Aufgabe I: Hilfsmittelfreier Prüfungsteil

I.1 Analysis

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = x^3 - 6a \cdot x^2 + (2a + 12a^2) \cdot x - 8a^3$, wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist.
Ihre Ableitungsfunktionen sind die Funktionen f_a' mit $f_a'(x) = 3x^2 - 12a \cdot x + (2a + 12a^2)$.
Als ganzrationale Funktion dritten Grades hat jede Funktion f_a genau einen Wendepunkt W_a.

a) **Bestätigen** Sie die Wendepunktkoordinaten $W_a(2a|4a^2)$. **(2 BE)**

b) **Bestätigen** Sie, dass jeder Wendepunkt W_a auf der Normalparabel $y = x^2$ liegt. **(1 BE)**

c) Die jeweilige Wendetangente ist die Tangente, die an den Graphen von f_a im Wendepunkt W_a angelegt wird.
Zeigen Sie, dass alle Wendetangenten Ursprungsgeraden sind. **(2 BE)**

I.2 Analytische Geometrie

Gegeben sind die Punkte $A(0|0|0)$, $B(0|0|9)$, $C(4|-2|4)$ und $D(-2|4|4)$.

Folglich ist $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) **Bestätigen** Sie, dass $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}|$ gilt. **(1 BE)**

b) **Bestätigen** Sie, dass die Dreiecke ABC und ABD jeweils bei A den gleichen Winkel haben. **(2 BE)**

c) **Begründen** Sie, dass die Dreiecke ABC und ABD den gleichen Flächeninhalt haben. **(2 BE)**

I.3 Stochastik

Ein Großlieferant beliefert eine Supermarktkette mit abgepackten Zucchini. Seine Verpackungsmaschine stellt erfahrungsgemäß 4 % fehlerhafte Packungen her.
Alle hergestellten Packungen durchlaufen automatisch eine optische Kontrolle. Die optische Kontrolle hat folgende Eigenschaften:

- 90 % der fehlerhaften Packungen werden erkannt und aussortiert.
- Allerdings werden auch 15 % der fehlerfreien Packungen aussortiert.

Diese relativen Häufigkeiten werden für das Weitere als Wahrscheinlichkeiten gedeutet. In der folgenden Vierfeldertafel sind einige Wahrscheinlichkeiten notiert.

	aussortiert $(+)$	nicht aussortiert $(-)$	Summe
fehlerhaft (f)	0,036	...	0,04
fehlerfrei $(\overline{f})$	0,144	...	0,96
Summe	0,180		1

a) **Berechnen** Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine aussortierte Packung tatsächlich fehlerhaft ist. **(1 BE)**

Nach längerer Betriebsdauer wird beobachtet, dass, abweichend vom Ergebnis in Aufgabenteil a), unter den aussortierten Packungen 40 % fehlerhafte sind. Es wird angenommen, dass dieser veränderte Prozentsatz allein durch einen veränderten Anteil fehlerhafter Packungen in der Herstellung zu erklären ist, dass aber die oben genannten Eigenschaften der optischen Kontrolle erhalten bleiben.

b) **Bestimmen** Sie unter dieser Annahme den Anteil fehlerhafter Packungen in der Herstellung, der zu dem neuen Prozentsatz von 40 % geführt haben muss. **(4 BE)**

I.4 Analysis

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades. Die Nullstellen der Funktion f sind der Reihe nach mit n_1 bis n_4 bezeichnet.

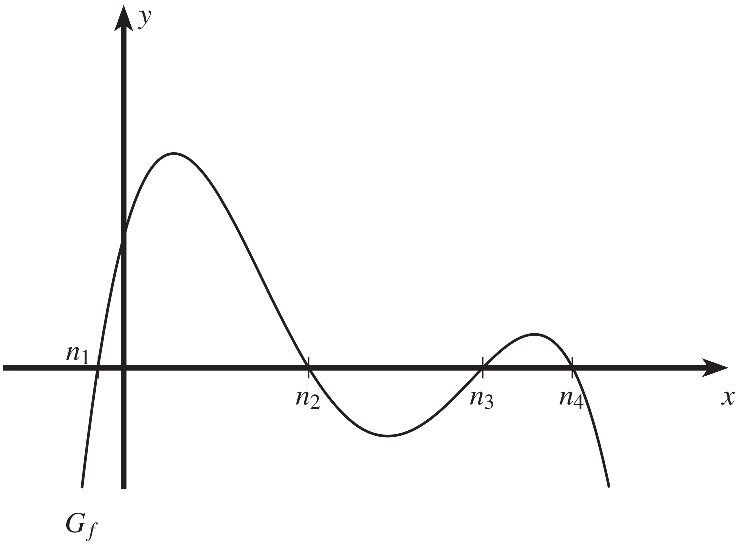


Abb. 1

a) **Zeichnen** Sie in Abbildung 1 eine Tangente ein, die G_f an zwei Stellen berührt. **(1 BE)**

b) Behauptung: Jede ganzrationale Funktion vierten Grades besitzt eine Tangente an ihren Graphen mit zwei Berührpunkten.
Widerlegen Sie die Behauptung. **(2 BE)**

c) **Skizzieren** Sie in Abbildung 2 den Graphen der Funktion u mit $u(x) = \sqrt{(f(x))^2}$. **(2 BE)**

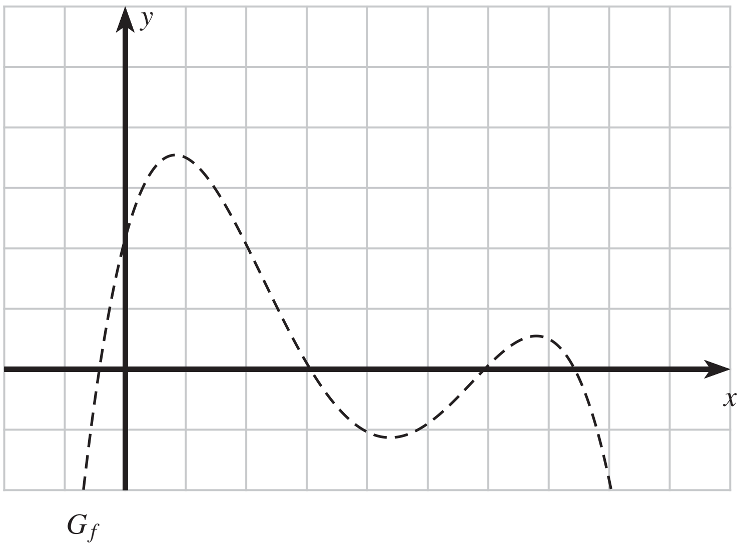


Abb. 2

Aufgabe II.2 (Aufgabengruppe 2): Planspiel

Schwerpunktthema: Analysis

1. Ein ökologisches Planspiel wird entworfen. Darin wird die Bevölkerungsentwicklung in einer landschaftlich und wirtschaftlich weitgehend abgeschlossenen Region modelliert. Die Bevölkerung ernährt sich von den landwirtschaftlichen Erzeugnissen auf der Grünfläche ihrer Region. Diese Grünfläche wird durch die Ausbreitung einer angrenzenden Wüste im Laufe der Zeit verkleinert.
Damit die Bevölkerung ausreichend versorgt ist, darf die Region nicht zu dicht besiedelt werden. Die größtmögliche Bevölkerungsdichte wird im Planspiel als zulässige Bevölkerungsdichte bezeichnet. Die zulässige Bevölkerungsdichte ändert sich im Laufe der Zeit, weil die Bevölkerung ihre Infrastruktur ausbaut und ihre landwirtschaftliche Produktivität erhöht.
Dem Planspiel werden folgende Variablen und Funktionen zugrunde gelegt:

- Die Variable t beschreibt die Zeit in Jahren ab Modellierungsbeginn, es gilt $t \geq 0$.
- Die Funktion f mit $f(t) = 5 + e^{-0{,}02 \cdot t}$ ordnet der Zeit die jeweilige Größe der Grünfläche in Flächeneinheiten (FE) zu, wobei 1 FE einem Flächeninhalt von 100 km^2 entspricht.
- Die Funktion p mit $p(t) = 40 - 25 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}$ ordnet der Zeit die jeweilige zulässige Bevölkerungsdichte in 1000 Einwohnern pro FE Grünfläche zu.
- Daraus ergibt sich die zulässige Einwohnerzahl der Region als Funktion b mit

$$b(t) = f(t) \cdot p(t).$$

a) Es ist $f(0) = 6$.
Geben Sie die Funktionswerte $p(0)$ und $b(0)$ **an**.
Deuten Sie diese drei Funktionswerte im Sachkontext. **(4 BE)**

b) **Begründen** Sie anhand der jeweiligen Funktionsterme:
(1) Die Funktionen f und p sind monoton, also monoton steigend oder fallend.
(2) Die Funktionen f und p streben einer Grenze zu.
Geben Sie $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ und $\lim\limits_{t\to\infty} p(t)$ **an**. **(6 BE)**

c) **Zeigen** Sie, dass $b'(t) = -0{,}02 \cdot e^{-0{,}02 \cdot t} \cdot (40 - 25 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}) + (5 + e^{-0{,}02 \cdot t}) \cdot 2{,}5 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}$ gilt. **(4 BE)**

Die folgende Abbildung 1 zeigt den Graphen von b.

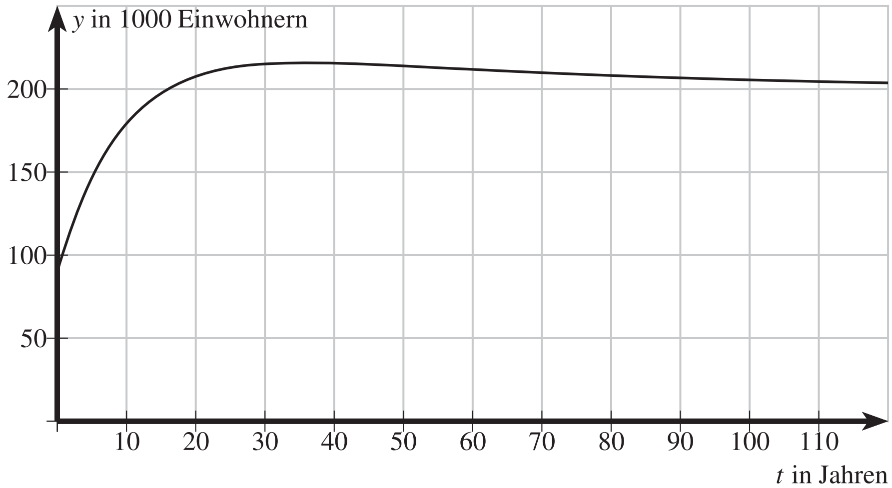


Abb. 1: Der Graph von b.

d) Der Graph von b (siehe Abbildung 1) zeigt, dass die zulässige Einwohnerzahl im Modell zwischen $t = 25$ und $t = 45$ genau ein Maximum hat.
Ermitteln Sie durch geeignete Tabellenwerte für $b'(t)$, von welchem vollendeten Jahr ab die Einwohnerzahl zu sinken beginnt. **(3 BE)**

2. Im Planspiel soll auch der Fall durchgespielt werden, dass die tatsächliche Einwohnerzahl der Region exponentiell wächst und die zulässige Einwohnerzahl überschreiten kann: Die parameterabhängige Funktion w_k mit $w_k(t) = 90 \cdot e^{k \cdot t} (t \geq 0, k > 0)$ beschreibt im Folgenden die tatsächliche Einwohnerzahl in 1000 Einwohnern. Die folgende Abbildung 2 zeigt zusätzlich zum Graphen der Funktion b den Graphen einer Funktion w_k für einen speziellen Wert von k.

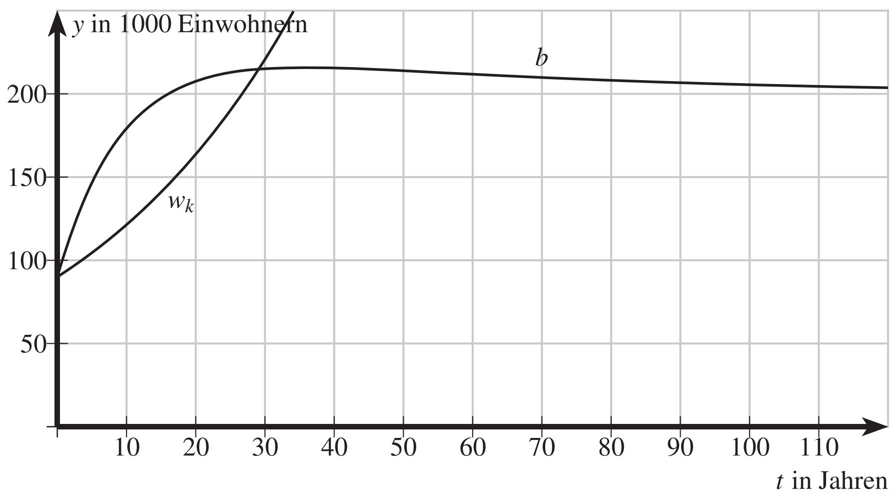


Abb. 2: Die Graphen von b und w_k.

a) **Geben** Sie für die in Abbildung 2 dargestellte Funktion w_k **an**, nach wie vielen Jahren die tatsächliche Einwohnerzahl größer als die zulässige Einwohnerzahl wird. **(1 BE)**

b) **Ermitteln** Sie mithilfe der Abbildung 2 den Wert des Parameters k, der dem dargestellten Graphen zugrunde liegt, auf zwei Nachkommastellen genau. **(3 BE)**

c) Es gibt Werte des Parameters k, für die $w_k'(0) \geq b'(0)$ gilt.
Begründen Sie anschaulich, dass aus der Beziehung $w_k'(0) \geq b'(0)$ folgt, dass der Graph von w_k für alle $t > 0$ über dem Graphen von b liegt. **(5 BE)**

d) Für bestimmte Werte des Parameters k wird die zulässige Einwohnerzahl von Anfang an, d. h. schon für beliebig kleine $t > 0$, von der tatsächlichen Einwohnerzahl überschritten.
Ermitteln Sie, für welche Werte von k dies der Fall ist. **(5 BE)**

3. Gegeben sind die in $\mathbb{R}\setminus\{-a\}$ definierten Funktionen r_a mit $r_a(x) = \frac{a}{x+a} (a > 0)$. Ihre Graphen werden mit G_a bezeichnet.

a) **Geben** Sie **an**, durch welche Verschiebungen, Streckungen, Stauchungen oder Spiegelungen G_a aus dem Graphen der Funktion h mit $h(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$ hervorgeht. **(2 BE)**

b) Der Punkt $P(0|1)$ ist ein Punkt, der auf allen Graphen G_a liegt.
Zeigen Sie:
Zwei Graphen G_a, deren Parameterwerte a_1 und a_2 verschieden sind $(a_1 \neq a_2)$, haben außer dem Punkt $P(0|1)$ keinen weiteren gemeinsamen Punkt. **(3 BE)**

c) **Bestimmen** Sie in Abhängigkeit von a einen möglichst einfachen Term für das Volumen des Rotationskörpers, der bei Rotation von G_a um die x-Achse im Bereich $0 \leq x \leq a$ entsteht. **(4 BE)**

d) **Leiten** Sie **her**, dass die im Punkt $P(0|1)$ angelegte Tangente durch die Gleichung $t_a(x) = -\frac{1}{a} \cdot (x - a)$ beschrieben werden kann. **(4 BE)**

e) Betrachtet wird der Fall $a = 1$. Der Graph G_1 schließt mit den Koordinatenachsen und der Geraden mit der Gleichung $x = 1$ eine Fläche M ein. Diese wird durch die Tangente t_1 in zwei Teilflächen geteilt. Die Teilfläche unterhalb der Tangente heißt M_1.
Bestimmen Sie den Anteil des Flächeninhalts von M_1 am Flächeninhalt von M.
Geben Sie den Anteil näherungsweise, auf drei Nachkommastellen genau **an**. **(6 BE)**

Aufgabe III.1 (Aufgabengruppe 1): Haus

Schwerpunktthema: Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem ist das Schrägbild eines Hauses mit Walmdach abgebildet.
Die gegebenen Punkte sind:
$A(3|-4|0)$, $B(3|8|0)$, $C(-3|8|0)$, $D(-3|-4|0)$, $E(3|-4|6)$, $F(3|8|6)$, $G(-3|8|6)$, $H(-3|-4|6)$, $K(0|0|10)$, $L(0|4|10)$ und $S\left(0|\frac{20}{3}|\frac{22}{3}\right)$.
Dabei entspricht jeweils eine Längeneinheit im Koordinatensystem einem Meter in der Wirklichkeit.

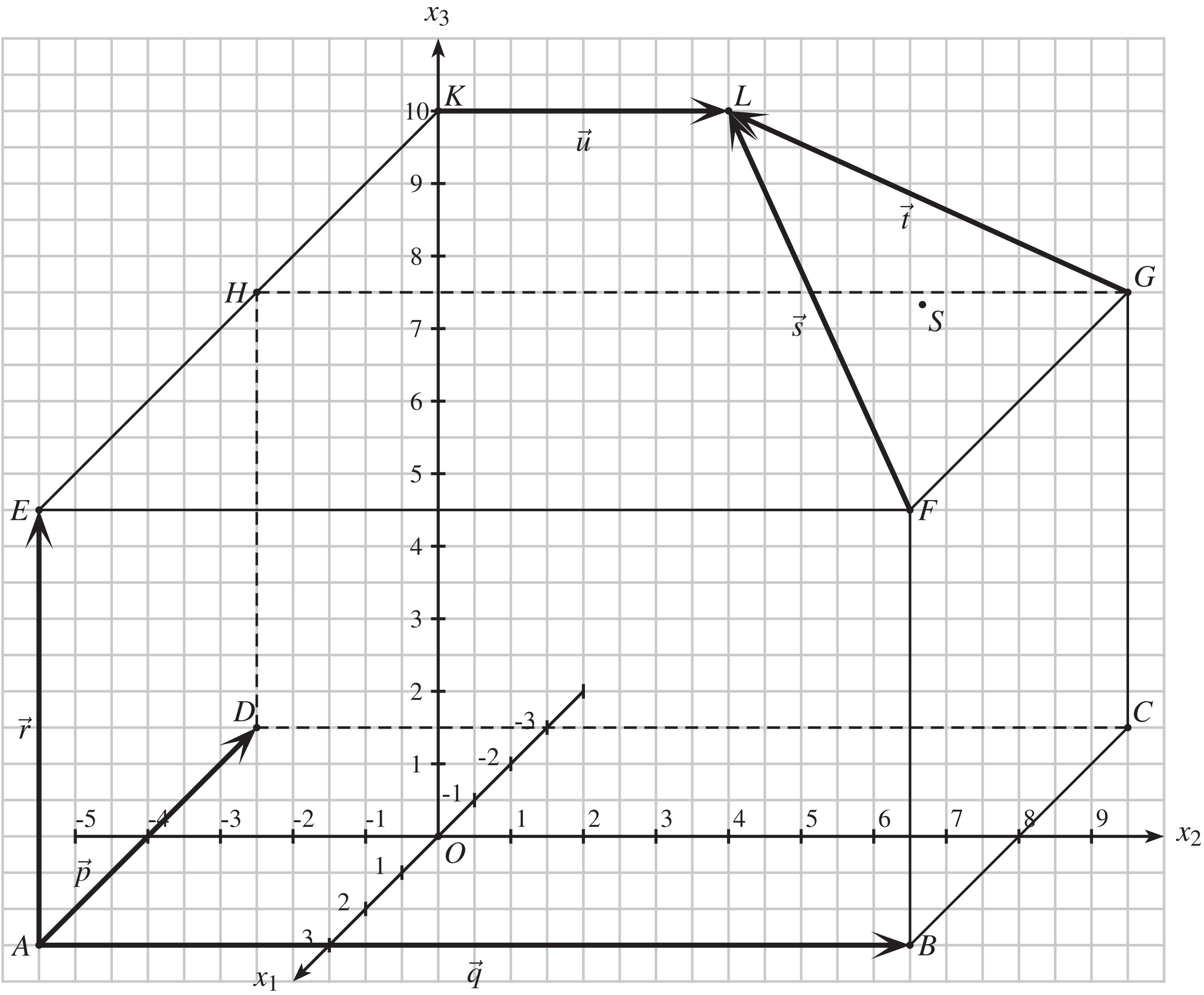


Abb. 1: Das Haus mit Walmdach

a) Stellen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{CL}$ und $\overrightarrow{AK}$ mithilfe der Vektoren $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{t}$ und $\vec{u}$ **dar**. **(3 BE)**

b) Geben Sie die Koordinaten zweier verschiedener Punkte **an**, die in der ebenen Darstellung des dreidimensionalen Koordinatensystems am gleichen Ort wie der Punkt H eingetragen werden, aber andere räumliche Koordinaten als der Punkt H haben. **(2 BE)**

c) **Zeigen** Sie, dass das Dreieck FGL ein gleichschenkliges, aber kein gleichseitiges Dreieck ist.
Berechnen Sie die Basiswinkel. **(3 BE)**

d) **Interpretieren** Sie die Bedeutung der folgenden Terme im Sachkontext der Aufgabe.
Begründen Sie Ihre Interpretation.

(I.) $|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot|\vec{r}|$

(II.) $\frac{1}{2}|\vec{p}|\cdot(|\overrightarrow{OK}|-|\vec{r}|)\cdot|\vec{u}|$

(III.) $\frac{1}{3}(|\vec{q}|-|\vec{u}|)\cdot|\vec{p}|\cdot\left(|\overrightarrow{OK}|-|\vec{r}|\right)$

Hinweis: Die Dreiecke FGL und EHK sind kongruent. **(4 BE)**

e) Betrachtet wird das Dreieck FGL.
Bestätigen Sie beispielhaft an einer der Seitenhalbierenden des Dreiecks die Aussage:
S teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis $1:2$. **(5 BE)**

f) Eine gerade Antenne steht im Punkt S auf dem Hausdach. Sie ist lotrecht zur Horizontalen ausgerichtet. Wenn Sonnenlicht in der Richtung
$\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\-\frac{4}{3}\\-0{,}5\end{pmatrix}$ auf das Haus fällt, liegt der Schattenpunkt der Antennenspitze im Punkt L.
Bestimmen Sie die Länge der Antenne. **(4 BE)**

g) Um das Haus herum soll ein gepflasterter Bereich angelegt werden, der das gleiche Flächenmaß hat wie die Grundfläche des Hauses. Der Weg soll unmittelbar an das Haus angrenzen und zu den entsprechenden Seiten der Hausgrundfläche parallele Begrenzungen haben. Die Breite des Weges w soll entlang der Hausseiten konstant sein.
Bestimmen Sie die äußeren Eckpunkte der Wegfläche um das Haus. **(4 BE)**

Aufgabe IV.1 (Aufgabengruppe 1): Physiotherapie

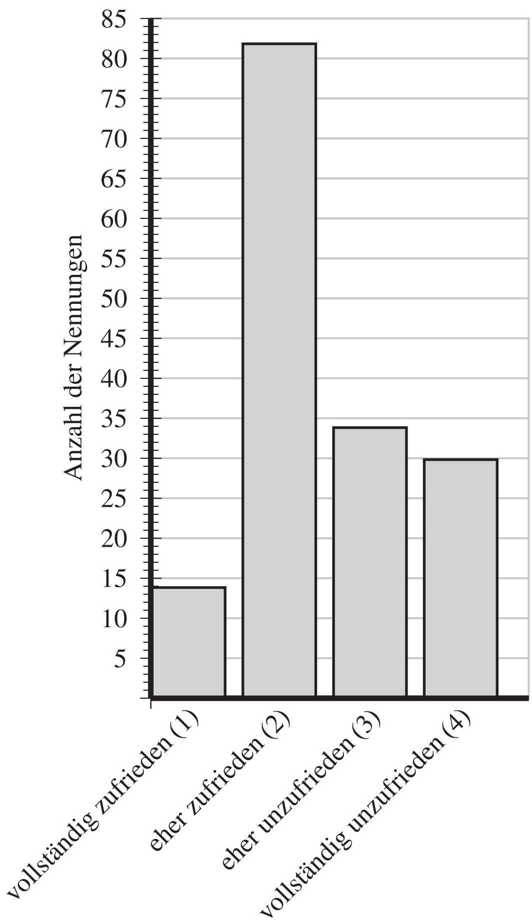
Schwerpunktthema: Stochastik

1. In einer Praxis für Physiotherapie arbeiten zwei Physiotherapeutinnen, A und B, die pro Jahr eine unterschiedliche Anzahl von Patientinnen und Patienten (kurz Patienten) behandeln. Nach Beendigung der Therapie werden die Patienten bezüglich ihrer Zufriedenheit mit der Physiotherapie befragt. Sie haben die Wahl zwischen vier Bewertungsstufen, denen jeweils eine Zahl zugeordnet ist. Die Ergebnisse der Befragungen für ein Jahr sind in einer Tabelle bzw. einem Diagramm festgehalten.

Therapeutin A

	Anzahl der Nennungen
vollständig zufrieden (1)	79
eher zufrieden (2)	61
eher unzufrieden (3)	16
vollständig unzufrieden (4)	94

Therapeutin B



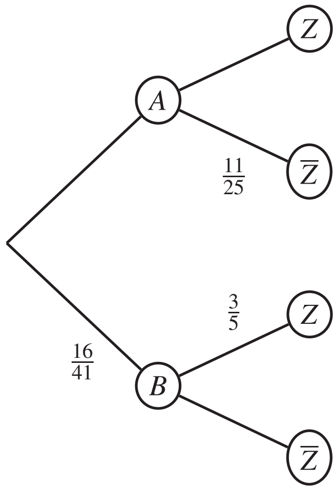
Wenn das Merkmal „zufrieden“ verwendet wird, so ist damit die Zusammenfassung der Merkmale „vollständig zufrieden“ (1) und „eher zufrieden“ (2) gemeint.

a) Das arithmetische Mittel der Bewertungen für Therapeutin A ist 2,5.
Bestätigen Sie, dass das arithmetische Mittel der Bewertungen für Therapeutin B ebenfalls 2,5 beträgt. **(2 BE)**

b) Die Varianz der Bewertungen für Therapeutin B ist 0,8.
Bestätigen Sie rechnerisch, dass die Varianz der Bewertungen für Therapeutin A mehr als doppelt so groß ist.
Erläutern Sie, wie man schon anhand der oben gegebenen Ausgangsdaten erkennen kann, dass die Varianz der Bewertungen bei Therapeutin B kleiner ist als die von Therapeutin A. **(3 BE)**

In den weiteren Aufgaben sollen die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten betrachtet werden.

c) Aus den 410 Patienten wird einer zufällig ausgewählt. Dabei werden die folgenden Ereignisse betrachtet:
Z**:** Der Patient ist zufrieden.
A**:** Der Patient wurde von Therapeutin A behandelt.
B**:** Der Patient wurde von Therapeutin B behandelt.
Das hier unvollständig angegebene Baumdiagramm stellt die Abhängigkeiten zwischen Therapeutinnen und Patientenzufriedenheit graphisch dar:



Ermitteln Sie mithilfe der Daten des Baumdiagramms die fehlenden Werte in der unten stehenden Vierfeldertafel:

	Z	$\overline{Z}$	
A			
B			
	$\frac{118}{205}$		1

(4 BE)

d) **Begründen** Sie, dass $P(Z|A)+P(\overline{Z}|A)=1$ gilt.
Bestätigen Sie, dass $P(Z|A)=0{,}56$ ist.
Berechnen Sie $P(B|Z)$. **(5 BE)**

e) Aufgrund der obigen Vorgaben gilt offenbar $P(Z|B) \neq P(Z)$.
Geben Sie unter Verwendung mathematischer Fachsprache **an**, welche Beziehung zwischen Z und B durch diese Ungleichung ausgedrückt wird.
Interpretieren Sie die Ungleichung vor dem Hintergrund des Sachkontextes. **(3 BE)**

f) Durch eine Umstrukturierungsmaßnahme soll in Zukunft Therapeutin A genauso viele Patienten behandeln wie Therapeutin B. Außerdem wird zur Entlastung der beiden eine dritte Therapeutin C eingestellt. Erfahrungswerte zeigen, dass 57 % ihrer Patienten zufrieden sind. Die Wahrscheinlichkeiten der Patientenzufriedenheit bleiben bei den Therapeutinnen A und B unverändert.
c mit $c \leq 1$ ist der Anteil der Patienten, die von Therapeutin C behandelt werden.
Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Patient zufrieden ist, durch den Term $-0{,}01c+0{,}58$ gegeben ist.
Beurteilen Sie mithilfe einer Rechnung die folgende Aussage:

> „Die Größe des Patientenanteils, der von Therapeutin C behandelt wird, hat nur einen geringen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Patient zufrieden ist."

(4 BE)

2. In einer anderen Praxis werden die Patienten nach Therapieende ebenfalls nach ihrer Zufriedenheit befragt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Patient zufrieden ist, wird mit p bezeichnet.
Einer der unten stehenden Ausdrücke gibt die Wahrscheinlichkeit an, unter den ersten n Befragten mindestens einen zufriedenen Patienten zu finden.
Entscheiden Sie, welcher der drei Ausdrücke korrekt ist.
Begründen Sie Ihre Entscheidung mithilfe eines Baumdiagramms.

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n-1}(1-p)^k p$ (2) $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(1-p)^k p$ (3) $\sum\limits_{k=0}^{n}(1-p)^k p$

(4 BE)