Hilfsmittelfreier Prüfungsteil 1

I.1

Analysis

a) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 9 - x^2$.

- Berechnen Sie $\int_0^3 f(x)\,dx$. (2P)
- Bestimmen Sie alle Werte für c, sodass gilt: $\int_0^c f(x)\,dx = 0$ (3P)

b) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2$.

- Berechnen Sie die Gleichung der Tangente, die an der Stelle $x = 1$ den Graphen der Funktion f berührt. (2P)
- Entscheiden Sie, ob die Funktion f einen Wendepunkt besitzt. (3P)

Analytische Geometrie und lineare Algebra

c) Gegeben sind die vier Punkte $A(0 \mid 3 \mid 4)$, $B(2 \mid 3 \mid 8)$, $C(6 \mid 9 \mid 4)$ und $P(1 \mid 0 \mid -1)$.

- Bestätigen Sie, dass die Punkte A, B und C nicht auf einer Geraden liegen. (2P)
- Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_1 durch die Punkte A, B und C und eine Gleichung der dazu parallelen Ebene E_2 durch den Punkt P. (2P)
- Berechnen Sie den Abstand des Punktes P vom Ursprung. (1P)

d) Gegeben sind die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Berechnen Sie $A \cdot \vec{v}$. (2P)
- Bestimmen Sie die Lösungsmenge von: $A \cdot \vec{x} = \vec{v}$. (3P)

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	• $\int_0^3 \left(9-x^2\right)dx = \left[9x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 27-9-(0)=18$	2		
	• $\int_0^c \left(9-x^2\right)dx = \left[9x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^c = 9c-\frac{1}{3}c^3 = \frac{1}{3}c\cdot\left(27-c^2\right)=0$ $\Leftrightarrow c=0 \vee c=\sqrt{27} \vee c=-\sqrt{27}$		3	
b)	• Funktionswert an der Stelle $x = 1$: $f(1)=1-8+24=17$ Steigung an der Stelle $x = 1$: $f'(x)=4x^3-24x^2+48x;\qquad f'(1)=4-24+48=28$ Damit ergibt sich die Tangentengleichung: $t(x)=28(x-1)+17=28x-11$	2		
	• $f''(x)=12x^2-48x+48$ $f''(x)=0$ $\Leftrightarrow\ 12x^2-48x+48=0$ $\Leftrightarrow\ 12\cdot\left(x^2-4x+4\right)=0$ $\Leftrightarrow\ 12\cdot(x-2)^2=0$ $\Leftrightarrow\ x=2$ Da die Nullstelle der zweiten Ableitung eine doppelte Nullstelle ist, es also keinen Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung gibt, gibt es in der Ausgangsfunktion keinen Krümmungswechsel und damit keinen Wendepunkt.		1	2

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	• Aufstellen der Gleichung einer Geraden durch die Punkte A und B und Überprüfung, dass der Punkt C nicht auf dieser Geraden liegt. $AB:\ \vec{x}=\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2-0\\3-3\\8-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}6\\9\\4\end{pmatrix}\overset{?}{=}\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ Wegen des Widerspruchs in der zweiten Koordinate (9 = 3) ist die Gleichung nicht lösbar, der Punkt C kann also nicht auf der Geraden AB liegen. *Anmerkung: Es sind auch andere Lösungswege und andere Notationen möglich.*	2		
	• E_1 wird ermittelt mithilfe eines Ortsvektors und zweier Spannvektoren. Es ergibt sich: $E_1:\vec{x}=\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{AB}+\sigma\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2-0\\3-3\\8-4\end{pmatrix}+\sigma\cdot\begin{pmatrix}6-0\\9-3\\4-4\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}+\sigma\cdot\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}$ $E_2:\vec{x}=\overrightarrow{OP}+\lambda\cdot\overrightarrow{AB}+\sigma\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}+\sigma\cdot\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}$ *Es sind andere Lösungswege und Darstellungen möglich.*		2	
	• $d=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$	1		

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
d)	• $A\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}2&0&3\\0&1&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$	2		
	• $\begin{pmatrix}2&0&3\\0&1&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ Aus der letzten Zeile ergibt sich unmittelbar: $x_2=-1$ Aus der zweiten Zeile ergibt sich: $1\cdot(-1)-1\cdot x_3=1\Leftrightarrow x_3=-2$ Und aus der ersten Zeile ergibt sich: $2\cdot x_1+3\cdot(-2)=2\Leftrightarrow x_1=4$ Der Lösungsvektor ergibt sich also zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}$.		3	
	Insgesamt 20 BWE	9	9	2

Hilfsmittelfreier Prüfungsteil 2

I.2

Analysis

a) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 9 - x^2$.

- Berechnen Sie $\int_0^3 f(x)\,dx$. (2P)
- Bestimmen Sie alle Werte für c, sodass gilt: $\int_0^c f(x)\,dx = 0$ (3P)

b) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2$.

- Berechnen Sie die Gleichung der Tangente, die an der Stelle $x = 1$ den Graphen der Funktion f berührt. (2P)
- Entscheiden Sie, ob die Funktion f einen Wendepunkt besitzt. (3P)

Stochastik

c) Ein Tennisspiel ist entschieden und endet, wenn einer der beiden Spieler drei Sätze gewonnen hat. Ein Spieler kann einen Satz nur gewinnen oder verlieren, eine dritte Möglichkeit gibt es nicht.

Der Spieler Anton gewinnt einen Satz mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ gegen Bert.

- Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass Anton das Spiel nach genau
  - drei Sätzen
  - vier Sätzen

  gewonnen hat. (2P)
- Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der erforderlichen Sätze bis zum Sieg eines der beiden Spieler an.
  Geben Sie Gründe dafür an, dass $3 \leq X \leq 5$ gelten muss. (1P)
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Entscheidung mit genau fünf Sätzen erreicht wird. (2P)

d) In einem Beutel befinden sich fünf Münzen; eine davon ist fehlerhaft, weil auf beiden Seiten *Kopf* eingeprägt ist.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beim dreimaligen zufälligen Ziehen ohne Zurücklegen die fehlerhafte Münze nicht gezogen wird. (2P)
- Es wird eine Münze zufällig gezogen. Diese Münze wird dreimal geworfen und dreimal liegt *Kopf* oben. Bestimmen Sie unter dieser Bedingung die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um die fehlerhafte Münze handelt. (3P)

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	• $\int_0^3 \left(9-x^2\right)dx = \left[9x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 27-9-(0)=18$	2		
	• $\int_0^c \left(9-x^2\right)dx = \left[9x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^c = 9c-\frac{1}{3}c^3 = \frac{1}{3}c\cdot\left(27-c^2\right)=0$ $\Leftrightarrow c=0 \vee c=\sqrt{27} \vee c=-\sqrt{27}$		3	
b)	• Funktionswert an der Stelle $x = 1$: $f(1)=1-8+24=17$ Steigung an der Stelle $x = 1$: $f'(x)=4x^3-24x^2+48x;\qquad f'(1)=4-24+48=28$ Damit ergibt sich die Tangentengleichung: $t(x)=28(x-1)+17=28x-11$	2		
	• $f''(x)=12x^2-48x+48$ $f''(x)=0$ $\Leftrightarrow\ 12x^2-48x+48=0$ $\Leftrightarrow\ 12\cdot\left(x^2-4x+4\right)=0$ $\Leftrightarrow\ 12\cdot(x-2)^2=0$ $\Leftrightarrow\ x=2$ Da die Nullstelle der zweiten Ableitung eine doppelte Nullstelle ist, es also keinen Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung gibt, gibt es in der Ausgangsfunktion keinen Krümmungswechsel und damit keinen Wendepunkt.		1	2

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	• $P(\text{Anton gewinnt in genau 3 Sätzen}) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$ $P(\text{Anton gewinnt in genau 4 Sätzen}) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$	2		
	• Es müssen *mindestens* drei Sätze gespielt werden, damit ein Spieler drei Sätze gewinnen kann. Nach vier Sätzen hat entweder jemand das Spiel bereits gewonnen oder jeder hat genau zwei Sätze gewonnen. Im Falle des Gleichstandes ist ein fünfter Satz nötig, der die Entscheidung zwingend herbeiführt. Es sind also *höchstens* fünf Sätze notwendig.	1		
	• $P(X=5) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{27}$		2	
d)	• $P(\text{Die fehlerhafte Münze wird dreimal nicht gezogen}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5} = 0{,}4$	2		
	• Mit A: Es liegt dreimal Kopf oben. B: Die fehlerhafte Münze wurde gezogen. $\overline{B}$: Die fehlerhafte Münze wurde nicht gezogen. gilt nach dem Satz von Bayes: $P(B\|A) = \frac{P(A\|B) \cdot P(B)}{P(A\|B) \cdot P(B) + P(A\|\overline{B}) \cdot P(\overline{B})} = \frac{1^3 \cdot \frac{1}{5}}{1^3 \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{4}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{10}} = \frac{2}{3}$ Die Wahrscheinlichkeit, dass die fehlerhafte Münze gezogen wurde, ist $\frac{2}{3}$.		3	
	Insgesamt 20 BWE	9	9	2

Analysis 1

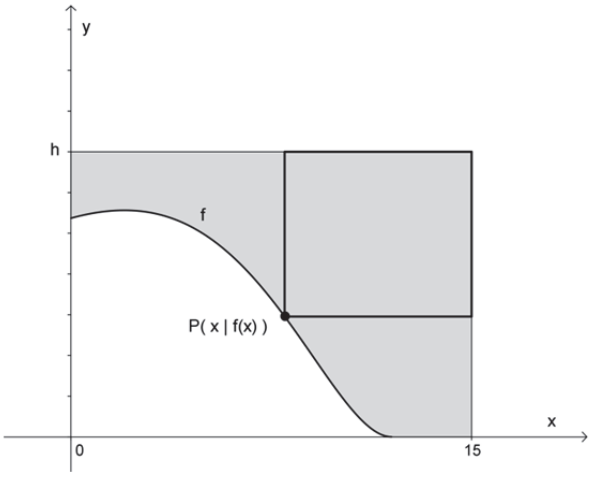
II.1 Metallverarbeitung

Dokumentieren Sie Ihre Lösungswege für jede Aufgabe so, dass man Ihre Vorgehensweise auch ohne CAS nachvollziehen kann.

Ein Betrieb schneidet Metallplatten zu, die vorher mit aufwändigen Verfahren möglichst exakt glatt geschliffen wurden. Er ist ein Spezialbetrieb für besonders präzise Zuschnitte mit Laserverfahren.

Eine ganze Serie von Metallplatten ist leider bei einem fehlerhaften Produktionsprozess teilweise zerstört worden. Alle zerstörten Platten hatten ursprünglich eine Breite von 15 dm, die Plattenhöhe h dagegen war unterschiedlich (siehe Abbildung).

Jede dieser Platten ist längs der gleichen Linie zerschnitten worden. Die Entwickler der Steuersoftware für den Laser sollen daher ermitteln, wie die äußeren Reststücke der Metallplatten noch genutzt werden können, indem möglichst große Rechtecke mit achsenparallelen Seiten ausgeschnitten werden (siehe nebenstehende Abbildung).



Da der fehlerhafte Bearbeitungsprozess computergesteuert lief, wurde die mathematische Beschreibung der Schnittlinie automatisch gespeichert:

$$f: x \to \frac{1}{20}(x-12)^2 \cdot e^{0{,}2\cdot(x+2)} \quad D_f = [0;\ 12]$$

Alle Längen werden in dm angegeben.

Für die weiteren Untersuchungen werden einige markante Punkte der Funktion f benötigt.

a) • Bestätigen Sie, dass die Funktion bei $x = 2$ ein Maximum hat.
Berechnen Sie den Wert dieses Maximums.

• Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte zur Funktion f. (8P)

Zunächst soll beispielhaft eine Platte mit einer Höhe von 14 dm untersucht werden.

Die Flächeninhaltsfunktion A ordnet auf dem Intervall [2; 12] dem x-Wert eines Punktes P auf der Schnittlinie den Flächeninhalt des entstehenden Rechtecks zu.

b) • Begründen Sie, dass sich die Flächeninhaltsfunktion A wie folgt ergibt:

$$A:\ x \to (x-15)\cdot\left(\frac{1}{20}(x-12)^2 \cdot e^{0{,}2\cdot(x+2)} - 14\right).$$

• Begründen Sie, dass [2; 12] die größtmögliche sinnvolle Definitionsmenge für A ist. (8P)

c) • Bestimmen Sie das lokale Maximum der Funktion A.

• Beurteilen Sie, ob das lokale Maximum tatsächlich die praktisch größtmögliche Rechteckfläche angibt. (8P)

Für den Verkauf der äußeren Reststücke werden im Betrieb zwei Strategien diskutiert:
Entweder könnte das größtmögliche präzise zugeschnittene Rechteck zum üblichen Normalpreis pro dm² verkauft werden, oder das gesamte krummlinig begrenzte äußere Reststück (im Bild grau) könnte als Restposten für 45% des Normalpreises pro dm² abgegeben werden.

d) Entscheiden Sie, welche Variante für den Betrieb günstiger ist. (8P)

Hinweis: Falls Sie den Flächeninhalt der größtmöglichen Rechteckplatte nicht ermitteln konnten, verwenden Sie den Wert 57 dm² (dies ist jedoch nicht die korrekte Lösung für c)).

Nun wollen die Softwarespezialisten einen Überblick über die günstigste Nutzung aller zerschnittenen Platten verschiedener Höhen gewinnen. Die Schnittlinie kann für alle Platten wieder durch den Graphen der Funktion f modelliert werden.

Die Softwarespezialisten stellen einen Term zur Bestimmung der Flächeninhalte der Rechtecke für alle Metallplatten auf:

$$A_h: \ x \to (x-15)\cdot\left(\frac{1}{20}(x-12)^2\cdot e^{0,2\cdot(x+2)}-h\right) \text{ mit } D_{A_h}=[2;12]$$

e) • Geben Sie den im Sachkontext sinnvollen Mindestwert für die Größe h an und begründen Sie Ihre Angabe.

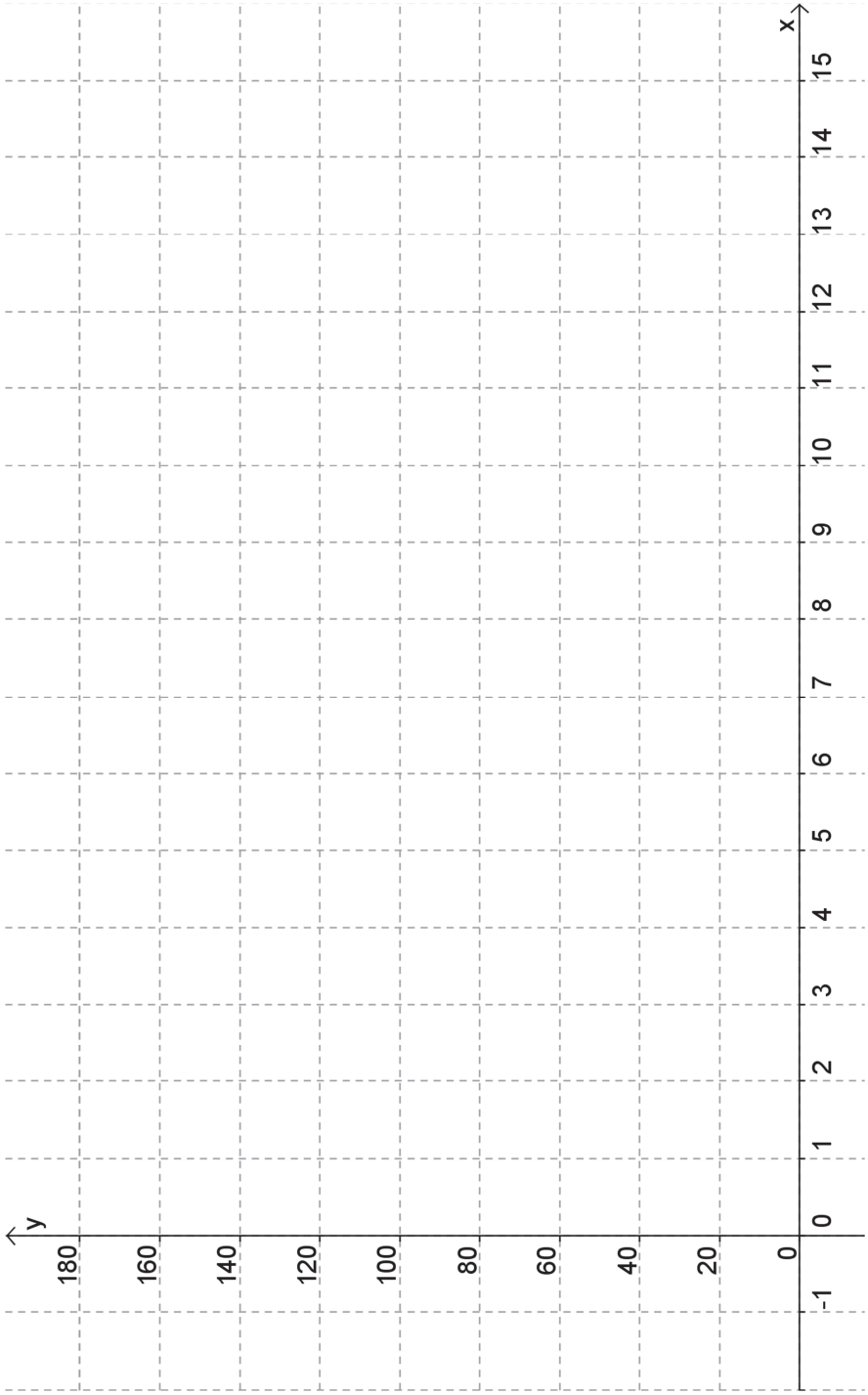
• Skizzieren Sie die Graphen von A_h für drei verschiedene Werte von h mit $12 \le h \le 24$ unter Beachtung des Definitionsbereiches im Koordinatensystem in der Anlage. (8P)

f) • Ermitteln Sie, ab welchem ganzzahligen Wert von h mit $12 \le h \le 24$ es im Definitionsbereich $D_{A_h}=[2;12]$ kein lokales Maximum für den Flächeninhalt des Rechtecks gibt.

Hinweise: Dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg sorgfältig.
Stützen Sie sich bei Ihrer Argumentation <u>nicht</u> auf Augenscheinbetrachtungen anhand der Graphen von A_h.

• Beschreiben Sie, wie man praktisch ein Rechteck mit achsenparallelen Seiten mit möglichst großem Flächeninhalt erhalten kann, auch wenn für A_h *kein* lokales Maximum auf dem Definitionsbereich [2; 12] existiert. (10P)

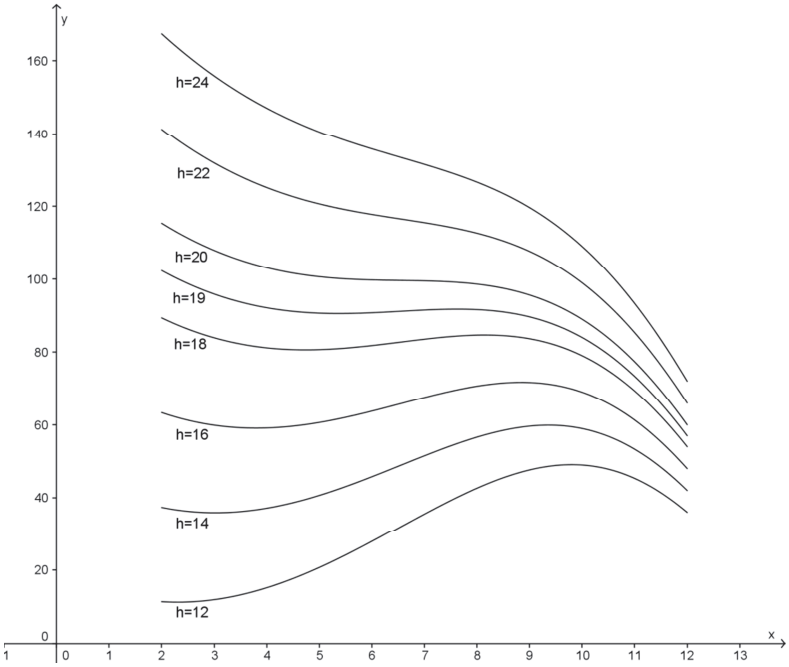
Anlage zur Aufgabe „Metallverarbeitung“

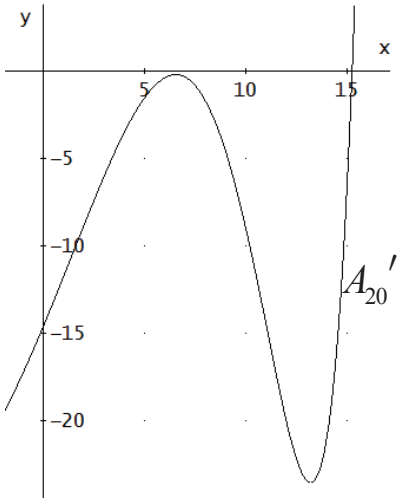


Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	• Der Ansatz $f'(x)=0$ liefert $x_1=2$ und $x_2=12$. Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass bei $x_1=2$ ein Hochpunkt liegt. *Anmerkung: Andere Argumentationen, z. B. über die zweite Ableitung oder den Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung, sind möglich.* Für den Wert des Maximums gilt: $f(2)=11{,}1277...$ • Nullstelle: $f(x)=0 \Rightarrow x=12$ Schnittpunkt mit der x-Achse: (12|0) Schnittpunkt mit der y-Achse: $(0\,\|\,f(0))\approx(0\,\|\,10{,}741...)$	6	2	
b)	• Die Flächeninhaltsfunktion für das Rechteck im äußeren Plattenteil: Die waagerechte Seite hat die Länge $15-x$, die senkrechte Seite die Länge $14-y=14-f(x)=14-\frac{1}{20}(x-12)^2\cdot e^{0{,}2\cdot(x+2)}$. Das Multiplizieren dieser beiden Seitenausdrücke bei Vorzeichenwechsel in beiden Faktoren liefert den gegebenen Term. • x kann nicht kleiner als 2 sein, da bei $x=2$ ein Hochpunkt liegt und so die untere Seite des erzeugten Rechtecks dann die nicht vorhandene innere Fläche etwas durchschneiden würde. $x>12$ darf nicht gewählt werden, da der Graph von f hier nicht definiert ist.		8	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	• Lokales Maximum: Für den Ansatz $A'(x)=0$ ergibt sich $x_1 = 15{,}021...$, $x_2 = 9{,}362...$ und $x_3 = 3{,}020...$. x_1 liegt nicht im Definitionsbereich. Es gilt $A''(x_2) \approx -4{,}2 < 0$ und $A''(x_3) \approx 2{,}7 > 0$. Also ist x_2 die Stelle des lokalen Maximums. Für den Wert des Maximum gilt: $A(9{,}362...) = 59{,}897...$. • Randbetrachtungen: $A(2) = 37{,}339... < 59{,}897...$ und $A(12) = 42 < 59{,}897...$. Es muss aber außerdem geprüft werden, ob ein im oberen Bereich über die gesamte Breite von 15 dm abgeschnittenes Rechteck einen noch größeren Flächeninhalt liefert, denn bei dem Ansatz $A(2)$ wird ja Material verschenkt: $15 \cdot (14 - f(2)) = 43{,}084... < 59{,}897...$ Das lokale Maximum liefert also tatsächlich den optimalen Wert von rund 59,90 dm².		4	4
d)	Für die Entscheidung muss der Flächeninhalt des gesamten Reststücks ermittelt werden: $14 \cdot 15 - \int_0^{12} f(x)dx \approx 121{,}55$. *Eine explizite Angabe dieses Zwischenergebnisses ist nicht erforderlich.* Für die Verkaufspreiskalkulation wird hier p für den Normalpreis pro dm² gesetzt. So ergibt sich für die Rechteckplatte ein Wert von gerundet $59{,}90 \cdot p$, für die Verwertung des gesamten Restes der Wert $121{,}55 \cdot 0{,}45 \cdot p \approx 54{,}70 \cdot p$. Daher ist es günstiger, die ausgeschnittene Rechteckplatte zum Normalpreis zu verkaufen. *Für die Ersatzlösung für die Rechteckfläche von 57 dm² ergibt sich dieselbe Entscheidung.*		8	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	• Da alle Platten dieselbe Schnittlinie aufweisen, müssen sie eine Höhe oberhalb von $f(2)$ besitzen (y-Wert des Hochpunktes von f), also gilt $h \geq f(2) = 11{,}1277...$. • Skizze:  *Die Graphik enthält eine Auswahl von möglichen Graphen.* *In der Schülerlösung werden nur drei skizzierte Graphen erwartet.*	6	2	

f)	• Der Graph der Flächeninhaltsfunktion A_{19} weist im Definitionsbereich ein lokales Maximum auf. Begründung: Der Ansatz $A_{19}'(x) = 0$ liefert u. a. $x = 7{,}6265...$ und es gilt $A_{19}''(7{,}6265...) = -1{,}5199... < 0$ *Denkbar ist beispielsweise auch eine textlich begründete Argumentation mithilfe des Graphen von A_{19}': "Der Graph von A_{19}' hat im Definitionsbereich* [2; 12] *zwei Nullstellen, an der zweiten gibt es einen Vorzeichenwechsel von + nach –, weshalb die Funktion A_{19} dort ein lokales Maximum hat."* *Der Graph muss in diesem Fall in der Aufgabenlösung mindestens skizziert werden.* Der Graph der Funktion A_{20}' schneidet im Definitionsbereich [2; 12] die *x*-Achse nicht (siehe Abbildung), die Funktion A_{20}' hat also im Definitionsbereich keine Nullstelle. Deshalb hat die Funktion A_{20} kein lokales Maximum im Definitionsbereich. Ab *h* = 20 gibt es im Definitionsbereich also kein lokales Maximum.  *Anmerkung zu einer möglichen rechnerischen Argumentation: Je nach verwendetem Gerät/Programm und Befehl liefert der Ansatz $A_h'(x) = 0$ u. U. <u>nicht alle</u> Nullstellen. Argumentiert ein Prüfling also damit, dass die Gleichung $A_{20}'(x) = 0$ als Nullstelle lediglich $x = 15{,}249...$ liefere, welche nicht im Definitionsbereich liege, muss er zusätzlich begründen, dass sich innerhalb des Intervalls* [2; 12] *nicht noch eine weitere Nullstelle befindet. Diese Begründung hängt von dem verwendeten Befehl und dem verwendeten Gerät/Programm ab. Verwendet der Prüfling einen Befehl, der die Nullstellen ausschließlich im Intervall* [2; 12] *sucht, entfällt die Notwendigkeit der zusätzlichen Argumentation. Dasselbe gilt, wenn sichergestellt ist, dass das Gerät/die Software immer alle Nullstellen findet und der Prüfling durch den vorangegangenen Unterricht von diesem Umstand ausgehen kann.* • Eine Rechteckseite liegt auf der Tangente durch den Hochpunkt von *f*, diese Seite nimmt die gesamte Plattenbreite ein. Die andere Rechteckseite verläuft senkrecht dazu nach oben bis zum Ende der Platte.		2	8
	Insgesamt 50 BWE	12	26	12

Analysis 2

II.2 Leistungsdiagnose

Dokumentieren Sie Ihre Lösungswege für jede Aufgabe so, dass man Ihre Vorgehensweise auch ohne CAS nachvollziehen kann.

Im Ausdauersport wird zur Untersuchung der Leistungsfähigkeit und zur Bestimmung der optimalen Trainingsintensität häufig ein Stufentest durchgeführt. Der Sportler muss auf einem Ergometer (Heimtrainer) z. B. 3 Minuten lang mit einer Leistung von 100 Watt fahren, anschließend werden der Puls und die Laktatkonzentration im Blut gemessen, dann wird die Leistung um z. B. 40 Watt erhöht und wieder wird 3 Minuten lang belastet. Dies wird solange durchgeführt, bis die Belastungsgrenze des Sportlers erreicht ist.

Laktat ist ein Salz der Milchsäure, das bei der Energieumsetzung im Muskel freigesetzt wird.

Bei steigender Belastung sinkt die Laktatkonzentration zunächst und steigt später deutlich an.

Die Konzentration des Laktats im Blut wird in Millimol pro Liter angegeben. Die unten stehende Tabelle zeigt die Stufentestwerte eines trainierten Ausdauersportlers.

Im ersten Schritt soll eine lineare Funktion bestimmt werden, die den Zusammenhang zwischen der Leistung (in Watt) und dem Puls (in Schlägen pro Minute) herstellt.

Leistung in Watt	Laktatkonzentration in mmol/Liter	Puls
100	2,16	118
140	1,33	131
180	1,75	145
220	1,94	158
260	2,96	166
300	5,35	174
340	8,48	185

a)
- Geben Sie per linearer Regression die Funktionsgleichung zur Funktion a an, die den Puls $a(x)$ in Abhängigkeit von der Leistung x beschreibt.
- Bestätigen Sie, dass alle Funktionswerte für den Puls um weniger als 3 % vom jeweiligen Messwert abweichen. (6P)

Für die Modellierung der Laktatkonzentration in Abhängigkeit von der Leistung x stehen mehrere Ansätze zur Verfügung.

b) Begründen Sie, warum die Modellierung der Laktatkonzentration in Abhängigkeit von der Leistung x nicht angemessen durch eine verallgemeinerte Exponentialfunktion f der Art $f(x) = a + b \cdot e^{c \cdot x}$ beschrieben werden kann. (2P)

c)
- Geben Sie per Regression die Gleichung einer kubischen Funktion an, die die Laktatkonzentration in Abhängigkeit von der Leistung beschreibt. Geben Sie die Koeffizienten mit jeweils einer Nachkommastelle mehr an, als sie im Kontrollergebnis haben.
  Kontrollergebnis: $kub(x) = 4{,}7309 \cdot 10^{-7} \cdot x^3 - 7{,}927 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 - 0{,}0139 \cdot x + 3{,}7956$
- Bestimmen Sie den minimalen Laktatwert in diesem Modell. (8P)

Rechnen Sie im Weiteren mit der Funktion *kub* aus dem Kontrollergebnis zu Aufgabenteil c).
Als untere Grenze für das Ausdauertraining gilt eine Laktatkonzentration von 2 mmol/Liter, als obere Grenze gilt 4 mmol/Liter. Dieser Ausdauerbereich ist aufgeteilt in einen Bereich, der dauerhaft, und einen Bereich, der nur für einige Minuten durchgehalten werden kann.
Die Leistung, bei der die Laktatkurve um 0,031 mmol/Liter pro Watt ansteigt, bildet die Grenze zwischen den beiden Bereichen.

d)
- Bestimmen Sie die untere und die obere Leistungsgrenze für den Ausdauerbereich.
  Berechnen Sie den zugehörigen Pulsbereich mit Hilfe des linearen Modells.
  Hinweis: *Falls Sie in Aufgabenteil a) zu keinem Ergebnis kommen konnten, verwenden Sie hier als Ersatz die folgende Funktionsgleichung:* $a_{Ersatz}(x) = 0{,}2892 \cdot x + 94{,}32745612$
- Bestimmen Sie die Leistung, bei der die Grenze zwischen Dauerbelastung und kurzfristiger Belastung erreicht wird. (13P)

Bei zunehmender körperlicher Belastung steigen nicht nur Puls und Laktatwert, sondern auch der Sauerstoffbedarf. In einer dreiminütigen Wettkampfsituation entsteht ein zusätzlicher Sauerstoffbedarf von insgesamt 10,5 Litern. Dieser erhöhte Sauerstoffbedarf kann jedoch *während* der dreiminütigen Belastungsphase nicht vollständig gedeckt werden. Daher besteht auch *nach* der dreiminütigen Belastungsphase noch ein erhöhter Sauerstoffbedarf. Das macht sich daran bemerkbar, dass sich die Atmung nach der Belastungsphase nur allmählich wieder beruhigt.

Die Funktion $s_{während}$ beschreibt *während* der dreiminütigen Belastungsphase die Rate der zusätzlich aufgenommenen Sauerstoffmenge in Litern pro Minute.
Die Funktion s_{danach} beschreibt die Rate der zusätzlichen Sauerstoffaufnahme (in Litern pro Minute) *nach* der dreiminütigen Belastungsphase. Dabei ist x jeweils die Zeit in Minuten ab Beginn der dreiminütigen Belastungsphase.

$$s_{während}(x) = 2{,}6 \cdot (1 - e^{-0{,}624 \cdot x}) \qquad 0 \le x \le 3$$
$$s_{\text{danach}}(x) = 2{,}2 \cdot e^{-0{,}28 \cdot (x-3)} \qquad x > 3$$

e)
- Interpretieren Sie in der ersten Funktionsgleichung den Wert 2,6 im Sachzusammenhang.
- Bestimmen Sie die Sauerstoffmenge (in Litern), die dem Körper unmittelbar nach der dreiminütigen Belastungsphase fehlt.
  Hinweis: Sollten Sie diesen Aufgabenteil nicht lösen können, gehen Sie im Weiteren von einer Sauerstoffmenge von 6,2 Litern aus.
- Bestimmen Sie die Zeit, die nach Ablauf der Belastungsphase benötigt wird, um die soeben bestimmte fehlende Sauerstoffmenge auszugleichen. (13P)

Die Modellierung durch die Funktion s_{danach} ist etwas unbefriedigend, da ihr Graph nicht knickfrei an den Graphen von $s_{während}$ anschließt. Deshalb soll jetzt für das Intervall [3; 5] eine ganzrationale Funktion dritten Grades gefunden werden, deren Graph bei $x = 3$ knickfrei an den Graphen von $s_{während}$ anschließt und bei $x = 5$ mit einer waagerechten Tangente auf die x-Achse trifft.

f) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser ganzrationalen Funktion. (8P)

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

- Die Pulsfunktion a hat die Gleichung $a(x) = 0,275 \cdot x + 93,35714...$
- Die Abweichungen betragen $\frac{\text{Funktionswert}}{\text{Messwert}} - 1$:

<table>
<tr><th>Leistung a in Watt</th><th>gemessener Puls</th><th>Funktions-wert $a(x)$</th><th>Abweichung in %</th></tr>
<tr><td>100</td><td>118</td><td>120,857143</td><td>2,4%</td></tr>
<tr><td>140</td><td>131</td><td>131,857143</td><td>0,7%</td></tr>
<tr><td>180</td><td>145</td><td>142,857143</td><td>–1,5%</td></tr>
<tr><td>220</td><td>158</td><td>153,857143</td><td>–2,6%</td></tr>
<tr><td>260</td><td>166</td><td>164,857143</td><td>–0,7%</td></tr>
<tr><td>300</td><td>174</td><td>175,857143</td><td>1,1%</td></tr>
<tr><td>340</td><td>185</td><td>186,857143</td><td>1,0%</td></tr>
</table>

Alle Werte sind vom Betrage kleiner als 3 %.

</td><td>6</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

Die Exponentialfunktion ist eine monotone Funktion, die Messwerte fallen jedoch bei geringer Belastung zunächst einmal ab und steigen dann an.

Andere korrekte Begründungen sind zu akzeptieren.

</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

- Die Gleichung der Funktion ist (mit gerundeten Koeffizienten):

$kub_{reg}(x) = 4,73090 \cdot 10^{-7} \cdot x^3 - 7,9278 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 - 0,01392 \cdot x + 3,79564$

- Nullstellen der Ableitungsfunktion:

Aus dem Ansatz $kub'_{reg}(x) = 0$ ergibt sich $x \approx -57,84$ oder $x \approx 169,56$

Für das Kontrollergebnis ergibt sich $x \approx -57,78$ oder $x \approx 169,49$.

Nur die positive Nullstelle ist im Sachzusammenhang sinnvoll, es liegt dort ein Minimum vor, da der Graph der Ableitungsfunktion eine nach oben geöffnete Parabel ist, also an der rechten Nullstelle einen Vorzeichenwechsel von – auf + aufweist.

Es ergibt sich der minimale Laktatwert $kub_{reg}(169,56) \approx 1,462$ in mmol/Liter.

Für das Kontrollergebnis ergibt sich $kub(169,49) \approx 1,466$.

</td><td>3</td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

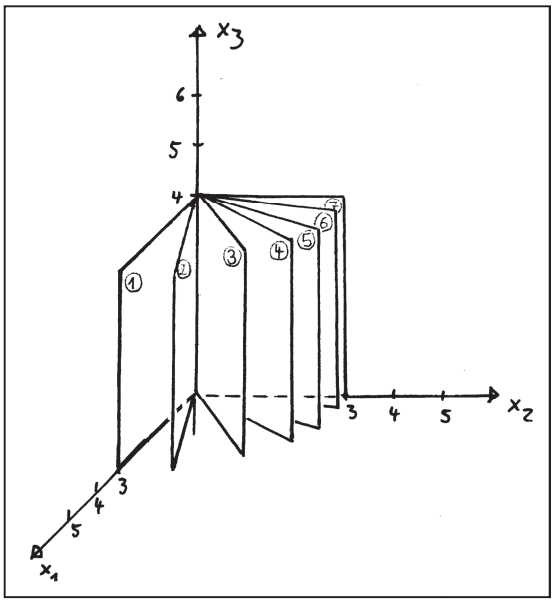
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
d)	$kub(x) = 2$ liefert $x \approx -161{,}1$ oder $x \approx 105{,}7$ oder $x \approx 223{,}0$ $kub(x) = 4$ liefert $x \approx -94{,}6$ oder $x \approx -16{,}39$ oder $x \approx 278{,}6$ Die negativen Werte sind im Sachzusammenhang nicht sinnvoll; der Wert 105,7 ist nicht sinnvoll, weil er in dem Leistungsbereich liegt, in dem die Laktatkurve abfällt. Zu den Leistungswerten gehören die Pulswerte $a(223{,}0) \approx 154{,}7$ $\quad a(278{,}6) \approx 170{,}0$ Der Ausdauertrainingsbereich liegt bei ca. 155 bis 170 Schlägen pro Minute. *Für die Ersatzfunktion ergeben sich ca. 159 und 175 Schläge pro Minute.* Für den trennenden Wert ist anzusetzen: $kub'(x) = 0{,}031$ Dies liefert die folgenden Lösungen: $x \approx -130{,}6$ oder $x \approx 242{,}3$ Die negative Lösung ist im Sachkontext irrelevant. Bei einer Leistung von ca. 242 Watt liegt also die Grenze zwischen Dauerbelastung und kurzfristiger Belastung.	3	8	2
e)	• 2,6 bildet eine obere Grenze der zusätzlichen Sauerstoffaufnahme in Litern pro Minute, in dem Intervall wird dieser Wert nicht erreicht. • Fehlende Sauerstoffmenge: $10{,}5 - \int_0^3 s_{während}(x)\,dx \approx 6{,}226$ Unmittelbar nach der Belastungsphase fehlt eine Sauerstoffmenge von ca. 6,226 Litern. • Zeit zum Ausgleich der fehlenden Sauerstoffmenge: Der Ansatz $\int_3^T s_{danach}(x)\,dx \approx 6{,}226$ führt zu $T \approx 8{,}61$ Nach Ende der dreiminütigen Belastungsphase dauert es ca. 5,6 Minuten, bis die noch fehlende Sauerstoffmenge ausgeglichen ist.		3	10
f)	Ansatz: $k(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$. Bedingungen: $k(3) = s_{während}(3) \wedge k'(3) = s'_{während}(3) \wedge k(5) = 0 \wedge k'(5) = 0$. Die Lösung dieses Gleichungssystems führt zu: $k(x) \approx 0{,}612407 \cdot x^3 - 7{,}411276 \cdot x^2 + 28{,}182211 \cdot x - 32{,}180063$		8	
	Insgesamt 50 BWE	12	26	12

Lineare Algebra/Analytische Geometrie 1

III.1 Kulisse

Dokumentieren Sie Ihre Lösungswege für jede Aufgabe so, dass man Ihre Vorgehensweise auch ohne CAS nachvollziehen kann.

Für das Jugendtheaterstück „Mary Plotter und das Zauberbuch“ hat der Regisseur die Vorstellung, ein senkrecht stehendes, halb aufgeklapptes Buch auf die Bühne zu stellen (siehe Skizze des Bühnenbildners). Das Buch soll sieben Blätter (einschließlich der Buchdeckel) besitzen. Jedes Blatt soll 3 m breit und 4 m hoch sein. Da der Regisseur auch für die Anordnung weiterer Zauberelemente sehr genaue Vorstellungen hat, holt sich der verunsicherte Bühnenbildner einen Mathematiker zur Unterstützung.



Skizze des Bühnenbildners

Der Mathematiker stellt gleich eine ganze Sammlung von Ebenen mithilfe einer einzigen Formel dar, um die Lage der Buchblätter zu beschreiben. Er nennt dieses Gebilde eine Ebenenschar E_t:

$$E_t: -\sqrt{1-t^2}\cdot x_1 + t\cdot x_2 = 0 \qquad t\in[0;1]$$

Die Größen x_1, x_2 und x_3 sind in der Maßeinheit Meter zu verstehen.

Der Bühnenbildner bekommt es beim Anblick dieser Formel mit der Angst zu tun. Der Mathematiker erklärt ihm daher in einzelnen Schritten, was sich hinter dieser unübersichtlichen Formel verbirgt.

Als Erstes listet er in einer Tabelle auf, welche Ebene welchem Buchblatt zugeordnet sein soll:

Wert von t	1	?	0,8	0,6	0,4	0,2	0
Name der Ebene	E_1	$E_?$	$E_{0,8}$	$E_{0,6}$	$E_{0,4}$	$E_{0,2}$	E_0
Buchblatt Nr.	Blatt 1	Blatt 2	Blatt 3	Blatt 4	Blatt 5	Blatt 6	Blatt 7

Nun sollen die Ebenengleichungen für bestimmte Werte von t untersucht werden.

a)
- Geben Sie die Koordinatengleichungen für die Ebenen E_0 und E_1 an.
- Bestätigen Sie, dass die Ebene $E_{0,8}$ mit der Koordinatengleichung $-3x_1 + 4x_2 = 0$ angegeben werden kann. (8P)

Es sollen nun weitere Elemente des Bühnenbildes mathematisch dargestellt werden.

b) Ermitteln Sie die Schnittmenge aller Ebenen der Schar E_t. (5P)

Mithilfe der Ebenenschar können Winkel zwischen den Buchblättern ermittelt werden:

c)
- Berechnen Sie den Winkel zwischen Blatt 1 und Blatt 3.
- Der Bühnenbildner behauptet, dass alle Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Blättern gleich groß seien. Es stelle nur eine Täuschung dar, dass die hinteren Winkel im Schrägbild kleiner erschienen.
  Begründen Sie ohne Bezugnahme zur Abbildung, dass der Bühnenbildner Unrecht hat.
- Ermitteln Sie den Wert von t für Blatt 2, wenn zwischen Blatt 2 und Blatt 3 ein Winkel von 18° entstehen soll und Blatt 2 zwischen Blatt 1 und Blatt 3 liegt. (10P)

Mary Plotter soll während der Aufführung mit einem 3,80 m langen Zauberstab mehrere Blätter des Zauberbuches von unten nach oben durchstoßen. Damit die Durchstoßlöcher vorbereitet werden können, stellt der Mathematiker eine Gleichung auf; der Zauberstab bewegt sich demnach entlang der folgenden Geraden:

$$g_Z : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Diese Geradengleichung soll im Weiteren vorausgesetzt werden.

d) Zeigen Sie, dass die Buchblätter Blatt 1 bis Blatt 6 von der Geraden g_Z durchstoßen werden, Blatt 7 jedoch nicht.

Kontrolllösung: Die Ebene E_1 wird in dem Punkt $D_1\left(\frac{7}{3} \,\middle|\, 0 \,\middle|\, \frac{22}{9}\right)$ durchstoßen. (12P)

Mary Plotter befürchtet, dass sie sehr tief knien muss, um den langen Zauberstab mit Schwung von unten her durch die Blätter stoßen zu können.

e) Bestimmen Sie die Höhe des unteren Stabendes über dem Boden für den Moment, in dem das obere Stabende auf Blatt 1 trifft, und interpretieren Sie Ihr Ergebnis vor dem Hintergrund von Mary Plotters Befürchtungen. (9P)

Links vom Buch soll auf der Bühne eine goldene Kugel mit dem Radius $r = 1{,}80$ m hängen. Für die Kugel ist der Mittelpunkt $M(\,3 \mid -4 \mid 2\,)$ geplant. Der Bühnenbildner befürchtet aber, dass die Kugel den Einsatz des Zauberstabes behindert.

f) Untersuchen Sie, ob die Kugel den Einsatz des Zauberstabes behindert. (6P)

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Durch Einsetzen von $t=0$ in die Ebenenschar ergibt sich $x_1=0$. Durch Einsetzen von $t=1$ in die Ebenenschar ergibt sich $x_2=0$. Durch Einsetzen von $t=0{,}8$ in die Ebenenschar ergibt sich : $-\sqrt{1-0{,}64}\cdot x_1+0{,}8x_2=0$ $\Leftrightarrow \quad -0{,}6x_1+0{,}8x_2=0 \mid \cdot 5$ $\Leftrightarrow \quad -3x_1+4x_2=0$	8		
b)	Aus der Gleichung der Ebenenschar E_t ist ersichtlich, dass unabhängig vom Wert für x_3 jeder Punkt mit $x_1=0$ und $x_2=0$ die Gleichung erfüllt, also in jeder der Ebenen liegt. Somit liegt die Gerade mit der Gleichung $g:\vec{x}=r\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ in allen Ebenen. Da die Ebenen nicht identisch sind, muss diese Gerade auch die Schnittmenge sein.		5	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	• Der Winkel zwischen Blatt 1 und Blatt 3 berechnet sich mit Hilfe der Normalenvektoren $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ von Blatt 1 und $\vec{n}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ von Blatt 3. Dann ergibt sich mit $\cos(\alpha_{1,3}) = \frac{\left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rvert}{1 \cdot 5} = \frac{4}{5}$ der Winkel $\alpha_{1,3} = 36{,}8699...°$. Der gesuchte Winkel beträgt also rund 36,9°. • Da der Winkel zwischen Blatt 1 und Blatt 7 offensichtlich 90° beträgt, müssten die Winkel für aufeinanderfolgende Blätter jeweils $90° : 6 = 15°$ betragen. Der Winkel zwischen Blatt 1 und Blatt 3 müsste somit $2 \cdot 15° = 30°$ betragen. Er beträgt aber gut 36°, also können nicht alle Winkel gleich groß sein. *Stattdessen könnte z. B. auch der Winkel zwischen Blatt 3 und Blatt 4 berechnet werden.* • Für die Bestimmung des Wertes von t kann der allgemeine Normalenvektor $\vec{n}_t = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-t^2} \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lvert \vec{n}_t \rvert = \sqrt{\left(-\sqrt{1-t^2}\right)^2 + t^2} = \sqrt{1-t^2+t^2} = 1$ herangezogen werden. Zu lösen ist die Gleichung $\cos(18°) = \frac{\left\lvert \begin{pmatrix} -\sqrt{1-t^2} \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rvert}{1 \cdot 5} = \frac{3 \cdot \sqrt{1-t^2} + 4 \cdot t}{5}$. Es ergeben sich die Lösungen $t_1 = 0{,}575...$ und $t_2 = 0{,}946...$. Um rechnerisch zu ermitteln, welche der beiden Lösungen der Fragestellung angemessen ist, wird die Größe des Winkels φ zwischen E_1 und E_{t_1} ermittelt: $\cos(\varphi) = \frac{\left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{1-t_1^2} \\ t_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rvert}{1 \cdot 1} = t_1$ Es ergibt sich $\varphi \approx 55°$. Damit liegt E_{t_1} nicht wie gefordert zwischen Blatt 1 und Blatt 3, weil der Winkel zwischen diesen beiden Blättern nur ca. 37° beträgt. Der einzige Wert für den Parameter zu Blatt 2 ist also $t_2 = 0{,}946...$ *Die Feststellung, dass nur $t_2 = 0{,}946...$ zwischen den Parameterwerten von Blatt 1 ($t = 1$) und Blatt 3 ($t = 0{,}8$) liegt, ist als Begründung ausreichend.*	4	3	3

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
d)	Sinnvoll ist es, zu prüfen, ob Blatt 1 und Blatt 6 durchstoßen werden. Blatt 1: $x_2 = 0$ muss erfüllt werden. Daraus folgt die Gleichung $-1 + r \cdot 9 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{1}{9}$. Durch Einsetzen von r in g_z ergibt sich der Durchstoßpunkt $D_1\left(\frac{7}{3} \,\middle\vert\, 0 \,\middle\vert\, \frac{22}{9}\right)$. Damit D_1 tatsächlich innerhalb des Blattes 1 liegt, muss $0 < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = x_1 = \frac{7}{3} < 3$ und $0 < x_3 = \frac{22}{9} < 4$ gelten. Beides ist erfüllt. Blatt 6: $-\sqrt{0{,}96}x_1 + 0{,}2x_2 = 0$ muss erfüllt werden. Daraus folgt die Gleichung $-\sqrt{0{,}96} \cdot (3 - 6r) + 0{,}2 \cdot (-1 + 9r) = 0$ mit der Lösung $r = 0{,}4088...$ Durch Einsetzen von r in g_z ergibt sich der Durchstoßpunkt $D_6 = (0{,}547...\,\vert\,2{,}680...\,\vert\,3{,}635...)$. Damit D_6 tatsächlich innerhalb des Blattes 6 liegt, muss $0 < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \approx \sqrt{(0{,}547)^2 + (2{,}680)^2} \approx 2{,}735 < 3$ und $0 < x_3 \approx 3{,}635 < 4$ gelten. Beides ist offenbar erfüllt. Damit durchsticht der Zauberstab auch alle anderen Blätter von 2 bis 5. Blatt 7: Aus $x_1 = 0$ ergibt sich $3 - 6r = 0 \Leftrightarrow r = 0{,}5$. Daraus berechnet sich durch Einsetzen in die Geradengleichung $D_7(0\,\vert\,3{,}5\,\vert\,4)$. Da $x_2 > 3$ ist und Blatt 7 in der x_2-x_3-Ebene liegt, liegt D_7 außerhalb des Buchblattes.		7	5

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	Es wird der Punkt gesucht, der einen Abstand 3,8 von D_1 hat und auf der Geraden des Zauberstabs g_z liegt. Man setzt also an: $\left\|\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-6\\9\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{7}{3}\\0\\\frac{22}{9}\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}\frac{2}{3}-6r\\-1+9r\\-\frac{4}{9}+4r\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{\left(\frac{2}{3}-6r\right)^2+(-1+9r)^2+\left(-\frac{4}{9}+4r\right)^2}=3{,}8$ Diese Gleichung hat zwei Lösungen: $r_1=-0{,}21839...$und $r_2=0{,}44061...$ Für diese Fragestellung ist nur die negative Lösung sinnvoll. Würde man nämlich r_2 in die Geradengleichung einsetzen, ergäbe sich ein Punkt auf einer Höhe von $x_3=2+0{,}4406..\cdot 4\approx 3{,}76$. Dieses kann nicht sein, da die Blätter von unten durchstoßen werden. Es ergibt sich durch Einsetzen von r_1 in die Geradengleichung der Punkt $(4{,}310..\|-2{,}965...\|1{,}126...)$. Das untere Ende des Zauberstabes befindet sich somit auf einer Höhe von ca.1,13 m. Mary Plotter muss nicht knien, ihre Befürchtungen sind grundlos.		5	4
f)	Um feststellen zu können, ob der Zauberstab von der Kugel behindert wird, bestimmt man die Schnittpunkte der Kugel mit der Geraden g_z des Zauberstabs. Die Kugel hat die Gleichung: $(x_1-3)^2+(x_2+4)^2+(x_3-2)^2=1{,}8^2$. Einsetzen der Koordinaten der Geradengleichung ergibt: $(3-6r-3)^2+(-1+9r+4)^2+(2+4r-2)^2=1{,}8^2$ Da diese Gleichung keine reellen Lösungen hat, kann der Zauberstab unbehindert an der Kugel vorbei geführt werden. *Andere Lösungswege sind möglich. So kann z. B. der Abstand von M zur Geraden g_z untersucht werden.*		6	
	Insgesamt 50 BWE	12	26	12

Lineare Algebra/Analytische Geometrie 2

III.2 Infizierte Schädlinge

Dokumentieren Sie Ihre Lösungswege für jede Aufgabe so, dass man Ihre Vorgehensweise auch ohne CAS nachvollziehen kann.

Hinweis: Stellen Sie Ihr CAS gegebenenfalls so ein, dass Berechnungen mit komplexen Zahlen möglich sind. Zur Bearbeitung der Aufgabe genügt es, nur die reellen Ergebnisse zu betrachten.

Um die Umwelt nicht übermäßig zu belasten, sollen Schädlinge biologisch mit speziellen Krankheitskeimen bekämpft werden. Diese Krankheitskeime können nur die gewünschte Schädlingsart infizieren und sind für andere Lebewesen unwirksam. Infizierte Schädlinge können diese Infektion innerhalb der Population weiter verbreiten, erkranken oder daran sterben, aber auch wieder gesunden. Nach einer gezielten Infizierung kann die Population der Schädlinge in folgende Gruppen eingeteilt werden: Gesunde (G), Infizierte (I), Erkrankte (E) und Tote (T).

Die Bekämpfung der Schädlinge erfolgt durch eine einmalige Infizierung. Außer dieser Schädlingsbekämpfung sollen keine anderen Gründe für eine Veränderung der Anzahlen in den einzelnen Gruppen wie z. B. Geburten oder Tierfraß betrachtet werden.

Das Diagramm in der Anlage stellt eine Beschreibung der Übergangsraten zwischen den einzelnen Gruppen für eine Zeiteinheit von einer Woche dar.

Eine Population n Wochen nach der Infizierung der Schädlinge wird durch den Vektor $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} G_n \\ I_n \\ E_n \\ T_n \end{pmatrix}$ beschrieben. Hierbei sind G_n, I_n, E_n und T_n die jeweiligen Anzahlen der gesunden, infizierten, erkrankten und toten Schädlinge dieser Population nach n Wochen. Im Rahmen des hier betrachteten Modells wird die Population nach (n+1) Wochen durch $\vec{v}_{n+1} = A \cdot \vec{v}_n$ ermittelt, wobei A eine Übergangsmatrix darstellt.

a)
- Geben Sie an, welche der folgenden Matrizen in diesem Modell eine geeignete Übergangsmatrix für den in der Anlage gezeigten Prozess darstellt.
- Begründen Sie, warum die beiden anderen Matrizen in diesem Modell nicht geeignet sind. (6P)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,05 & 0,05 \\ 0,3 & 0,3 & 0 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 & 0 \\ 0,5 & 0,4 & 0,05 & 0,05 \\ 0,3 & 0,3 & 0,35 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,5 & 0,3 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0,05 & 0,35 & 0 \\ 0 & 0,05 & 0,05 & 1 \end{pmatrix}$$

Durch intensive Forschungen konnte die Schädlingsbekämpfung mittels Infizierung in den letzten Jahren effizienter gestaltet werden und lässt sich nun mit der Übergangsmatrix M beschreiben. Führen Sie im Folgenden alle Berechnungen mit dieser Matrix durch.

$$M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 & 0 \\ 0,2 & 0,05 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,05 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zu Beginn der Schädlingsbekämpfung sind von 10 000 Schädlingen insgesamt 10 % infiziert und alle anderen sind gesund.

b)
- Berechnen Sie die Anzahlen in den einzelnen Gruppen der Schädlinge nach einer und nach 10 Wochen.
- Berechnen Sie, wie viel Prozent dieser 10000 Schädlinge nach den 10 Wochen leben. (4P)

c)
- Berechnen Sie die Anzahl der gesunden Schädlinge 2, 4, 6, 8 und 10 Wochen nach der Infizierung.
- Begründen Sie, warum eine Exponentialfunktion die zeitliche Entwicklung der Anzahl der gesunden Schädlinge angemessen modellieren könnte.
- Geben Sie zu den im ersten Spiegelpunkt dieses Aufgabenteils berechneten Werten eine exponentielle Regressionsfunktion f an und berechnen Sie die Funktionswerte zu den Zeitpunkten 2, 4, 6, 8 und 10 (10P)

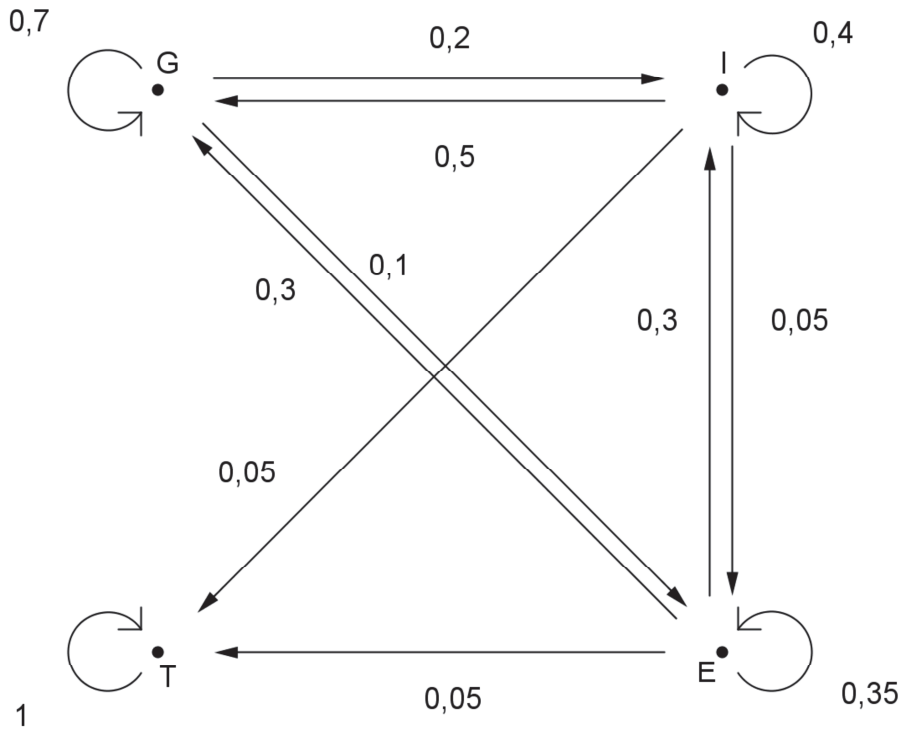
d)
- Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $M \cdot \vec{x} = \vec{x}$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.
- Begründen Sie allgemein, dass im vorliegenden Modell diese Art der Schädlingsbekämpfung langfristig immer zum Tod aller Schädlinge führt. (11P)

In einem Labor wird die Ausbreitung der Infektion untersucht. Hier werden während der laufenden Untersuchung 3000 gesunde, 5000 infizierte und 2000 erkrankte Schädlinge ermittelt.
Hinweis: Die Anzahl der toten Schädlinge wurde vom Labor nicht ermittelt.

e) Begründen Sie, dass in diesem Labor nicht die gleichen Übergangsraten vorlagen. (7P)

f) In diesem Labor zeigen die infizierten Schädlinge eine wesentlich höhere Gesundungsrate, entsprechend sinkt die Rate derjenigen, die infiziert bleiben. Alle anderen Übergangsraten bleiben unverändert.
Bestimmen Sie die Übergangsmatrix in diesem Labor, wenn eine Woche später 4900 gesunde, 3000 infizierte und 1650 erkrankte Schädlinge gezählt werden. (12P)

Anlage zur Aufgabe „Infizierte Schädlinge“



Erwartungshorizont

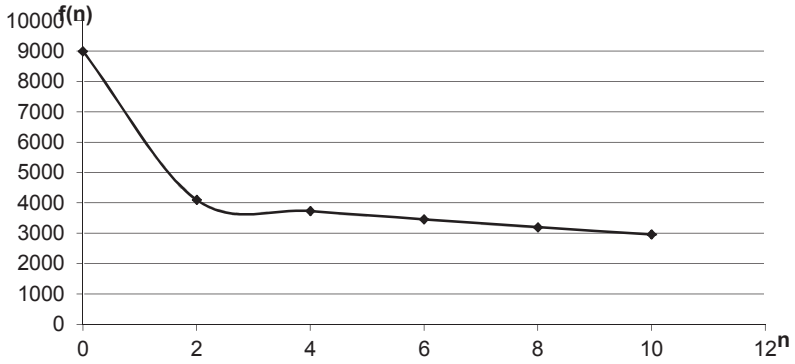
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	• Die gesuchte Matrix ist A_3. • Laut Diagramm bleiben 100 % der Toten auch im nächsten Zeitschritt tot, dies wird im Diagramm durch den Wert 1 beim Zustand T angezeigt. In der Matrix muss also rechts unten der Wert 1 erscheinen. Dies ist bei A_1 nicht der Fall. A_2 ist nicht geeignet, da die Spaltensummen nicht 1 sind. Dadurch werden nicht 100 % der Schädlinge einer Gruppe in die nächste Woche mit übernommen. Die Summe aller Schädlinge muss unabhängig vom aktuellen Bestandsvektor aber immer konstant sein, da keine Schädlinge dazukommen oder verschwinden. *Die letzte Begründung kann auch als Argument, A_1 auszuschließen, gelten. Alternative Begründungen sind möglich.*	2	4	
b)	• Es ist laut Vorgaben: $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 9000 \\ 1000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Damit berechnen sich die Anzahlen in den Gruppen der Schädlinge nach einer bzw. nach 10 Wochen mit: $\vec{v}_1 = M \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 4900 \\ 3200 \\ 1850 \\ 50 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{v}_{10} = M^{10} \cdot \vec{v}_0 \approx \begin{pmatrix} 2961 \\ 2768 \\ 1300 \\ 2971 \end{pmatrix}$. • Also sind insgesamt 2961 + 2768 + 1300 = 7029 Schädlinge nicht gestorben. $\frac{7029}{10000} = 0{,}7029$. Der Prozentsatz, der nach diesen 10 Wochen noch lebenden Schädlingen ist ca. 70,3 %. *Rundet der Prüfling aus sachkontextualen Gründen grundsätzlich <u>ab</u>, so ist dies zu akzeptieren.*	4		

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III

c) • Es werden für die Wochen 2, 4, 6, 8 und 10 die Anzahl der gesunden Schädlinge (1. Komponente von $\vec{v}_n$) bestimmt mit Hilfe einer der Gleichungen $\vec{v}_n = M^n \cdot \vec{v}_0$ oder $\vec{v}_{n+1} = M \cdot \vec{v}_n$:

n	2	4	6	8	10
Anzahl	4100	3731	3459	3200	2961

• Beispielsweise in einer graphischen Darstellung (s. u.) erkennt man, dass die Funktionswerte zunächst steil abfallen und dann sehr langsam weiter fallen. Dies entspricht dem Verhalten einer fallenden Exponentialfunktion.



• Es ergibt sich: $f(n) = 4414{,}07 \cdot e^{-0{,}040222 \cdot n} \approx 4414{,}07 \cdot 0{,}96059^n$

n	2	4	6	8	10
$f(n) \approx$	4072,9	3758,1	3467,6	3199,6	2952,3

Rundet der Prüfling aus sachkontextualen Gründen grundsätzlich ab, so ist dies zu akzeptieren.

I	II	III
6	4	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
d)	• Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung $M \cdot \vec{x} = \vec{x}$. Das dazugehörige Gleichungssystem $\begin{array}{rcrcrcrcl} 0{,}5x_1 & + & 0{,}4x_2 & + & 0{,}2x_3 & & & = & x_1 \\ 0{,}3x_1 & + & 0{,}5x_2 & + & 0{,}3x_3 & & & = & x_2 \\ 0{,}2x_1 & + & 0{,}05x_2 & + & 0{,}4x_3 & & & = & x_3 \\ & & 0{,}05x_2 & + & 0{,}1x_3 & + & x_4 & = & x_4 \end{array}$ liefert $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ mit einem freien Wert für x_4. Damit sind alle Lösungen der Gleichung Vielfache des Vektors: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zeitlich konstante Verteilungen existieren also genau für den Fall, dass alle Schädlinge tot sind. *Alternative Lösungswege z. B. über Eigenwerte und Eigenvektoren sind möglich.* • Als betragsgrößter Eigenwert ergibt sich $\lambda_1 = 1$ (für den zweiten reellen Eigenwert gilt $\lambda_2 \approx 0{,}96$, die nichtreellen Eigenwerte brauchen laut Aufgabenstellung nicht beachtet zu werden). Zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ gehört ein Eigenvektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Einfluss der Eigenvektoren zu Eigenwerten, die betragsmäßig kleiner als eins sind, wird langfristig immer kleiner; es dominiert langfristig der Eigenvektor $\vec{w}$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$. Das entspricht den Verteilungen, in denen alle Schädlinge tot sind. *Andere Begründungen sind möglich. Für eine Begründung, die lediglich empirisch mit hohen Potenzen der Matrix M arbeitet, werden nur Teilpunkte gegeben.*		6	5

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
e)	Der aktuell gezählte Bestand an Schädlingen ist $\vec{w}_0 = \begin{pmatrix} 3000 \\ 5000 \\ 2000 \\ \mu \end{pmatrix}$. Gesucht wird der Bestand zum vorherigen Zeitpunkt, also $\vec{w}_{-1}$. Damit ergibt sich die zu lösende Gleichung: $M \cdot \vec{w}_{-1} = \begin{pmatrix} 3000 \\ 5000 \\ 2000 \\ \mu \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{array}{rcrcrcrcr} 0{,}5x_1 & + & 0{,}4x_2 & + & 0{,}2x_3 & & & = & 3000 \\ 0{,}3x_1 & + & 0{,}5x_2 & + & 0{,}3x_3 & & & = & 5000 \\ 0{,}2x_1 & + & 0{,}05x_2 & + & 0{,}4x_3 & & & = & 2000 \\ & & 0{,}05x_2 & + & 0{,}1x_3 & + & x_4 & = & \mu \end{array}$ Es ergibt sich: $\vec{w}_{-1} \approx \begin{pmatrix} -3010 \\ 8544 \\ 5437 \\ \mu - 971 \end{pmatrix}$ Die erste Komponente ist negativ. Da eine Anzahl nicht negativ sein kann, ist dieser Bestandsvektor nicht möglich. Der genannte Schädlingsbestand kann also nicht durch einen Prozess, der mithilfe der Matrix M modelliert wird, entstanden sein.		7	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
f)	Für das Labor wird die Matrix verändert zu $M_L = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4+\delta & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}5-\delta & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}05 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix}$ mit einem $\delta > 0$, da die Übergangsrate von den infizierten zu den gesunden Schädlingen erhöht sein soll. Da die Spaltensumme weiterhin den Wert 1 haben muss, muss die Rate der infiziert Bleibenden um den Wert δ gesenkt werden. Nun wird der Wert für δ gesucht, sodass gilt: $M_L \cdot \begin{pmatrix} 3000 \\ 5000 \\ 2000 \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4900 \\ 3000 \\ 1650 \\ \nu \end{pmatrix}$ In der Gleichungssystemschreibweise ergibt sich: $\begin{array}{rcrcrcrcl} 0{,}5\cdot 3000 & + & (0{,}4+\delta)\cdot 5000 & + & 0{,}2\cdot 2000 & & & = & 4900 \\ 0{,}3\cdot 3000 & + & (0{,}5-\delta)\cdot 5000 & + & 0{,}3\cdot 2000 & & & = & 3000 \\ 0{,}2\cdot 3000 & + & 0{,}05\cdot 5000 & + & 0{,}4\cdot 2000 & & & = & 1650 \\ & & 0{,}05\cdot 5000 & + & 0{,}1\cdot 2000 & + & \mu & = & \nu \end{array}$ Aus den ersten beiden Zeilen folgt $\delta = 0{,}2$. Die gesuchte Übergangsmatrix lautet also: $M_L = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}05 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix}$		6	6
	Insgesamt 50 BWE	12	27	11

Stochastik 1

IV.1 Pfusch am Bau

Dokumentieren Sie Ihre Lösungswege für jede Aufgabe so, dass man Ihre Vorgehensweise auch ohne CAS nachvollziehen kann.

Die Firma Fertighaus Hamburg Bau (FHH-Bau) stellt Fertighäuser her und wirbt damit, dass nur bei 2,7 % ihrer Häuser nach der Schlüsselübergabe ernsthafte Mängel beanstandet werden. Eine Investorengruppe überlegt, eine Siedlung mit 153 Fertighäusern von FHH-Bau bauen zu lassen. Die Gruppe beauftragt einen Berater, verschiedene Risiken zu analysieren.

Zuerst möchte der Berater das Auftreten von Baumängeln untersuchen. Dabei unterscheidet er nur nach „Das Haus hat Mängel“ und „Das Haus hat keine Mängel“. Er geht zusätzlich von der Annahme aus, dass die Anzahl der Häuser, die Mängel aufweisen, binomialverteilt ist.

a) Geben Sie an, welche mathematische Bedingung erfüllt sein muss, damit die Annahme des Beraters gerechtfertigt ist. (3P)

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Anzahl der Häuser mit Baumängeln binomialverteilt ist.

b) Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Siedlung
- genau 2 Häuser,
- mindestens 2 Häuser,
- mindestens 3 Häuser, aber höchstens 7 Häuser

mit Mängeln gebaut werden. (5P)

c) Die Investorengruppe kalkuliert, alle Häuser ohne Mängel mit einem Gewinn von 25.000 € pro Haus zu verkaufen. Die Beseitigung der Mängel kostet im Schnitt 15.000 € für jedes Haus, das Mängel aufweist. Bestimmen Sie den Gewinn, mit dem die Investorengruppe rechnen kann. (4P)

Gerüchten zufolge sind die Daten auf der Webseite von FHH-Bau geschönt und der Berater schätzt die tatsächliche Mängelquote aufgrund der Daten vom Bauamt höher als 2,7%. Der Berater führt unter den bisherigen Kunden eine anonyme Umfrage durch, um die Mängelquote nach oben abzusichern.
Er befragt 87 ehemalige Kunden der FHH-Bau und legt fest, dass er den Angaben der Webseite traut, wenn bei der Umfrage höchstens 5 Teilnehmer Mängel an dem Haus von FHH-Bau festgestellt haben.

d)
- Interpretieren Sie den Fehler 1. Art vor dem Hintergrund des dargelegten Sachkontextes.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art. (7P)

Bei der Auswertung der Umfrage stellt sich der Berater die Frage, welche Abweichungen von der behaupteten Mängelwahrscheinlichkeit von 2,7 % bei dieser Befragung von 87 ehemaligen Kunden überhaupt erkannt werden.

e)
- Geben Sie eine Funktionsgleichung zur Funktion β an, die die Wahrscheinlichkeit $\beta(p)$ des Fehlers 2. Art für den *tatsächlichen* Wert der Mängelwahrscheinlichkeit p angibt.
- Gehen Sie davon aus, dass die Funktion β auf ihrem Definitionsbereich [0; 1] monoton ist. Bestimmen Sie auf drei Nachkommastellen genau den kleinsten Wert für p, sodass die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art die 10 % -Grenze nicht überschreitet. (9P)

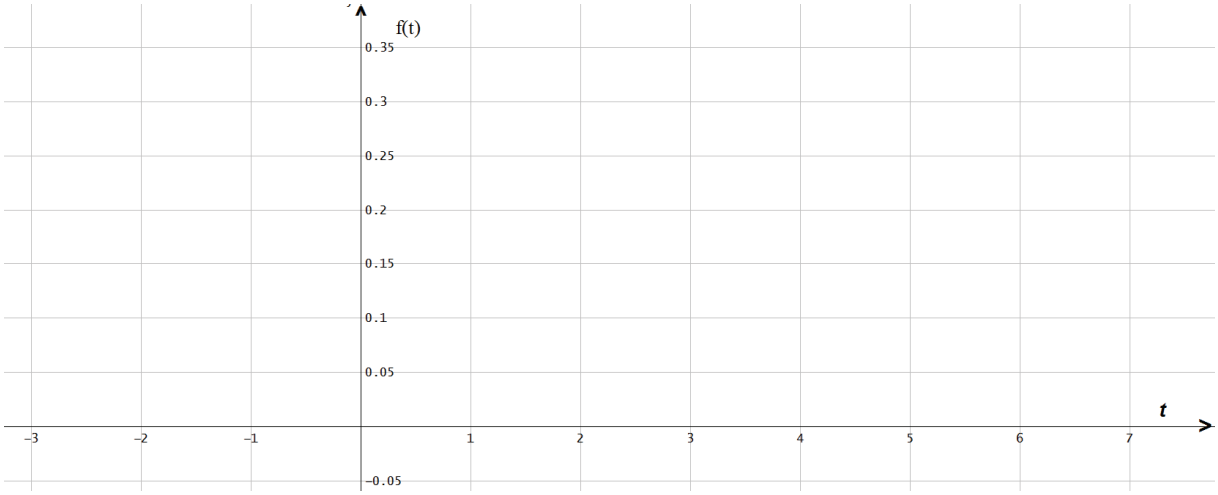
Der „Bundesverband Deutscher Fertigbau“ hat inzwischen die Ergebnisse einer genaueren Umfrage vorgelegt. Dabei wurden 9945 Besitzer von fertiggestellten Fertighäusern angeschrieben. 368 von ihnen gaben an, dass ihr Haus Baumängel hatte. Damit haben sich 92% aller Besitzer von Häusern mit Baumängeln an der Umfrage beteiligt. Dagegen beteiligten sich nur 80% der Besitzer von Häusern ohne Baumängel an der Umfrage.

f) Bestimmen Sie aus diesen Angaben (z. B. mithilfe einer Vierfeldertafel) einen neuen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Haus ohne Mängel gebaut wird. (10P)

Die Firma FHH-Bau bietet eine Gewährleistungsfrist von 4 Jahren an. Die Investorengruppe erhöht auf eigene Kosten die Gewährleistungsfrist um ein weiteres Jahr auf 5 Jahre. Für Mängel, die im fünften Jahr gemeldet werden, muss die Investorengruppe also selbst aufkommen. Es hat sich gezeigt, dass Mängel im Schnitt ca. 3 Jahre nach Bauübergabe ($\mu = 2,9$) mit einer Standardabweichung von ca. eineinhalb Jahren ($\sigma = 1,6$) entdeckt und dann gleich reklamiert werden. Der Berater möchte das finanzielle Risiko der Verlängerung der Gewährleistung für die Investoren untersuchen. Gehen Sie davon aus, dass der Zeitpunkt des Entdeckens und Reklamierens der Mängel normalverteilt ist. Die Zufallsvariable T beschreibt den Zeitpunkt, zu dem vorhandene Mängel entdeckt und reklamiert werden. Die Verteilungsfunktion F mit $F(t) = P(T \leq t)$ gibt die Wahrscheinlichkeit für eine Reklamation bis zum Zeitpunkt t an.

g)
- Geben Sie die Funktionsgleichung der Dichtefunktion f zur Verteilungsfunktion F an und zeichnen Sie den Graphen von f in das Koordinatensystem in der Anlage.
- Interpretieren Sie $P(T < 0)$ im Sachzusammenhang.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass vorhandene Mängel im Verlängerungsjahr – also im fünften Jahr – entdeckt und reklamiert werden. (12P)

Anlage zur Aufgabe „Pfusch am Bau“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Es gibt eine feste Erfolgswahrscheinlichkeit (2,7%), die für alle Häuser unabhängig von dem Auftreten von Mängeln bei allen anderen Häusern gleich ist.	3		
b)	$P(X=2)\approx 0{,}1359\approx 14\%$ $P(X\geq 2)=1-P(X\leq 1)\approx 0{,}9204\approx 92\%$ $P(3\leq X\leq 7)=P(X\leq 7)-P(X\leq 2)\approx 0{,}7277\approx 73\%$	2	3	
c)	Für den Gewinn gilt der folgende Term: $25000\cdot(n-\mu)+10000\cdot\mu$ Mit $n=153$ und $\mu=153\cdot 0{,}027=4{,}131$ ergibt sich der Wert 3763035. Die Investorengruppe kann mit einem Gewinn von etwa 3,76 Mio. € rechnen.			4
d)	• Fehler 1. Art: Die Nullhypothese wird verworfen, obwohl sie zutrifft. In diesem Sachkontext bedeutet dies, dass die Angaben von FHH-Bau stimmen, in der Umfrage jedoch mehr als 5 Teilnehmer angeben, dass ihr Haus Mängel hat. • X: Anzahl der Häuser mit Mängeln $n=87;\ p=0{,}027$ $\alpha=P(X>5)=1-P(X\leq 5)\approx 0{,}0306\approx 3\%$ Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art beträgt ungefähr 3%.	3	4	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
e)	• $\beta(p) = P(X \leq 5) = \sum_{k=0}^{5} \binom{87}{k} p^k \cdot (1-p)^{87-k}$			
	• Die Funktion β wird tabelliert:			

p	$\beta(p) \approx$
0,101	0,116134
0,102	0,110527
0,103	0,105146
0,104	0,099985
0,105	0,095038

Der kleinste Wert für die Mängelquote p, für den die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art die 10 % -Grenze nicht überschreitet, ist mit einer Genauigkeit von drei Nachkommastellen $p \approx 0{,}104$.

Bei diesem Vorgehen müssen mindestens die Funktionswerte zu $p = 0{,}104$ *und* $p = 0{,}103$ *notiert werden, um die Erfüllung des Kriteriums „kleinster Wert" zu dokumentieren.*

Alternativ ist das rechnergestützte Lösen der Gleichung $\beta(p) = 0{,}1$ *denkbar. Es ergibt sich* $p \approx 0{,}103997$ *. Bei diesem Vorgehen muss aber die Art der Monotonie untersucht werden, um zu klären, ob* $\beta(0{,}103) \leq 0{,}1$ *oder* $\beta(0{,}104) \leq 0{,}1$ *gilt. Ein bloßes Runden* $p \approx 0{,}103997 \approx 0{,}104$ *ohne Bezug darauf, dass die Funktion* β *monoton* <u>*fällt*</u>*, reicht nicht aus. Dieser Bezug kann z. B. tabellarisch (wie oben), graphisch oder analytisch erfolgen.*

			5	4

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
f)	Die Vierfeldertafel der absoluten Häufigkeiten kann z. B. im Ansatz mit vier Variablen aufgestellt werden:			

	an Umfrage teilgenommen	an Umfrage nicht teilgenommen	Summe
Haus mit Mängeln	a	b	$a+b$
Haus ohne Mängel	c	d	$c+d$
Summe	$a+c$	$b+d$	9945

Aus den gegebenen Informationen ergibt sich das folgenden Gleichungssystem:

$$a+b+c+d=9945$$
$$a=368$$
$$\frac{c}{c+d}=0{,}8$$
$$\frac{a}{a+b}=0{,}92$$

mit der eindeutigen Lösung: $a=368$, $b=32$, $c=7636$ und $d=1909$

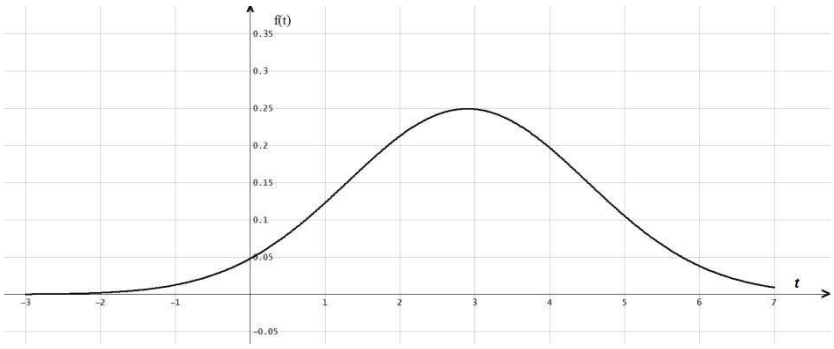
Es ergibt sich:

	an Umfrage teilgenommen	an Umfrage nicht teilgenommen	Summe
Haus mit Mängeln	368	32	400
Haus ohne Mängel	7636	1909	9545
Summe	8004	1941	9945

Als Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Haus ohne Mängel gebaut wird, dient die entsprechende relative Häufigkeit:

$$P(\text{"Haus mängelfrei"}) \approx \frac{9545}{9945} \approx 0{,}96 = 96\%$$

			6	4

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
g)	• $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1,6}\cdot e^{-\frac{(t-2,9)^2}{2\cdot 1,6^2}}$ Graphische Darstellung der Dichtefunktion f:  • $P(T<0)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass vorhandene Mängel bereits vor der Schlüsselübergabe reklamiert werden. • $\int_4^5 f(t)\,dt \approx 0,151$ Die Wahrscheinlichkeit, dass vorhandene Mängel im fünften Jahr entdeckt und reklamiert werden, beträgt ca. 15,1%.	4	8	
	Insgesamt 50 BWE	12	26	12

IV.2 Spielautomat

Dokumentieren Sie Ihre Lösungswege für jede Aufgabe so, dass man Ihre Vorgehensweise auch ohne CAS nachvollziehen kann.

Ein Spieler spielt an einem Spielautomaten. Er setzt immer ganze Eurobeträge ein. In jeder Runde beträgt seine Gewinnwahrscheinlichkeit unabhängig von den Ergebnissen vorangegangener Spiele 0,48. Die Auszahlung macht im Gewinnfall das Doppelte des Einsatzes aus, im Verlustfall wird der Einsatz einbehalten. Setzt er also 2 Euro ein, so gehen entweder diese 2 Euro verloren oder es werden 4 Euro ausgezahlt; im Gewinnfall hätte er also 2 Euro gewonnen.

a) Der Spieler spielt insgesamt zehn Spiele.
Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass er

- alle Spiele gewinnt,
- genau die Hälfte der Spiele gewinnt.

Ermitteln Sie auch jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass er

- mehr als die Hälfte der Spiele gewinnt,
- im Wechsel gewinnt und verliert. (8P)

Ein anderer Spieler beginnt mit einem Guthaben von nur einem Euro. Sobald das Guthaben auf Null geschrumpft ist, beendet er das Spielen, ansonsten spielt er weiter. Sein Einsatz ist jedes Mal ein Euro.

b)
- Erstellen Sie für die ersten drei Spielrunden ein Baumdiagramm;
die Spielzustände entsprechen dabei dem Guthaben des Spielers.
- Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spieler nach dem ersten, nach dem zweiten, nach dem dritten, nach dem vierten, nach dem fünften Spiel das Guthaben 0 € hat. (11P)

Der Spieler setzt sich mit seinem Anfangsguthaben von einem Euro ein klares Ziel: Er will ein Guthaben von drei Euro erreichen und dann aufhören. Aufhören muss der Spieler auch, wenn er sein Guthaben verspielt hat. Es gibt vier Spielzustände, die den Guthaben von null, einem, zwei und drei Euro entsprechen.

Der Vektor $\vec{p}_n$ gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Spieler nach der n-ten Spielrunde über welches Guthaben verfügt, wobei die erste Komponente die Wahrscheinlichkeit für das Guthaben „null Euro“ anzeigt, die zweite für das Guthaben „ein Euro“ usw.

Die Übergangsmatrix für dieses Spiel ist die Matrix M. Es gilt die Gleichung $\vec{p}_{n+1} = M \cdot \vec{p}_n$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}52 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}52 & 0 \\ 0 & 0{,}48 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}48 & 1 \end{pmatrix}$$

c)
- Erstellen Sie einen Übergangsgraphen mit allen Übergangswahrscheinlichkeiten.
- Interpretieren Sie die von Null verschiedenen Matrixeinträge in den letzten beiden Spalten im Kontext des Spiels. (7P)

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass der Spieler mit einem Euro Guthaben startet.

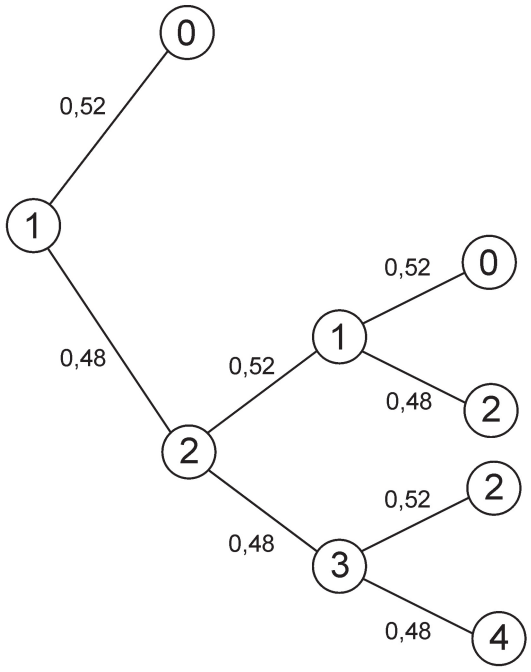
d)
- Ermitteln Sie $\vec{p}_3$.
- Bestimmen Sie M^n für n von 5 bis 10 und interpretieren Sie die Entwicklung der ersten Spalte und die Entwicklung der zweiten Spalte dieser Matrizen im Kontext des Spiels.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler sein 3-€-Ziel erreicht, *exakt*. Verwenden Sie dabei *nicht* die numerischen Ergebnisse der obigen Matrixpotenzierung. (14P)

e) Im Rahmen einer Neujustierung des Spielautomaten soll untersucht werden, wie sich die Gewinnwahrscheinlichkeit p auf den Erwartungswert der Spieldauer $E(p)$ auswirkt.
Das Spiel endet, wenn der Spieler sein 3-€-Ziel erreicht hat oder über kein Geld mehr verfügt.

- Zeigen Sie, dass gilt: $E(p) = \dfrac{p+1}{p^2 - p + 1}$
- Ermitteln Sie die Erwartungswerte für die minimale und die maximale Spieldauer mit einer Genauigkeit von zwei Nachkommastellen. (10P)

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	X ist die Anzahl der Erfolge des Spielers. • $P(X=10) \approx 0{,}000649 \approx 0{,}065\%$ • $P(X=5) \approx 0{,}244 \approx 24\%$ • $P(X>5) = 1 - P(X \leq 5) \approx 0{,}329 \approx 33\%$ • $P(\text{abwechselnd Gewinn/Verlust}) = 2 \cdot 0{,}48^5 \cdot 0{,}52^5 \approx 0{,}00194 \approx 0{,}19\%$ *Der Faktor 2 in der letzten Rechnung rührt daher, dass man mit Gewinn oder mit Verlust in der ersten Runde beginnen kann.*	4	4	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
b)	• Baumdiagramm: 			
	• Aus dem Baumdiagramm wird deutlich, dass man nach dem ersten Spiel und oder nach dem dritten Spiel bei 0 € landen kann, nicht jedoch nach dem zweiten Spiel. Nach dem vierten Spiel ist der Spielstand 0 € ebenfalls nicht erreichbar, weil jeweils nur 1 € verloren werden kann, und dies führt bei den Spielständen 2 € bzw. 4 € minimal zu 1 € bzw. 3 €. Nach dem fünften Spiel kann man den Spielstand 0 € erreichen, wenn man beim Spielstand von 2 € nach dem dritten Spiel (der auf zwei Pfaden erreicht werden kann) zweimal hintereinander verliert. Im Einzelnen: $P(\text{Spielstand 0 € nach dem ersten Spiel}) = 0{,}52$ $P(\text{Spielstand 0 € nach dem zweiten Spiel}) = 0$ $P(\text{Spielstand 0 € nach dem dritten Spiel}) = 0{,}48 \cdot 0{,}52^2 = 0{,}129792 \approx 0{,}13$ $P(\text{Spielstand 0 € nach dem vierten Spiel}) = 0$ $P(\text{Spielstand 0 € nach dem fünften Spiel}) = 2 \cdot 0{,}48^2 \cdot 0{,}52^3 \approx 0{,}065$	4	7	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	• Übergangsgraph:  • In Spalte 3 entspricht 0,52 der Wahrscheinlichkeit, von dem Guthaben 2 € auf das Guthaben 1 € zurückzufallen, hingegen steigt man mit Wahrscheinlichkeit 0,48 auf das Guthaben 3 € an. In Spalte 4 entspricht der Wert 1 der Wahrscheinlichkeit, beim Guthaben 3 € zu bleiben, wenn man 3 € Guthaben hat.	4	3	
d)	• Aus dem Startvektor $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich $\vec{p}_3 = M^3 \cdot \vec{p}_0 \approx \begin{pmatrix} 0{,}65 \\ 0 \\ 0{,}12 \\ 0{,}23 \end{pmatrix}$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	• $M^5 \approx \begin{pmatrix} 1 & 0{,}682 & 0{,}338 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}032 & 0 \\ 0 & 0{,}030 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}288 & 0{,}630 & 1 \end{pmatrix}$ $M^6 \approx \begin{pmatrix} 1 & 0{,}682 & 0{,}355 & 0 \\ 0 & 0{,}016 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}016 & 0 \\ 0 & 0{,}302 & 0{,}630 & 1 \end{pmatrix}$ $M^7 \approx \begin{pmatrix} 1 & 0{,}690 & 0{,}355 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}008 & 0 \\ 0 & 0{,}007 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}302 & 0{,}637 & 1 \end{pmatrix}$ $M^8 \approx \begin{pmatrix} 1 & 0{,}690 & 0{,}359 & 0 \\ 0 & 0{,}004 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}004 & 0 \\ 0 & 0{,}306 & 0{,}637 & 1 \end{pmatrix}$ $M^9 \approx \begin{pmatrix} 1 & 0{,}692 & 0{,}359 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}002 & 0 \\ 0 & 0{,}002 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}306 & 0{,}639 & 1 \end{pmatrix}$ $M^{10} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0{,}692 & 0{,}360 & 0 \\ 0 & 0{,}001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}001 & 0 \\ 0 & 0{,}307 & 0{,}639 & 1 \end{pmatrix}$ • Interpretation der Entwicklung der ersten Spalte: Alle Matrizen haben dieselbe ersten Spalte. Darin spiegelt sich die Spielregel wider, dass man den einmal erreichten Endzustand Guthaben 0 € nicht wieder verlassen kann. Interpretation der Entwicklung der zweiten Spalte: Startet man mit einem Guthaben von 1 €, also mit dem Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, liegen in der zweiten Spalte der Matrix alle relevanten Informationen: Man liegt nach vielen Spielen mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 69 % bei einem Guthaben von 0 € und mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 31 % bei einem Guthaben von 3 €. Bei einer ungeraden Anzahl von Spielen gibt es zudem eine kleine Wahrscheinlichkeit, ein Guthaben von 2 € zu erreichen. Diese Wahrscheinlichkeit nimmt mit zunehmender Spielanzahl ab. Das Guthaben von 1 € ist bei einer ungeraden Anzahl von Spielen nicht zu erreichen. Bei einer geraden Anzahl von Spielen hingegen ist das Guthaben von 2 € nicht zu erreichen, während das Guthaben 1 € mit einer kleinen und abnehmenden Wahrscheinlichkeit erzielbar ist. • Sei a_1 die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler ausgehend von einem Startguthaben 1 € sein 3-€-Ziel erreicht und a_2 diejenige Wahrscheinlichkeit, dass ihm dies mit einem Startguthaben von 2 € gelingt. Unter Bezug auf den Übergangsgraphen oder durch direkte Anwendung der ersten Mittelwertsregel ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem: $a_1 = 0{,}48 \cdot a_2 \wedge a_2 = 0{,}48 + 0{,}52 \cdot a_1$ Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist die Lösung a_1 dieses Gleichungssystems, nämlich $a_1 = \frac{144}{469}$.		10	4

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	• Sei $E(p)$ der Erwartungswert der Spieldauer, wenn man von 1 € Guthaben ausgeht und $E_2(p)$ der entsprechende Erwartungswert, wenn man von 2 € Guthaben ausgeht. Hier kann man mittels des Übergangsgraphen oder über die zweite Mittelwertsregel wie folgt ansetzen: $$E(p)=1+p\cdot E_2(p)\wedge E_2(p)=1+(1-p)\cdot E(p)$$ Der gesuchte Erwartungswert ist die Lösung $E(p)$ dieses Gleichungssystems, nämlich $E(p)=\frac{p+1}{p^2-p+1}$. *Möglich ist z. B. auch der folgende direkte Ansatz:* $E(p)=(1-p)+2p^2+(1-p)\cdot p\cdot(E(p)+2)$ • Aus $E'(p)=0$ folgt $p=\sqrt{3}-1$ oder $p=-\sqrt{3}-1$. Da es sich um Wahrscheinlichkeiten handelt, kommt die negative Lösung nicht infrage. Es gilt $E''\left(\sqrt{3}-1\right)\approx-5{,}36<0$. Also befindet sich an der Stelle $p=\sqrt{3}-1$ ein lokales Maximum. Es gilt $E\left(\sqrt{3}-1\right)\approx 2{,}1547\approx 2{,}15$ Wegen $0\le p\le 1$ sind die Ränder zu untersuchen: $E(0)=1$ und $E(1)=2$ Der minimale Erwartungswert für die Spieldauer ist genau 1, der maximale ist ca. 2,15. *Eine explizite Angabe der Terme für die erste und die zweite Ableitung ist beim Gebrauch eines CAS nicht notwendig.* *Andere Verfahren sind möglich, sofern sie die Genauigkeit von zwei Nachkommastellen gewährleisten.*		2	8
	Insgesamt 50 BWE	12	26	12