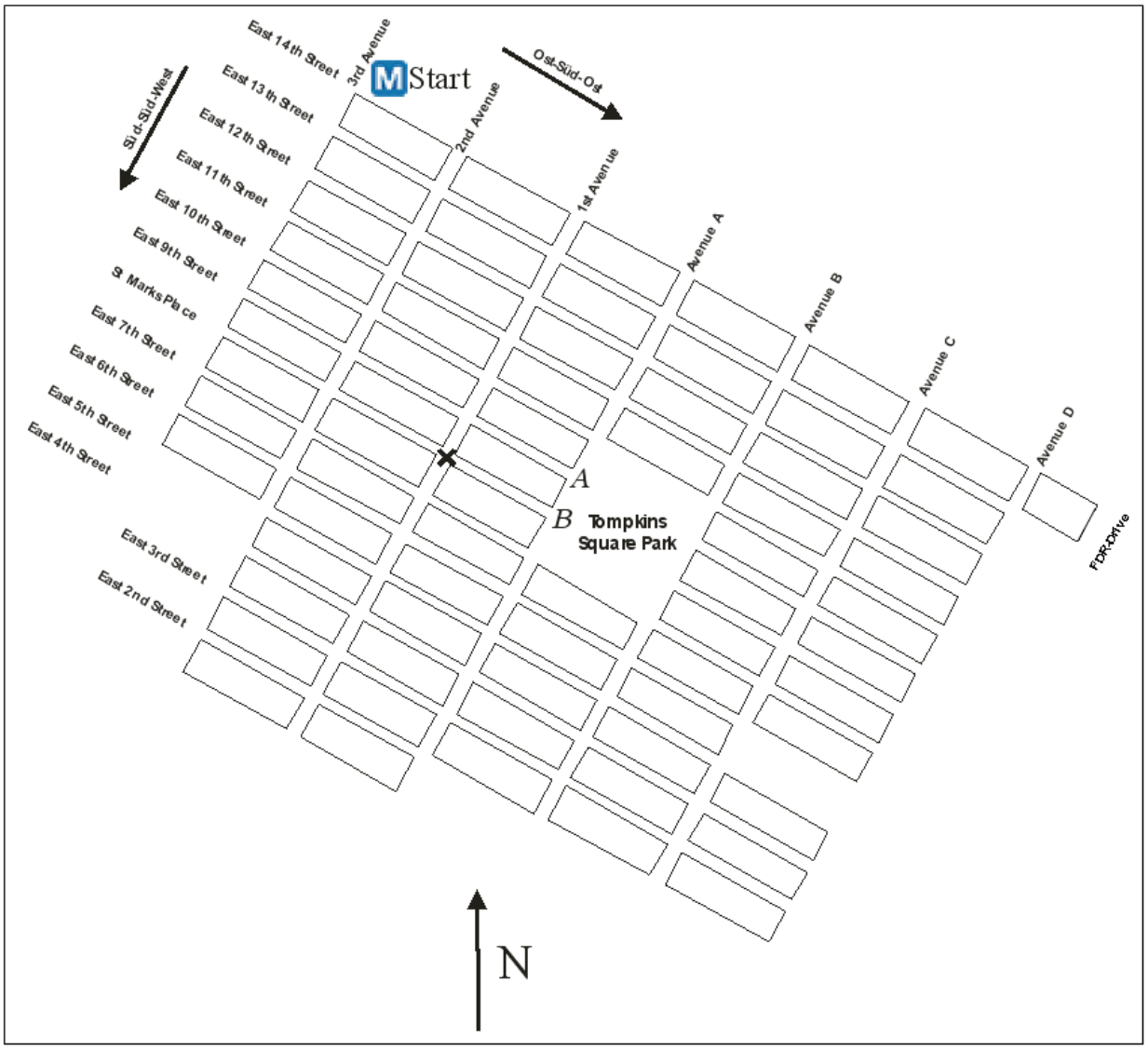
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Thomas einzelne Zielpunkte in Manhattan erreicht, hängt allerdings von p ab und diese Abhängigkeit soll jetzt weiter untersucht werden. p wird in diesem Aufgabenteil also als variabel betrachtet. Als Zielpunkt wird die Nordecke des Tompkins Square Park untersucht. Die Wahrscheinlichkeit, diese zu erreichen, lautet: $P(\text{Nordecke TSP}) = \binom{7}{3} \cdot (p)^3 \cdot (1-p)^4$.

f) Bestimmen Sie den Wert für p so, dass $P(\text{Nordecke TSP})$ maximal wird. **(15P)**

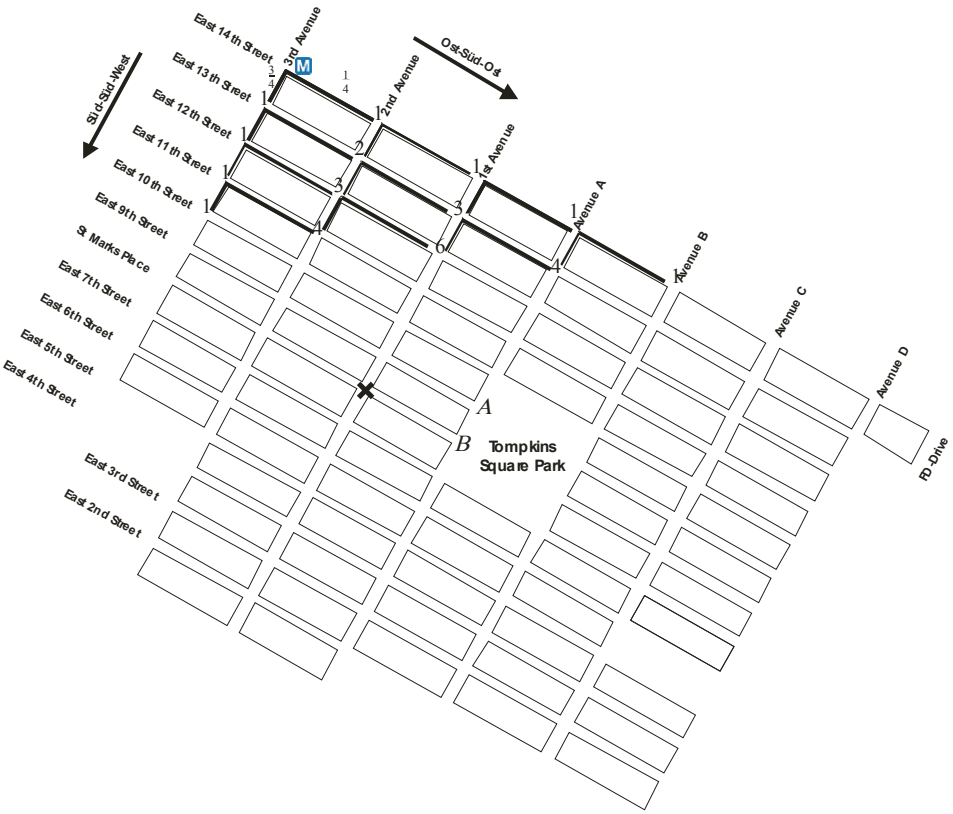
Anlage 1 zur Aufgabe „Manhattan“

Diese Karte dient nur der Illustration.
Für die Bearbeitung der Aufgabe ist die Karte in der Anlage 2 zu verwenden!

Anlage 2 zur Aufgabe „Manhattan“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	 Sollten Schüler ein separates Baumdiagramm zeichnen, so ist die volle Punktzahl zu erteilen. Die Anzahl der Wege bis zur Nordecke des Tompkins Square Park beträgt: $\binom{7}{3} = 35$. $P(\text{Nordecke TSP}) = \binom{7}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{35}{128} \approx 0{,}273$.	20		
b)	Thomas muss zwei Münzen werfen und z.B. P(KOPF,KOPF)= p wählen.	5		
c)	Bei viermaligem Auslosen der Richtung ergibt sich der folgende Erwartungswert für die Anzahl X von KOPF: $E(X) = n \cdot p = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$. Somit ist einmal die Richtung Ost-Süd-Ost zu erwarten und entsprechend dreimal die Richtung Süd-Süd-West. Mit den angegebenen Abständen folgt daraus, dass Thomas tendenziell in beide Richtungen gleich weit kommt.	5	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	$P(\text{FDR direkt}) = \left(\frac{1}{4}\right)^7 = \frac{1}{16384} \approx 0{,}000061$, $P(\text{Nordecke TSP}) = \binom{7}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{2835}{16384} \approx 0{,}173$. Für die Ostecke gibt es mehrere Rechenwege. *1. Lösung:* Es wird die Wahrscheinlichkeit bis zur Ave B, Ecke 11th St., berechnet und dann mit $\frac{3}{4}$ multipliziert. $P(\text{Ostecke TSP}) = \binom{7}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\frac{3}{4} = \frac{2835}{65536} \approx 0{,}0433$. *2. Lösung:* Es wird die Binomialwahrscheinlichkeit für die Ostecke berechnet und die Wahrscheinlichkeit, dass man über die Nordecke gekommen ist, subtrahiert. $P(\text{Ostecke TSP}) = \binom{8}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4 - \frac{2835}{16384}\cdot\frac{1}{4} = \frac{2835}{65536} \approx 0{,}0433$. Für die Westecke ergeben sich vier Summanden, einer für die Nordecke und je einer für die drei verschiedenen Straßen, die von der 1st Ave zum Park führen. $P(\text{Westecke TSP}) = \binom{7}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4\cdot\frac{3}{4} + \binom{7}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^5\cdot\frac{1}{4}$ $+\binom{8}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^6\cdot\frac{1}{4} + \binom{9}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^7\cdot\frac{1}{4}$ $= \frac{94527}{262144} \approx 0{,}36$.		15	10

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	T sei das Ereignis, dass Thomas zum Treffpunkt Ecke Avenue A und 5th Street gelangt, und S sei das Ereignis, dass Thomas bei „Footgear Plus“ an der Ecke 1st Avenue und St Marks Place (siehe **x** in Anlage 2) vorbei kommt. Zu berechnen ist: $P(S\mid T)$. Es gilt: $P(S\mid T)=\frac{P(S\cap T)}{P(T)}=\frac{P(S)\cdot P(T\mid S)}{P(T)}$ $P(S)=\binom{8}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^6$ $P(T\mid S)=\binom{4}{1}\cdot p^1\cdot(1-p)^3$ $P(T)=\binom{12}{3}\cdot p^3\cdot(1-p)^8$ Also: $P(S\mid T)=\frac{\binom{8}{2}\cdot p^2\cdot q^6\cdot\binom{4}{1}\cdot p\cdot q^3}{\binom{12}{3}\cdot p^3\cdot q^9}=\frac{\binom{8}{2}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{12}{3}}=\frac{28}{55}\approx 0{,}5$. Da man p und q vollständig kürzen kann, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit nur von den Binomialkoeffizienten abhängig.		20	
f)	Für die analytische Lösung muss der gegebene Ausdruck nach p differenziert werden: $P(p)=\binom{7}{3}p^3(1-p)^4$ $P'(p)=\binom{7}{3}\left[3\cdot p^2\cdot(1-p)^4-p^3\cdot 4\cdot(1-p)^3\right]$ $=\binom{7}{3}p^2\cdot(1-p)^3\left[3\cdot(1-p)-p\cdot 4\right]$ Die ersten beiden Faktoren liefern Nullstellen der ersten Ableitung für $p=0$ und $p=1$, die vom Sachkontext her Minima liefern. Der dritte Faktor liefert: $3\cdot(1-p)-p\cdot 4=0$ $3-7p=0$ $p=\frac{3}{7}\approx 0{,}43$. Wird dieser Wert auf zwei Nachkommastellen genau durch ein anderes Verfahren, z.B. durch Probieren, ermittelt, ist auch die volle Punktzahl zu erteilen.		5	10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

STOCHASTIK 2

III.2 Golfschläger

Die Sportartikelfirma „Golf&more“ vertreibt unter anderem zwei Sorten Golfschläger, ein Massenprodukt mit dem Namen *Easydriv*e und eine hochwertige Qualität mit dem Namen *Perfectdrive.*
Bei *Easydrive* haben 5 % der Schläger Mängel, bei der hochwertigen Qualität sind es nur 0,5 %.
Ein Kunde, der einmal einen mangelhaften Schläger kauft, sieht darüber vielleicht hinweg, wenn er den Schläger ersetzt bekommt. Wenn es ihm aber häufiger passiert, so wird er wohl die Firma wechseln. Insofern sollte die Firma für die in den Verkauf gelangenden mangelhaften Schläger zusätzliche Kosten einkalkulieren.

a) Bestimmen Sie für beide Schlägersorten die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kunde beim Kauf von vier Schlägern
   - mindestens einen mit Mängeln kauft,
   - genau einen mit Mängeln kauft. **(15P)**

Eine Kundin hat sich nun vier Schläger <u>einer</u> Sorte gekauft und ärgert sich sehr, dass davon zwei nicht einwandfrei sind.

b)
   - Bestimmen Sie für beide Sorten die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man beim Kauf von vier Schlägern genau zwei mit Mängeln kauft.
   - Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kundin *Easydrive* gekauft hat, wenn Ihnen keine weitere Information darüber vorliegt, welchen Schlägertyp sie gekauft hat. **(20P)**

Die Firma verkauft einen Schläger der Marke *Easydrive* zum Preis von 20 Euro und einen Schläger der Marke *Perfectdrive* zum Preis von 200 Euro. Um die Zahl der Schläger mit Mängeln, die in den Verkauf gelangen, zu senken, soll in der Firma eine einfache optische Qualitätskontrolle durchgeführt werden, die 1 Euro Kosten pro Schläger verursacht. Dabei werden Mängel zu 90 % erkannt, leider aber auch 4 % der mängelfreien Schläger aussortiert.

c) Beurteilen Sie im Hinblick auf den Gewinn bei einer Jahresproduktion von jeweils 40 000 Schlägern die Einführung der optischen Kontrolle bei folgenden Annahmen:

   I. Ein Schläger *Easydrive* aus der Massenfertigung verursacht 10 Euro Produktionskosten – auch wenn er aussortiert wird, unabhängig davon, ob er Mängel hat oder nicht –, während für einen in den Verkauf gelangenden Schläger mit Mängeln keine Einnahmen anfallen (sie werden zurück erstattet) und zusätzlich für die Abwicklung der Reklamation und für den Imageverlust Kosten von 50 Euro einkalkuliert werden müssen.

   II. Ein Schläger *Perfectdrive* der hochwertigen Qualität verursacht 50 Euro Produktionskosten – auch wenn er aussortiert wird, unabhängig davon, ob er Mängel hat oder nicht –, während für einen in den Verkauf gelangenden Schläger mit Mängeln zusätzlich für die Abwicklung der Reklamation und für den Imageverlust Kosten von 500 Euro einkalkuliert werden müssen.

   Kontrollergebnis: 5 591 600 € beträgt der zu erwartende Gewinn nach optischer Qualitätskontrolle beim Schläger Perfectdrive. **(25P)**

Zur verbesserten Qualitätssicherung schlägt ein Mitarbeiter einen gründlichen Test vor, dessen Kosten pro Schläger 15 Euro betragen.

d) Erläutern Sie, warum dieses Vorgehen für die Sorte *Easydrive* unsinnig wäre. **(5P)**

Auch für die hohe Qualität scheint dieser Test sehr teuer, aber der Vorschlag wird so abgeändert, dass zunächst die optische Kontrolle (siehe Teil c) durchgeführt werden soll und dann anschließend nur die aussortierten Stücke dem gründlichen Test unterzogen werden. Dieser Test sortiert 95 % der Schläger mit Mängeln aus und nur noch 1 % der Schläger ohne Mängel.

e) Zeigen Sie, dass dieses Vorgehen den Gewinn der Firma erhöht, indem Sie den Mehrgewinn gegenüber dem Ergebnis aus Teil c) berechnen. **(25P)**

Der Chef ist von dieser Idee sehr begeistert, denn er möchte für die hohe Qualität *Perfectdrive* folgende Werbung machen: Der Anteil der Golfschläger, die nicht mängelfrei sind, liegt unter 1 Promille.

f) Zeigen Sie, dass diese Werbung berechtigt ist, indem Sie den Anteil der in den Verkauf gelangenden Schläger mit Mängeln bestimmen, wenn wie in Teil e) beschrieben verfahren wird. **(10P)**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Binomialverteilung mit $n = 4$. Easydrive: $P(X \geq 1) = 1 - 0{,}95^4 = 0{,}18549375 \approx 0{,}1855$ $P(X = 1) = 4 \cdot 0{,}95^3 \cdot 0{,}05 = 0{,}171475$ Perfectdrive: $P(X \geq 1) = 1 - 0{,}995^4 \approx 0{,}0199$ $P(X = 1) = 4 \cdot 0{,}995^3 \cdot 0{,}005 \approx 0{,}0197$	15		
b)	Easydrive: $P(X = 2) = 6 \cdot 0{,}95^2 \cdot 0{,}05^2 = 0{,}0135375$ Perfectdrive: $P(X = 2) = 6 \cdot 0{,}995^2 \cdot 0{,}005^2 = 0{,}0001485$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kunde beim Kauf von 4 Schlägern genau 2 mit Mängeln kauft, sind beim Typ Easydrive 0,0135 und beim Typ Perfectdrive 0,0001485. Nach Bayes ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(\text{Easydrive} \mid 2\text{Mängelschläger}) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}0135375}{0{,}5 \cdot 0{,}0135375 + 0{,}5 \cdot 0{,}0001485} \approx 0{,}989$.	5	15	
c)	Erwarteter Gewinn für 40000 Schläger ohne Test – also alle Schläger gelangen in den Verkauf: <u>bei Easydrive:</u> Einnahmen für die nicht reklamierten Schläger: $0{,}95 \cdot 40000 \cdot 20€ = 760000€$ Kosten für die reklamierten Schläger: $0{,}05 \cdot 40000 \cdot 50€ = 100000€$ Produktionskosten: $40000 \cdot 10€ = 400000€$ Saldo: 260 000 € <u>bei Perfectdrive:</u> Einnahmen für die nicht reklamierten Schläger: $0{,}995 \cdot 40000 \cdot 200€ = 7960000€$ Kosten für die reklamierten Schläger: $0{,}005 \cdot 40000 \cdot 500€ = 100000€$ Produktionskosten: $40000 \cdot 50€ = 2000000€$ Saldo: 5860000€ Erwarteter Gewinn für 40000 Schläger mit Test bei Easydrive: Einnahmen für die nicht reklamierten Schläger: $0{,}95 \cdot 0{,}96 \cdot 40000 \cdot 20€ = 729600€$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Kosten für die reklamierten Schläger: $0{,}05 \cdot 0{,}1 \cdot 40000 \cdot 50€ = 10000€$ Produktionskosten: $40000 \cdot 10€ = 400000€$ Testkosten 40000€ Saldo: 279600€ bei Perfectdrive: Einnahmen für die nicht reklamierten Schläger: $0{,}995 \cdot 0{,}96 \cdot 40000 \cdot 200€ = 7641600€$ Kosten für die reklamierten Schläger: $0{,}005 \cdot 0{,}1 \cdot 40000 \cdot 500€ = 10000€$ Produktionskosten: $40000 \cdot 50€ = 2000000€$ Testkosten 40000€ Saldo: 5591600€ Also lohnt sich die Einführung des Schnelltests nur für Easydrive.	5	20	
d)	Die Summe aus Testkosten und Produktionskosten ist größer als der Preis.	5		
e)	Dem gründlichen Test werden nur die aussortierten Schläger unterzogen, die Wahrscheinlichkeit für einen Schläger des Typs Perfectdrive, beim Schnelltest aussortiert zu werden, ist $0{,}005 \cdot 0{,}9 + 0{,}995 \cdot 0{,}04 = 0{,}0443$. Es werden also erwartungsgemäß jährlich 1772 Schläger aussortiert, davon sind 180 wirklich fehlerhaft und 1592 fehlerfrei. Die Anzahl der bei dem neuen Test aussortierten Schläger beträgt $180 \cdot 0{,}95 = 171$ bzw. $1592 \cdot 0{,}01 = 15{,}92 \approx 16$ Also können 1576 von den 1592 fehlerfreien Schlägern zusätzlich verkauft werden, es werden aber auch 9 von den 180 fehlerhaften Schlägern zusätzlich verkauft und damit reklamiert. Erwarteter zusätzlicher Gewinn mit beiden Tests Einnahmen für die zusätzlich verkauften, nicht reklamierten Schläger: $1576 \cdot 200€ = 315200€$ Kosten für die zusätzlich reklamierten Schläger: $9 \cdot 500€ = 4500€$ Testkosten für den 2. Test: $1772 \cdot 15€ = 26580€$ Saldo: 284120€ mehr als der Saldo nur bei dem Schnelltest und immer noch 15720€ mehr als der Saldo ohne jeden Test. *Anmerkung: Es ist für die Schüler einfacher, wenn sie das Ganze in einem dreistufigen Baum darstellen und so die benötigten Anzahlen ermitteln. Auch wenn eine oder zwei der Kostenpositionen vergessen werden, soll es Teilpunkte geben.*		5	20

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	Es kommen von den 40 000 produzierten Schlägern 39 813 in den Verkauf und von diesen werden 29 reklamiert, dies entspricht 0,73 Promille. *Anmerkung: Sollten Schüler mit dem Nenner 40 000 rechnen, so soll auch dies als richtig gewertet werden.*		10	
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20