ANALYSIS 1

I.1 Bakterien

Ein Forschungslabor untersucht die antibiotische Wirkung einer Substanz auf Bakterien.

Dabei wird zunächst das Wachstum einer Bakterienkultur beobachtet, die zu Beginn der Beobachtung 1000 Bakterien hat. Jede Stunde nimmt die Anzahl der Bakterien um 25 % zu.

Dieser Wachstumsprozess soll durch eine Funktion N_1 mit der Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^+$ beschrieben werden. Der (gerundete) Funktionswert $N_1(t)$ sei die Anzahl der Bakterien zum Zeitpunkt t, und t sei die Zeit in Stunden.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Wachstumsfunktion N_1 in Abhängigkeit von der Zeit t.

b) Berechnen Sie die Anzahl der Bakterien, die nach 8 Stunden in der Kultur vorhanden sind.

8 Stunden nach Beginn der Beobachtung wird eine Substanz zu den Bakterien hinzu gegeben.
Ab diesem Zeitpunkt lässt sich die Anzahl der Bakterien durch folgende Funktionsgleichung beschreiben:

$$N_2(t) = 1000 \cdot e^{0{,}343 \cdot t - 0{,}015 \cdot t^2} \quad , t \geq 8.$$

Hinweis: Es ist $N_1(8) \approx N_2(8)$.

c) Untersuchen Sie die Funktion N_2 für $t \geq 8$ hinsichtlich Extrem- und Wendepunkten.
Hinweis: Sie können ohne Rechnung verwenden:
$$N_2'''(t) = (-0{,}03087 + 0{,}0027 \cdot t + (0{,}343 - 0{,}03 \cdot t)^3) \cdot 1000 \cdot e^{0{,}343\, t - 0{,}015\, t^2}$$

d) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem unter den veränderten Bedingungen 1000 Bakterien in der Kultur vorhanden sind.

e) Skizzieren Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen von $N(t) = \begin{cases} N_1(t) \text{ für } t < 8 \\ N_2(t) \text{ für } t \geq 8 \end{cases}$.
Untersuchen Sie die Funktion N an der Stelle $t = 8$.

f) Beurteilen Sie abschließend, ob die Güte der Substanz den Anforderungen eines Antibiotikums gerecht wird.
Ein Antibiotikum ist ein Medikament, das im Falle einer Erkrankung eine <u>schnelle</u> Reduzierung der Bakterienanzahl bewirken soll.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Neben der Lösung $N_1(t) = 1000 \cdot 1{,}25^t$ ist auch folgender Ansatz möglich: $N_1(t) = a \cdot e^{k \cdot t}$. Wegen $N_1(0) = 1000$ gilt $a = 1000$. Aus $e^k = 1{,}25$ folgt $k = ln\ 1{,}25 \approx 0{,}223$. Insgesamt ergibt sich: $N_1(t) \approx 1000 \cdot e^{0{,}223 \cdot t}$.		10	
b)	Das Einsetzen für $t = 8$ ergibt $N_1(8) = 1000 \cdot 1{,}25^8 \approx 5960$ oder $N_1(8) \approx 1000 \cdot e^{0{,}223 \cdot 8} \approx 5954$. *Der Funktionswert kann auch rekursiv mit Hilfe einer Wertetabelle berechnet werden*	5		
c)	$N_2(t) = 1000 \cdot e^{0{,}343 \cdot t - 0{,}015 \cdot t^2}$. Unter Anwendung der Kettenregel gilt: $N_2'(t) = (0{,}343 - 0{,}03 \cdot t) \cdot 1000 \cdot e^{0{,}343 \cdot t - 0{,}015 \cdot t^2}$. Weitere Anwendung der Produkt- und Kettenregel erbringt: $N_2''(t) = -0{,}03 \cdot 1000 \cdot e^{0{,}343 \cdot t - 0{,}015 \cdot t^2} + (0{,}343 - 0{,}03 \cdot t)^2 \cdot 1000 \cdot e^{0{,}343 \cdot t - 0{,}015 \cdot t^2}$ $N_2''(t) = \left(-0{,}03 + (0{,}343 - 0{,}03 \cdot t)^2\right) \cdot 1000 \cdot e^{0{,}343 \cdot t - 0{,}015 \cdot t^2}$ <u>Extremstelle</u>: Gesucht ist ein t mit $N_2'(t) = 0$. $N_2'(t) = (0{,}343 - 0{,}03 \cdot t) \cdot 1000 \cdot e^{0{,}343 \cdot t - 0{,}015 \cdot t^2} = 0$. Da $1000 \cdot e^{0{,}343 \cdot t - 0{,}015 \cdot t^2} > 0$ für alle t, folgt $0{,}343 - 0{,}03 \cdot t$ muss 0 sein und somit $t = \frac{0{,}343}{0{,}03} = 11{,}4\overline{3}$. Für die hinreichende Bedingung muss t in die zweite Ableitung eingesetzt werden: Auch hier ist der zweite Teil des Produkts größer als Null, so dass der Faktor $\left(-0{,}03 + (0{,}343 - 0{,}03 \cdot t)^2\right)$ den Ausschlag für das Vorzeichen gibt. Durch Einsetzen von $t = 11{,}4\overline{3}$ folgt $-0{,}03 + (0{,}343 - 0{,}03 \cdot t)^2 = -0{,}03$; denn t ist Nullstelle der inneren Klammer. Also liegt bei $t = 11{,}4\overline{3}$ ein lokales Maximum. Mit $N_2(11{,}4\overline{3}) \approx 7105$ ergibt sich der Hochpunkt (gerundet) $H(11{,}4 \vert 7105)$.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>
<u>Wendestelle</u>: Gesucht ist ein t mit $N_2''(t) = 0$.

Analog zur Berechnung der Extremstelle ist nur zu berücksichtigen, dass

$-0,03 + (0,343 - 0,03 \cdot t)^2 = 0$ ist.

Die Gleichung $(0,343 - 0,03 \cdot t)^2 = 0,03$ hat die beiden Lösungen

$t_1 = \frac{343}{30} + \frac{10\sqrt{3}}{3}$ und $t_2 = \frac{343}{30} - \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

Die Lösung $t_1 \approx 17{,}207$ liegt im Definitionsbereich von N_2, die Lösung $t_2 \approx 5{,}660$ jedoch nicht.

Mit der vorgegebenen dritten Ableitung lässt sich die hinreichende Bedingung prüfen: $N_2'''(17,207) \approx 44{,}8 \neq 0$.

Neben der konkreten Berechnung von N_2''' (17,207) gibt es selbstverständlich auch andere Möglichkeiten zu argumentieren, z.B. mit der zweiten Ableitung.

Mit $N_2(17{,}207) \approx 4309$ ergibt sich der Wendepunkt (gerundet) $W(17{,}207 \mid 4309)$.

Möglich ist z.B. auch W(17,2 | 4315).
</td><td></td><td>25</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>
Gesucht ist t mit $1000 = 1000 \cdot e^{0,343 \cdot t - 0,015 \cdot t^2}$, somit $1 = e^{0,343 \cdot t - 0,015 \cdot t^2}$.

$\ln 1 = 0,343 \cdot t - 0,015 \cdot t^2$. Da $\ln 1 = 0$, folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= 0,343 \cdot t - 0,015 \cdot t^2 \\ &= 0,015 \cdot t \cdot \left(\frac{0,343}{0,015} - t \right) \end{aligned}$$
Die Lösung $t = 0$ liegt außerhalb des Definitionsbereiches von N_2, so dass

$t = \frac{0,343}{0,015} = 22{,}8\overline{6}$

der gesuchte Zeitpunkt ist.

Knapp 23 Stunden nach Beginn der Beobachtung (und 15 Stunden nach Zugabe der Substanz) entspricht die Anzahl der Bakterien wieder der Startpopulation.
</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>
<u>Zur Skizze:</u>

Zu berücksichtigen sind $N_1(0) = 1000$,
der exponentielle Anstieg bis $N_1(8) \approx 5954 \approx N_2(8)$ (siehe dazu auch die unten stehenden Hinweise zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit),
der Hochpunkt (11,4 | 7105), der Wendepunkt (17,2 | 4309) und
der Zeitpunkt t ≈ 23 aus Teil d).
Dabei muss erkannt werden, dass im Bereich des Hochpunktes nur eine Rechtskrümmung vorliegen kann.
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	I	II	III

Die Genauigkeit in der Hochachse ist nur bedingt möglich (Skizze!).

Die <u>Untersuchung der Funktion an der Stelle $t = 8$</u> bezieht sich auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit und sollte im Graphen durch einen Knick angezeigt werden.

<u>Stetigkeit</u>: Wegen $N_1(8) \approx N_2(8)$ ist die Funktion praktisch stetig.

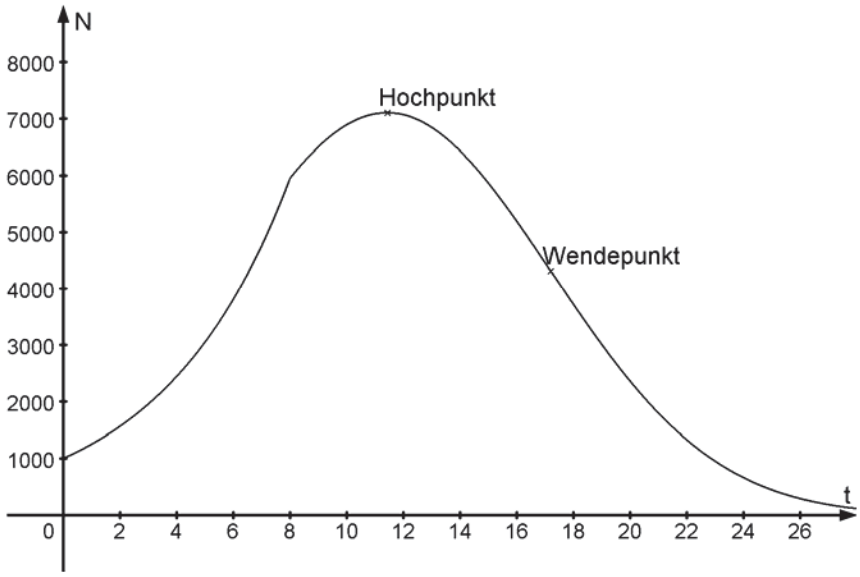
Sollte der Prüfling die Funktionsgleichung $N_1(t) = 1000 \cdot 1{,}25^t$ verwenden, so könnte er zu dem Schluss kommen, dass N an der Stelle t = 8 nicht stetig ist. Hier muss dann entsprechend bepunktet werden!

<u>Differenzierbarkeit</u>: Es ist $N_1'(t) = 1000 \cdot \ln 1{,}25 \cdot 1{,}25^t$ bzw. $223 \cdot e^{0.223 \cdot t}$.

Wegen $\lim\limits_{t \to 8} N_1'(t) \neq N_2'(8)$ ist die Funktion an der Stelle $t = 8$ nicht differenzierbar (daher im Graph der Knick), denn

$N_1'(t) = 1000 \cdot \ln 1{,}25 \cdot 1{,}25^t$ und $N_1'(8) \approx 1330$ oder

$N_1'(t) = 223 \cdot e^{-0{,}223 \cdot t}$ und $N_1'(8) \approx 1328$ aber $N_2'(8) \approx 613$



	I	II	III
Bewertung	15	10	

f) Teilaufgabe d) zeigt, dass es mehr als vierzehn Stunden dauert, bis die Anzahl der Bakterien wieder auf 1000 (wie zu Beginn der Beobachtung) zurückgegangen ist.

Grundsätzlich lässt sich schließen:

1. Die Substanz erfüllt nicht die Anforderungen zu einer schnellen Reduzierung der Bakterienanzahl, da die Zahl der Bakterien gut drei Stunden weiter ansteigt und dann erst verhältnismäßig langsam abnimmt.
2. Die Substanz erfüllt die Anforderungen zur Reduzierung der Bakterienanzahl, da innerhalb von knapp 15 Stunden die Anzahl der Bakterien auf etwa ein Sechstel (1000) reduziert wird und innerhalb eines Tages sogar weiter sehr stark reduziert wird: $N_2(8+24) = N_2(32) \approx 12$.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Jede dieser Positionen ist als richtig zu bewerten, wenn sie vom Prüfling mit den erzielten Ergebnissen stichhaltig begründet wird.			20
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

ANALYSIS 2

I.2 Preispolitik / Produktvergleich

HINWEIS: Für die zu zeichnenden Funktionsgraphen kann es sinnvoll sein, eine Wertetabelle zu erstellen. Alle Funktionsgraphen sind in den vorgegebenen Koordinatensystemen darzustellen.

Für einen Betrieb soll eine Kostenfunktion für ein bestimmtes Produkt ermittelt werden. Die zugehörigen Fixkosten belaufen sich auf 21,75 GE. Weiterhin ist bekannt, dass die Kosten für die Produktion von 2 ME 37,75 GE betragen. Bei einer Produktion von 4 ME betragen die Kosten 41,75 GE und der Graph der Funktion ändert dort seine Krümmungsrichtung.

a) Es wird versucht, die Kostenfunktion durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades zu beschreiben. Zeigen Sie, dass die Funktion K die Gleichung $K(x) = 0,25x^3 - 3x^2 + 13x + 21,75$ mit $D = \mathbb{R}^+$ lauten muss.

b) Eine Marktanalyse hat ergeben, dass die Produkte abhängig von der Absatzmenge zu einem durch folgende Preisabsatzfunktion beschriebenen Stückpreis an den Markt abgegeben werden können.

$$p : p(x) = -1,5x + 18$$

Berechnen Sie die Gleichungen der Erlösfunktion E und der Gewinnfunktion G.

Ermitteln Sie die Nullstellen der Erlösfunktion, die erlösmaximale Absatzmenge und den maximalen Erlös.
Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der Erlösfunktion E in das vorgegebene Koordinatensystem ein.

Ermitteln Sie zeichnerisch und rechnerisch die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze.
Bestimmen Sie die gewinnmaximale Absatzmenge und den dazugehörigen maximalen Gewinn.

Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der Gewinnfunktion G in das vorgegebene Koordinatensystem ein.

Die Maschinenkapazitäten könnten auch für ein anderes Produkt genutzt werden. Die Betriebsleitung spielt daher mit dem Gedanken, die Produktion zum Zwecke einer Gewinnmaximierung auf das alternative Produkt umzustellen.
Für die Herstellung des neuen Produktes wird von einem linearen Kostenverlauf ausgegangen. Die fixen Kosten für die Herstellung lägen bei 25 GE. Für die variablen Kosten pro Mengeneinheit würden 3 GE anfallen. Eine Marktanalyse hat weiterhin ergeben, dass der Erlös, der für die Produkte zu erzielen ist, durch folgende Erlösfunktion annähernd gut beschrieben wird:

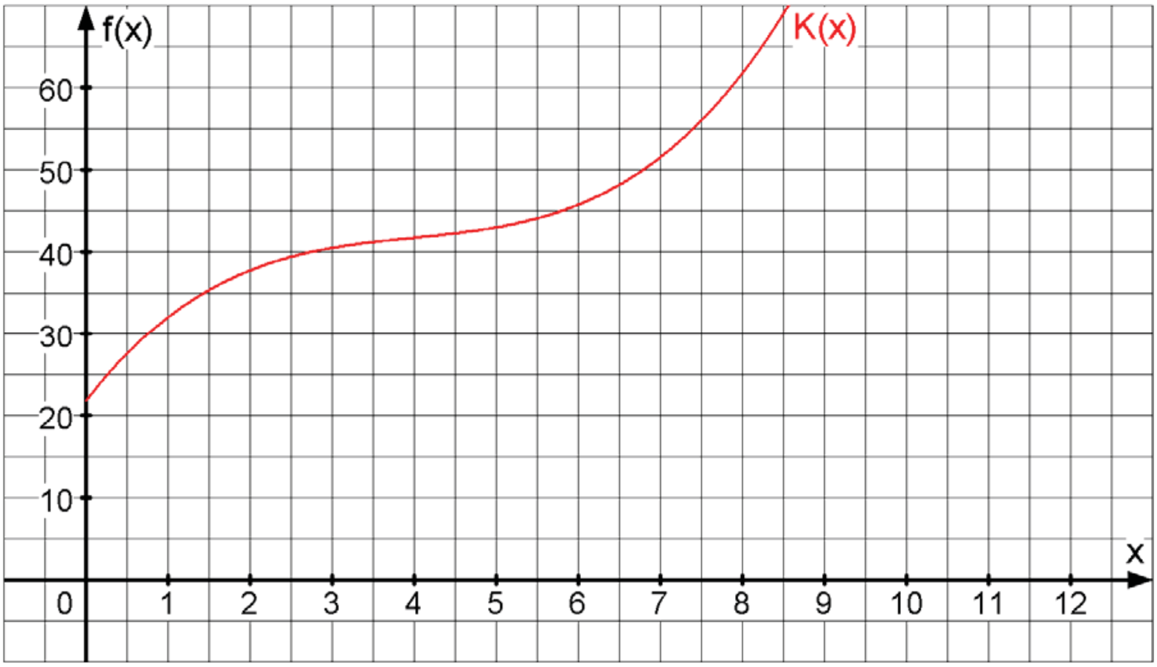
$$E_{neu} : E(x) = \frac{-10x^2 + 120x}{x + 3}$$

c) Bestimmen Sie die neue Kostenfunktion K_{neu} und die neue Gewinnfunktion G_{neu}. Ermitteln Sie <u>zeichnerisch</u> (im vorgegebenen Koordinatensystem) die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze. Bestimmen Sie <u>rechnerisch</u> das Gewinnmaximum des neuen Produktes.
Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der durch die Produktumstellung angestrebten Gewinnmaximierung.

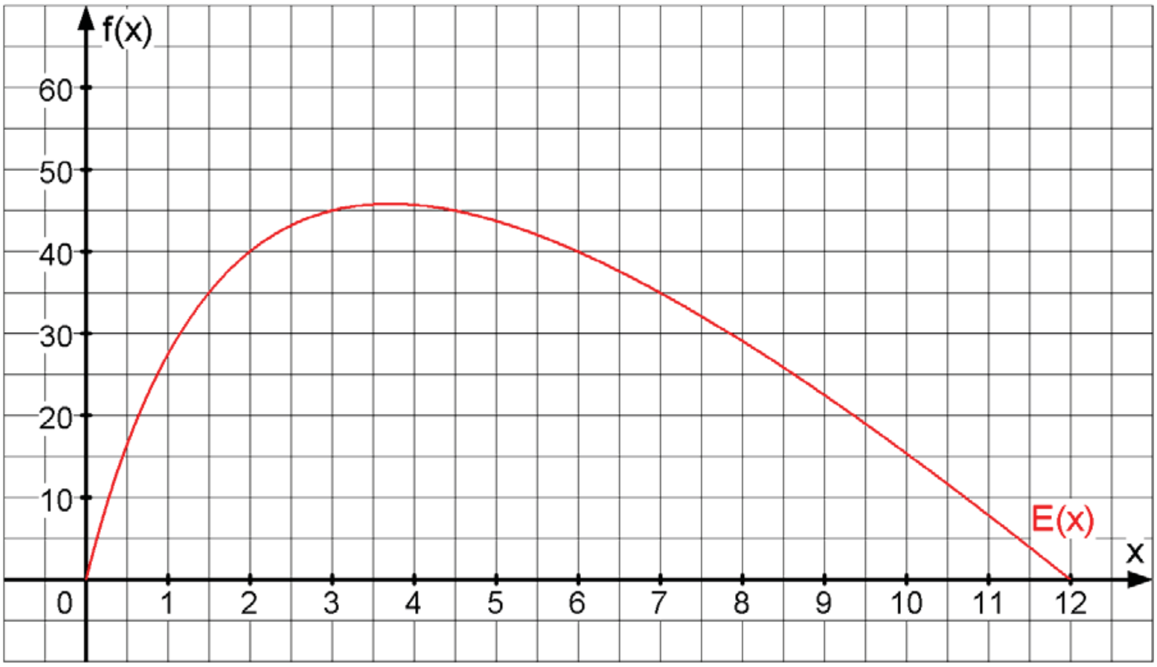
d) Ermitteln Sie die Preisabsatzfunktion p_{neu}, den fiktiven Höchstpreis und die Sättigungsmenge des neuen Produktes und zeichnen Sie den Funktionsgraphen der Preisabsatzfunktion.

Anlage zur Aufgabe „Preispolitik / Produktvergleich“

Koordinatensystem zum <u>alten</u> Produkt (Aufgabenteile a und b):



Koordinatensystem zum <u>neuen</u> Produkt (Aufgabenteile c und d):



Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

$K(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$\Rightarrow K'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$ und $K''(x) = 6a_3x + 2a_2$

Aufstellen des Gleichungssystems:

$K(0) = 21{,}75 \Rightarrow a_0 = 21{,}75$

$K(2) = 37{,}75 \Rightarrow 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 37{,}75$

$K(4) = 41{,}75 \Rightarrow 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + a_0 = 41{,}75$

$K''(4) = 0 \Rightarrow 24a_3 + 2a_2 = 0$

(a_0 einsetzen)

Lösen des Systems:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 2 & 16 \\ 64 & 16 & 4 & 20 \\ 24 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{II-2\cdot I} \left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 2 & 16 \\ 48 & 8 & 0 & -12 \\ 24 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[4\cdot III-II]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 2 & 16 \\ 48 & 8 & 0 & -12 \\ 48 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right]$$

Durch Einsetzen ergibt sich: $a_3 = 0{,}25$; $a_2 = -3$; $a_1 = 13$

Eine Probe mithilfe der gegebenen Funktionsgleichung ist auch eine zulässige Lösung.

$K : K(x) = 0{,}25x^3 - 3x^2 + 13x + 21{,}75$ (mit D = $\mathbb{R}^+$ wegen des Sachkontexts).

</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

<u>Erlösfunktion und Gewinnfunktion:</u>

$p(x) = -1{,}5x + 18 \Rightarrow E(x) = p(x)\cdot x \Rightarrow E(x) = -1{,}5x^2 + 18x$,

damit ist $G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}25x^3 + 1{,}5x^2 + 5x - 21{,}75$.

Nullstellen der Erlösfunktion:

$E(x) = -1{,}5x^2 + 18x = -x\cdot(1{,}5x - 18) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = 12$.

Aufgrund der Symmetrieeigenschaft der nach unten geöffneten Parabel ist zu erkennen, dass die erlösmaximale Absatzmenge bei $x = 6$ ME liegen muss.

Alternativ kann dieser Wert auch mit Hilfe der ersten und zweiten Ableitung ermittelt werden.

$E(6) = 54$ Der maximale Erlös beträgt 54 GE.

<u>Gewinnschwelle und Gewinngrenze:</u>

Ansatz: Nullstellen von G ermitteln:

$G(x) = -0{,}25x^3 + 1{,}5x^2 + 5x - 21{,}75 = 0$ bedeutet $x^3 - 6x^2 - 20x + 87 = 0$.

Horner Schema für $x_1 = 3$

1	–6	–20	87
0	3	–9	–87
1	–3	–29	0

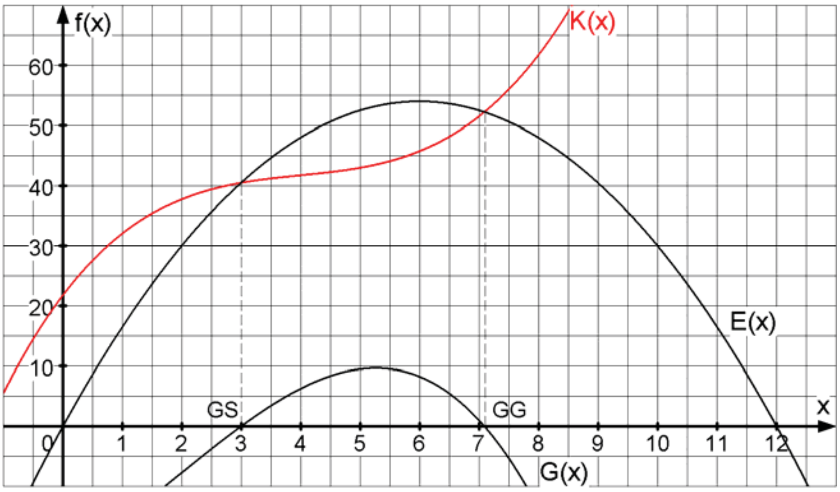
Restpolynom:

$x^2 - 3x - 29 = 0$

$x_2 = 1{,}5 + \sqrt{1{,}5^2 + 29} = 7{,}09$

$x_3 = 1{,}5 - \sqrt{1{,}5^2 + 29} = -4{,}09 \notin D_{ök}$

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$\Rightarrow$ Gewinnschwelle bei 3 ME und Gewinngrenze bei 7,09 ME. <u>Gewinnmaximum:</u> Bed.: $G_t'(x)=0 \wedge G_t''(x_{\max})<0$ $G'(x)=-0,75x^2+3x+5$ und $G''(x)=-1,5x+3$ $-0,75x^2+3x+5=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-4x-\frac{20}{3}=0$ Damit ist $x_{1,2}=2\pm\sqrt{2^2+\frac{20}{3}} \quad \Rightarrow \quad x_1\approx 5,27$ und $x_2\approx -1,27 \notin D_{ök}$ $G''(5,27)<0 \quad \Rightarrow \quad$ Maximum bei x_1 $G(5,27)\approx 9,67 \quad \Rightarrow \quad Max(5,27\,\|\,9,67)$ Die gewinnmaximale Absatzmenge liegt bei etwa 5,27 Mengeneinheiten und der maximale Gewinn beträgt 9,67 Geldeinheiten. <u>Graphische Lösungen:</u> 	15	25	
c)	<u>Kostenfunktion</u> $K_{neu}(x)=3x+25$ <u>Gewinnfunktion</u> G_{neu}: $G_{neu}(x)=E_{neu}(x)-K_{neu}(x)=\frac{-10x^2+120x}{x+3}-3x-25$ $G_{neu}(x)=\frac{-10x^2+120x}{x+3}-3x-25$ <u>Gewinnschwelle und Gewinngrenze</u>: Siehe zeichnerische Lösung im Koordinatensystem zum neuen Produkt. <u>Gewinnmaximum zum neuen Produkt:</u> Bed.: $G_{neu}'(x)=0 \wedge G_{neu}''(x_{\max})<0$ $G_{neu}(x)=\frac{-10x^2+120x}{x+3}-3x-25$			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

$$G'_{neu}(x)=\frac{(-20x+120)(x+3)-(-10x^2+120x)}{(x+3)^2}-3$$

$$G'_{neu}(x)=\frac{-10x^2-60x+360}{(x+3)^2}-3$$

$G''_{neu}(x)$ wird nicht benötigt, da $G'_{neu}(x)=0$ nur ein ökonomisch sinnvolles Ergebnis liefert und es sich dabei um die gewinnmaximale Absatzmenge handeln muss.

$$\frac{-10x^2-60x+360}{(x+3)^2}-3=0$$

$$-10x^2-60x+360=3x^2+18x+27$$

$$-13x^2-78x+333=0$$

$$x^2+6x-\tfrac{333}{13}=0 \Rightarrow x_{1,2}=-3\pm\sqrt{3^2+\tfrac{333}{13}}$$

$x_1\approx 2{,}88$ $\quad$ $G(2{,}88)\approx 11{,}03$

$x_2\approx -8{,}88\notin D_{ök}$

Die gewinnmaximale Absatzmenge bei dem neuen Produkt liegt bei 2,88 ME und der maximale Gewinn beträgt 11,03 GE.

Die Umstellung der Produktion ist unter dem Gesichtspunkt der Gewinnmaximierung sinnvoll, da mit dem neuen Produkt ein höherer maximaler Gewinn erzielt werden kann, als beim alten Produkt.

</td><td></td><td>15</td><td>15</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>

<u>Preisabsatzfunktion</u> p_{neu}:

$$E_{neu}(x)=p_{neu}(x)\cdot x$$

$$p_{neu}(x)=\frac{E(x)}{x}=\frac{-10x^2+120x}{(x+3)x}=\frac{-10x+120}{x+3}$$

<u>fiktiver Höchstpreis:</u> Bed.: $x = 0$

$$p_{neu}(0)=40$$

<u>Sättigungsmenge:</u> Bed.: $p_{neu}(x)=0$

$$\frac{-10x+120}{x+3}=0\Rightarrow x=12$$

Der fiktive Höchstpreis liegt bei 40 GE, die Sättigungsmenge bei 12 ME.

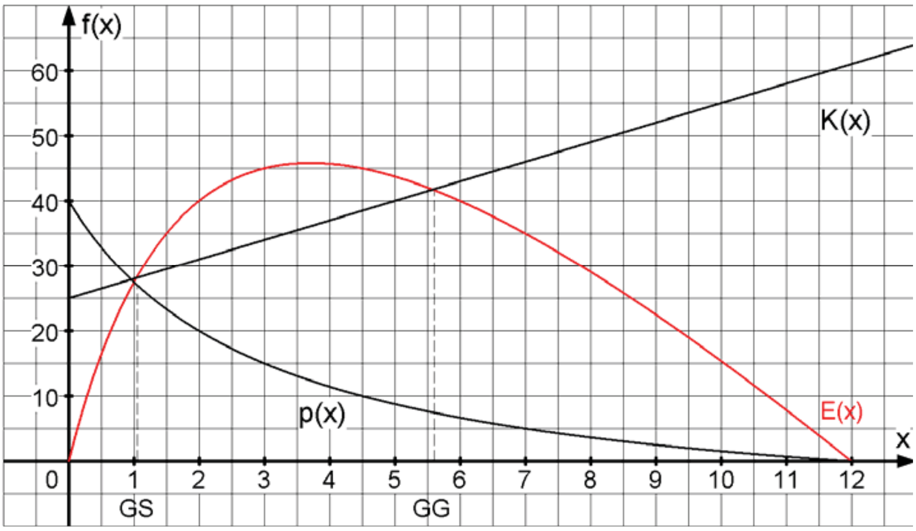
Der Funktionsgraph der neuen Preisabsatzfunktion ist dem unten dargestellten Koordinatensystem zu entnehmen.

Für das Zeichnen des Funktionsgraphen sollte eine Wertetabelle erstellt werden, da der Verlauf der Preisabsatzfunktion nicht linear ist.

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p(x)	40	27,5	20	15	11,4	8,8	6,7	5	3,6	2,5	1,5	0,7	0



		I	II	III
		5	5	5
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

ANALYSIS 3

I.3 Logarithmus-Funktion

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit der Gleichung $f_a(x) = x \cdot (\ln x - a)^2,\ a \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie den Definitions- und Wertebereich.

Berechnen Sie die Nullstellen und beschreiben Sie die Lage der Nullstellen in Abhängigkeit vom Parameter *a*.

b) Weisen Sie nach, dass für jedes *a* die Graphen von f_a und f_{-a} genau einen gemeinsamen Punkt S_a haben.

Beschreiben Sie die Lage aller Schnittpunkte S_a im Koordinatensystem in Abhängigkeit von *a*.

c) Bestimmen Sie die Extrempunkte von f_a.

Begründen Sie, warum jeder Graph der Funktionenschar einen Wendepunkt haben muss und bestimmen Sie diesen.

Bestimmen Sie sowohl den Funktionsterm des Graphen aller Hochpunkte als auch den aller Wendepunkte (Ortskurven).

(*Zur Kontrolle*: $f_a'(x) = (\ln x - a)^2 + 2(\ln x - a)$.)

d) In der Anlage ist ein Graph der Schar dargestellt. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert für *a*.

Zeichnen Sie in das gegebene Koordinatensystem den Graphen für *a* = 1 und die beiden zugehörigen Ortskurven aus Aufgabenteil c).

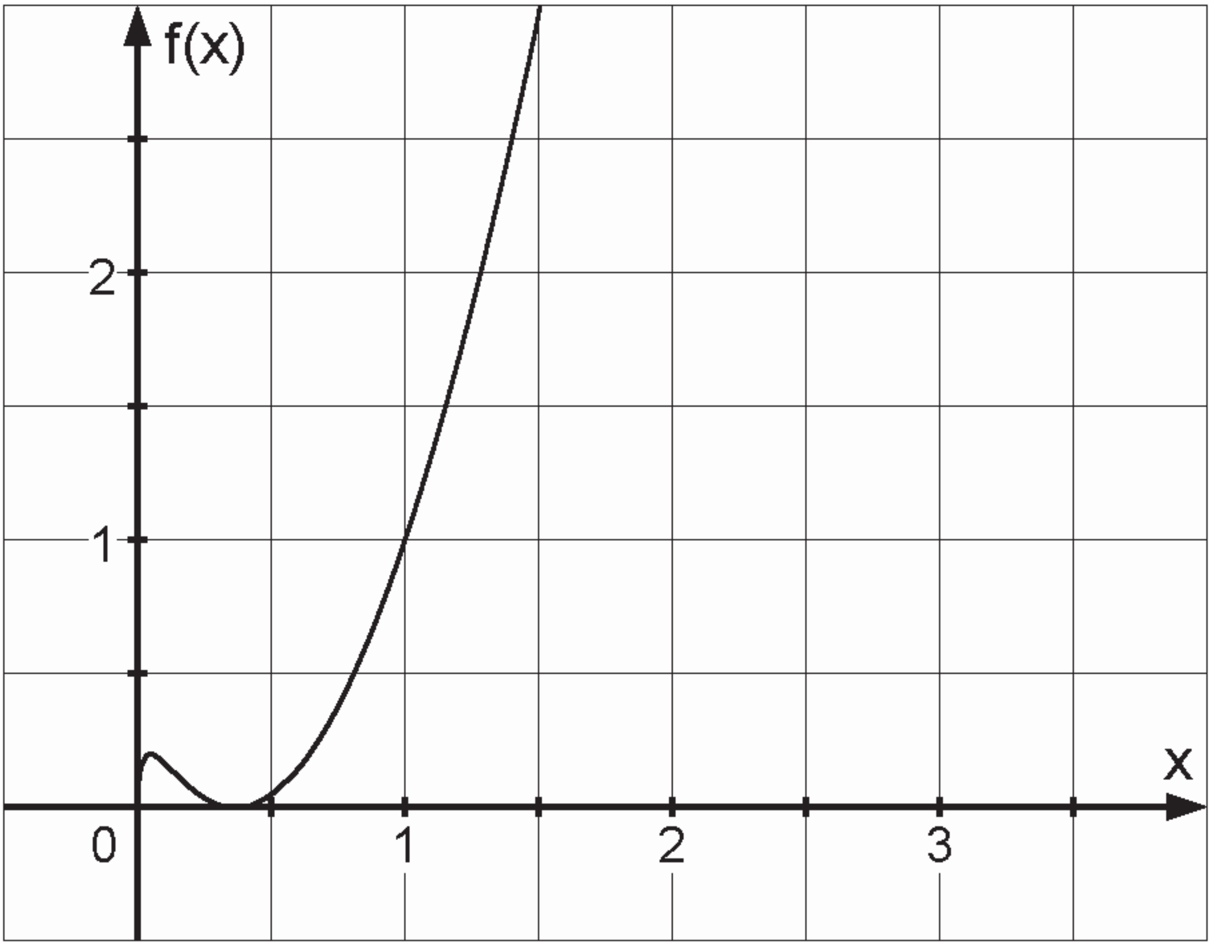
e) Es geht um das Integral $I_2 = \lim\limits_{k \to 0} \int_k^{e^a} x \cdot (\ln x - a)^2\, dx \quad (a \in \mathbb{R})$ und seine geometrische Bedeutung.

Sie dürfen für diese Teilaufgabe voraussetzen: $\lim\limits_{k \to 0} \left(k^2 \cdot (\ln k - a)^n\right) = 0$ für $n \in \{1, 2\}$.

Zeigen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt: $I_1 = \lim\limits_{k \to 0} \int_k^{e^a} x \cdot (\ln x - a)^1\, dx = -\frac{e^{2a}}{4}$.

Bestimmen Sie mit Hilfe von I_1 das Integral I_2 und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

Anlage zu Aufgabe „Logarithmus-Funktion“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<u>Definitions- und Wertebereich:</u> $D = \mathbb{R}^+$, da der Logarithmus nur für positive Zahlen definiert ist. $W = \mathbb{R}_0^+$, da der erste Faktor des Funktionsterms wegen der Definitionsmenge nur positive Werte annehmen kann und der zweite Faktor wegen des Quadrates stets größer oder gleich Null ist. <u>Nullstellen:</u> Der Funktionsterm hat die Form eines Produktes. Dieses wird Null, wenn mindestens einer der Faktoren 0 ist. Der 1. Faktor wird (wegen Definitionsbereich) nicht Null. Der 2. Faktor wird 0, wenn $a = \ln x$ ist, wenn also $x = e^a$. Somit haben alle Graphen der Schar eine Nullstelle $N_a\left(e^a \mid 0\right)$. Und zwar gilt: 1.) Für $a < 0$ liegt die Nullstelle im Intervall $]0;1[$. 2.) Für $a = 0$ liegt die Nullstelle bei $x = 1$. 3.) Für $a > 0$ wandert die Nullstelle mit wachsendem a nach rechts (im Intervall $]1\,;\infty[$).	10	5	
b)	Wenn die Graphen von f_a und f_{-a} gemeinsame Punkte haben, dann muss die Gleichung $x\cdot(\ln x - a)^2 = x\cdot(\ln x + a)^2$ nicht nur trivial erfüllbar sein. Elementare Umformungen liefern zwei Gleichungen $\ln x - a = \ln x + a$ und $\ln x - a = -(\ln x + a) = -\ln x - a$. Vereinfacht man beide Gleichungen, so folgt für die erste, dass diese nur für $a = 0$ erfüllt ist (triviale Lösung). Die 2. Gleichung ist erfüllt, wenn $x = 1$ ist. Der Funktionswert an dieser Stelle ist a^2. D. h. alle Schnittpunkte haben als 1. Koordinate den Wert 1, liegen also im Koordinatensystem auf einer Parallelen zur y-Achse durch die Stelle $x = 1$. Es gilt $S_a\left(1 \mid a^2\right)$. Mit wachsendem Betrag von a wachsen auch die Funktionswerte.		10	
c)	<u>Bestimmen der Extrempunkte:</u> Um die Extrempunkte zu bestimmen, bildet man zunächst mit Hilfe der Produkt- und Kettenregel die 1. und 2. Ableitung: $f_a'(x) = (\ln x - a)^2 + 2(\ln x - a)$ und $f_a''(x) = \frac{2}{x}\cdot(\ln x - a + 1)$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Man setzt die 1. Ableitung gleich 0 und klammert $(\ln x - a)$ aus: $(\ln x - a)^2 + 2(\ln x - a) = (\ln x - a)\cdot(\ln x - a + 2) = 0$. Der Term $(\ln x - a)$ wird 0, wenn $x = e^a$. Die Nullstelle ist also gleichzeitig auch Extremstelle. Aus den Überlegungen bzgl. des Wertebereichs folgt, dass hier ein Minimum vorliegt. Es gilt $T_a\left(e^a \mid 0\right)$. Der Term $(\ln x - a + 2)$ wird 0, wenn $x = e^{a-2}$ ist. Um zu überprüfen, ob an dieser Stelle tatsächlich eine Extremstelle liegt, setzt man diesen Wert in die 2. Ableitung ein. $f_a''(e^{a-2}) = \frac{2}{e^{a-2}}\cdot(\ln\left(e^{a-2}\right) - a + 1) = \frac{2}{e^{a-2}}\cdot(a - 2 - a + 1) = -\frac{2}{e^{a-2}}$. Da sowohl der Zähler als auch der Nenner für alle $a \in \mathbb{R}$ positiv ist, ist der Wert des Terms negativ, also liegt dort für alle $a \in \mathbb{R}$ ein Maximum vor. $f_a(e^{a-2}) = e^{a-2}\cdot(\ln\left(e^{a-2}\right) - a)^2 = e^{a-2}\cdot 4$. Es gilt $H_a\left(e^{a-2} \mid 4\cdot e^{a-2}\right)$. <u>Bestimmen der Wendepunkte:</u> Um die möglichen Wendestellen zu berechnen, setzt man die 2. Ableitung gleich 0. $f_a''(x) = \frac{2}{x}\cdot(\ln x - a + 1) = 0$. Der 1. Faktor kann nicht den Wert 0 annehmen. Der 2. Faktor wird 0, wenn $x = e^{a-1}$ ist. An dieser Stelle müssen alle Graphen der Schar eine Wendestelle haben, da bei einer stetigen Funktion zwischen Minimum- und Maximumstelle (ohne Pol) eine Wendestelle existieren muss. Der Funktionswert der Wendestelle ist $f_a(e^{a-1}) = e^{a-1}\cdot(\ln\left(e^{a-1}\right) - a)^2 = e^{a-1}\cdot 1 = e^{a-1}$. Es gilt $W_a\left(e^{a-1} \mid e^{a-1}\right)$. <u>Gleichungen der Ortskurven:</u> Die Ortskurve aller Hochpunkte $H_a\left(e^{a-2} \mid 4\cdot e^{a-2}\right)$ ist die Gerade mit der Gleichung $g_H(x) = 4x$. Die Ortskurve aller Wendepunkte $W_a\left(e^{a-1} \mid e^{a-1}\right)$ ist die Gerade mit der Gleichung $g_W(x) = x$.		25	5

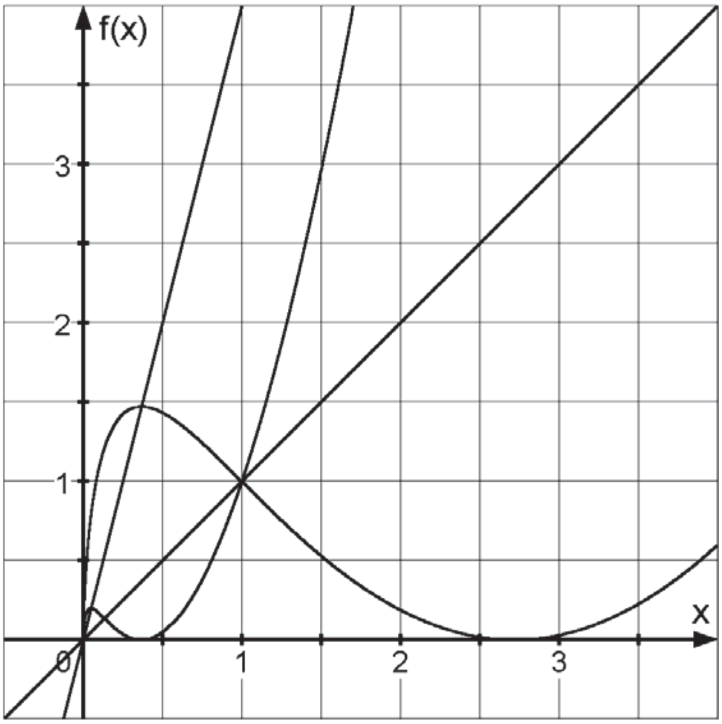
<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>

Der Zeichnung kann man entnehmen, dass der Punkt (1 | 1) ein Punkt des Graphen ist. Setzt man die Koordinaten in die Funktionsgleichung ein, dann gilt:

$$1 = 1\cdot(\ln 1 - a)^2 = a^2 .$$

Es folgt daher, dass a den Wert 1 bzw. den Wert –1 annehmen kann. Um zu entscheiden, welcher Wert von a zu diesem Graphen gehört, berechnet man z.B. die Nullstelle für $a = 1$:

$0 = x\cdot(\ln x - 1)^2$. Da diese Gleichung für $x = e$ erfüllt ist, gibt die Zeichnung den Graphen für $a = -1$ an.



</td><td>10</td><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>

Berechnung von I_1 (Lösung mit partieller Integration):

$v'(x) = x$ und $u(x) = \ln x - a$. Dann folgt: $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$ und $u'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Setzt man nun die Terme gemäß der partiellen Integration ein, so erhält man:

$$I_1 = \lim_{k\to 0}\left(\left[\frac{1}{2}x^2(\ln x - a)\right]_k^{e^a} - \int_k^{e^a}\frac{1}{2}x\,dx\right) = 0 - \lim_{k\to 0}\left[\frac{1}{4}x^2\right]_k^{e^a} = -\frac{e^{2a}}{4} .$$

Berechnung von I_2 (mit partieller Integration):

$v'(x) = x$ und $u(x) = (\ln x - a)^2 . \Rightarrow v(x) = \dfrac{x^2}{2}$ und $u'(x) = 2\cdot(\ln x - a)\cdot\dfrac{1}{x}$.

$$I_2 = \lim_{k\to 0}\left(\left[\frac{1}{2}x^2(\ln x - a)^2\right]_k^{e^a} - \int_k^{e^a} x\cdot(\ln x - a)\,dx\right) = 0 - \left(-\frac{e^{2a}}{4}\right) = \frac{e^{2a}}{4} .$$

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Dieser Wert beschreibt das Maß der Flächen, die jeweils von den Graphen von f_a und der x-Achse eingeschlossen werden.		10	15
	Insgesamt 100 BWE	20	55	25

LA/AG 1

II.1 Gerade und Geradenschar

Gegeben sind eine Geradenschar g_a und eine einzelne Gerade h

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3a \\ 1 \\ -6a \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$$

mit den Stützpunkten $G(5|3|8)$ und $H(8|0|2)$.

a) Beschreiben Sie, warum der Stützpunkt G nicht auf der Geraden h liegt.

b) Weisen Sie nach, dass jede Gerade g_a der Schar die Gerade h schneidet und dass jeder Punkt von h Schnittpunkt mit einer der Schargeraden ist.

c) Begründen Sie ausgehend von Ihren Ergebnissen zu a) und b) die Aussage, dass die Geraden g_a und h alle in einer Ebene E liegen.
Ermitteln Sie eine Koordinatenform von E.

d) Bestimmen Sie in der Ebene E eine Gerade k (in Parameterform), die zwar durch den Stützpunkt der Schar verläuft, aber selbst nicht zur Schar gehört.

e) Eine Ebene F ist orthogonal zur Strecke $\overline{GH}$ und verläuft durch den Punkt G. Diese Ebene enthält eine der Schargeraden g_a.
Beschreiben Sie einen Ansatz zur Bestimmung von F und des Parameters a.
Weisen Sie nach, dass $F : x_1 - x_2 - 2x_3 = -14$ die geforderten Eigenschaften hat und bestimmen Sie den Parameter a.
Ermitteln Sie den Schnittpunkt von F mit der Geraden h.

f) Die Punkte G und H, der Ursprung O und ein beliebiger Punkt P auf der Geraden h sind die Ecken einer Pyramide.
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide in Abhängigkeit von P.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>G kann nicht auf der Geraden h liegen, da bei allen Punkten auf h die zweite Koordinate gleich 0 ist. G dagegen hat als zwei Koordinate 3.</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Der Schnittpunktansatz für die Geraden führt zum linearen Gleichungssystem
$$\begin{pmatrix}5\\3\\8\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3a\\1\\-6a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\0\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left(\begin{array}{cc|c}3a&-2&3\\1&0&-3\\-6a&4&-6\end{array}\right).$$
$r=-3$ ist ablesbar, es verbleiben die beiden Gleichungen
$-9a-2s=3\ \wedge\ 18a+4s=-6$,
die äquivalent zueinander sind. Für jeden Wert von a, d.h. für jede Schargerade, gibt es ein s, das die Gleichung löst, d.h. einen Punkt auf h, durch den die Schargerade verläuft.
Umgekehrt gibt es zu jedem s ein passendes a.</td><td></td><td>20</td><td>5</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Der Stützpunkt G der Geradenschar liegt nicht auf der Geraden h. Daher spannen G und h eine Ebene E auf. In dieser Ebene müssen auch alle Geraden der Schar liegen, weil sie h schneiden und den gemeinsamen Stützpunkt G haben, der in der Ebene liegt.
Es sind auch andere Begründungen möglich.
<u>Bestimmung einer Koordinatenform der Ebene E:</u>
Variante 1:
Aus $\overrightarrow{GH}=\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$ folgt eine Parameterform $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}8\\0\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$.
$$\begin{aligned}x_1&=8+2s+3t\\x_2&=-3t\qquad\Rightarrow 2x_1+x_3=18 \text{ ist damit eine Koordinatenform von } E.\\x_3&=2-4s-6t\end{aligned}$$
Variante 2:
Einen Normalenvektor, der senkrecht zu allen Richtungsvektoren der Schar und zum Richtungsvektor von h ist, liefert das Kreuzprodukt
$\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$ und mit $\begin{pmatrix}5\\3\\8\end{pmatrix}$ folgt E: $4x_1+2x_3=36$.
Vereinfacht gilt natürlich auch $E:\ 2x_1+x_3=18$.</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>Nach Teil b) gibt es keinen Schnittpunkt der Geraden k und h, weil alle Schargeraden die Gerade h schneiden und k keine Schargerade sein soll.

Die Gerade k muss demnach parallel zu h sein: $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$.</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td><u>Ermitteln von F und a:</u>

Die Ebene F ist orthogonal zu $\overrightarrow{GH}$, d.h. $\overrightarrow{GH}$ ist ein Normalenvektor von F. Davon ausgehend ist die Koordinatenform der Ebene schon weitgehend bestimmt. Die fehlende rechte Seite der Ebenengleichung ergibt sich durch Einsetzen eines bekannten Punktes der Ebene, z.B. von G.

Da F durch G verläuft, gilt

$\overrightarrow{GH} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{GH} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = -42$,

also $F: 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 = -42$ bzw. $F: x_1 - x_2 - 2x_3 = -14$

Kriterium zur Bestimmung des Parameters a ist, dass alle Geradenpunkte die Ebenengleichung erfüllen:

$(5 + 3 \cdot r \cdot a) - (3 + r) - 2 \cdot (8 - 6 \cdot r \cdot a) = -14$ für alle $r \in \mathbb{R}$,

$\Leftrightarrow -14 + 15ar - r = -14$,

$\Leftrightarrow 15ar - r = 0$,

$\Leftrightarrow r \cdot (15a - 1) = 0$, also $a = \frac{1}{15}$.

<u>Schnittpunkt F und h:</u>

Im Teil b) ist festgehalten worden, dass für den Parameter s des Schnittpunktes der Geraden g_a mit der Geraden h gilt: $-9a - 2s = 3$. Also ist $s = -\frac{1}{2} \cdot (9a + 3)$.

Mit $a = \frac{1}{15}$ ergibt sich $s = -\frac{9}{5}$ und damit der Schnittpunkt $\left(\frac{22}{5} \middle| 0 \middle| \frac{46}{5} \right)$.

s kann auch berechnet werden durch das Einsetzen eines allgemeinen Punktes von h in die Koordinatenform der Ebene F.

$(8 + 2s) - 2(2 - 4s) = -14 \Leftrightarrow 4 + 10s = -14 \Leftrightarrow s = -\frac{9}{5}$</td><td>10</td><td>15</td><td>5</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
f)	Das Volumen der Pyramide kann als Spatprodukt berechnet werden. $V(s)=\frac{1}{6}\cdot\left\lvert\left(\begin{pmatrix}5\\3\\8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}8\\0\\2\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}8+2s\\0\\2-4s\end{pmatrix}\right\rvert=\frac{1}{6}\left\lvert\begin{pmatrix}6\\54\\-24\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8+2s\\0\\2-4s\end{pmatrix}\right\rvert$ $=\frac{1}{6}\cdot\lvert 6(8+2s)-24(2-4s)\rvert=18\cdot\lvert s\rvert$.	10		
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

LA/AG 2

II.2 Leontief-Modell

Die drei Sparten eines Industriekonzerns sind über das Leontief-Modell miteinander verbunden. Die Sparte A liefert an die Sparte B Leistungen in Höhe von 120 ME und an die Sparte C Leistungen in Höhe von 30 ME. B liefert Leistungen in Höhe von 120 ME an A zurück und in Höhe von 60 ME an die Sparte C. C liefert an die Sparte A Leistungen in Höhe von 60 ME. Der interne Verbrauch der Sparten beläuft sich auf Leistungen in Höhe von 90 ME für die Sparte A, 120 ME für die Sparte B und 60 ME für die Sparte C. Der Markt wird mit Leistungen in Höhe von 120 ME von der Sparte A, in Höhe von 180 ME von der Sparte B und in Höhe von 120 ME von der Sparte C beliefert.

Die Kosten für alle Leistungen betragen 1 GE pro ME. Die Leistungen werden mit einem Gewinnzuschlag am Markt angeboten. Der Zuschlag ist proportional zu den Kosten. Er wird durch den Gewinnzuschlagssatz ausgedrückt. Damit ergeben sich die Marktpreise jeweils wie folgt:

Marktpreis = Kosten + Gewinnzuschlag

Gewinnzuschlag = Gewinnzuschlagssatz · Kosten

a) Beschreiben Sie den Zusammenhang der Leistungsmengen in einer Tabelle.

b) Die Gewinnzuschlagssätze betragen für Leistungen der Sparte A 3,3 , für Leistungen aus der Sparte B 1,4 und für Leistungen aus der Sparte C 1,3.
Berechnen Sie den Gewinn des Gesamtunternehmens.
Hinweis: Der Erlösvektor lautet $\vec{e}^{\,T} = \begin{pmatrix} 4,3 & 2,4 & 2,3 \end{pmatrix}$.

c) Im Bereich der Sparte A sind umfangreiche Modernisierungsarbeiten notwendig. Kurzfristig wird die Ausbringungsmenge dieser Sparte um 30 % verringert. Bestimmen Sie für diesen Fall die Mengen, die dann am Markt durch die einzelnen Sparten angeboten werden können.

d) Der Leiter der Abteilung A möchte seine Produktionsmenge während der Modernisierung noch weiter verringern. Bestimmen Sie die Produktionsmenge, bei der das Gesamtunternehmen gerade noch keinen Verlust macht.

e) Zeigen Sie, dass die Leontief-Inverse folgende Gestalt hat:

$$(E-A)^{-1} = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} 54 & 18 & 15 \\ 28 & 52 & 22 \\ 12 & 4 & 46 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie für die Absatzmengen 200 ME für Sparte A, 300 ME für Sparte B und 200 ME für Sparte C die Produktionsmengen.

f) Marktuntersuchungen haben gezeigt, dass die erzielbaren Marktpreise nicht stabil sind und die Absatzmengen sich gegenseitig beeinflussen. Dies soll im Folgenden berücksichtigt werden. Die abzusetzende Menge der Leistungen aus Sparte A kann als Parameter t für die Gewinnzuschlagssätze berücksichtigt werden. Die Gewinnzuschlagssätze ergeben sich zu:

Gewinnzuschlagssatz A: $Z_A = -0,002 \cdot t + 3,54$

Gewinnzuschlagssatz B: $Z_B = -0,001 \cdot t + 1,52$

Gewinnzuschlagssatz C: $Z_C = -0,0015 \cdot t + 1,48$

Die Absatzmengen der einzelnen Sparten stehen im Verhältnis $2:3:2$.
Zeigen Sie, dass der Zusammenhang zwischen dem Gewinn und der Absatzmenge aus Sparte A folgende Gestalt hat:
$G(t) = -0,005t^2 + 1,8t$
Bestimmen Sie die Absatzmengen so, dass der Gewinn maximal wird.
Ermitteln Sie dabei den Gewinn, die abzusetzenden und die produzierten Mengen.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

	A	B	C	Y	X
A	90	120	30	120	360
B	120	120	60	180	480
C	60	0	60	120	240

</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

$G = U - K = \vec{e}^{\,T} \cdot \vec{y} - \vec{k}^{\,T} \cdot \vec{x}$

$= \begin{pmatrix} 1+3{,}3 & 1+1{,}4 & 1+1{,}3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 120 \\ 180 \\ 120 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 360 \\ 480 \\ 240 \end{pmatrix}$

$= 1.224 - 1.080 = 144$

Der Unternehmensgewinn beträgt 144 GE.

</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

$A = \begin{pmatrix} \frac{90}{360} & \frac{120}{480} & \frac{30}{240} \\ \frac{120}{360} & \frac{120}{480} & \frac{60}{240} \\ \frac{60}{360} & 0 & \frac{60}{240} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}7 \cdot 360 \\ 480 \\ 240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 252 \\ 480 \\ 240 \end{pmatrix}$.

Damit ist $\vec{y}_1 = \vec{x}_1 - A\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 252 \\ 480 \\ 240 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 252 \\ 480 \\ 240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 216 \\ 138 \end{pmatrix}$

Bei einer Verringerung der Ausbringungsmenge der Sparte A können am Markt noch folgende Leistungen angeboten werden: Sparte A 39 ME, Sparte B 216 ME, Sparte C 138 ME.

</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>

$$G(x_a)=U-K=\vec{e}^{\,T}\cdot\vec{y}-\vec{k}^{\,T}\cdot\vec{x}=\vec{e}^{\,T}\cdot\left[\vec{x}-A\cdot\vec{x}\right]-\vec{k}^{\,T}\cdot\vec{x}$$

$$=\begin{pmatrix}4{,}3 & 2{,}4 & 2{,}3\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}x_a\\480\\240\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{8}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{6}&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_a\\480\\240\end{pmatrix}\right]-\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_a\\480\\240\end{pmatrix}$$

$$=\left(\frac{49}{24}x_a+489\right)-\left(x_a+720\right)=\frac{25}{24}x_a-231$$

$G(x_a)=0$ bedeutet $\frac{25}{24}x_a-231=0\Rightarrow x_a=221{,}76$

Bei einer Produktionsmenge der Sparte A in Höhe von 221,76 ME macht das Unternehmen weder Verlust noch Gewinn.</td><td></td><td>25</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>

$$\left(E-A\right)\cdot\left(E-A\right)^{-1}=E$$

$$\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{8}\\-\frac{1}{3}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{6}&0&\frac{3}{4}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{32}\begin{pmatrix}54&18&15\\28&52&22\\12&4&46\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}-A\vec{x}=\vec{y}\Leftrightarrow\vec{x}=(E-A)^{-1}\cdot\vec{y}=\frac{1}{32}\begin{pmatrix}54&18&15\\28&52&22\\12&4&46\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}200\\300\\200\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}600\\800\\400\end{pmatrix}$$

Die Produktionsmengen betragen für die Sparte A 600 ME, für die Sparte B 800 ME und für die Sparte C 400 ME.</td><td></td><td>10</td><td>5</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>

$$G(t)=U-K=\vec{e}^{\,T}\cdot\vec{y}-\vec{k}^{\,T}\cdot\vec{x}=\vec{e}^{\,T}\cdot\vec{y}-\vec{k}^{\,T}\cdot\left[\left(E-A\right)^{-1}\cdot\vec{y}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}1+(-0{,}002t+3{,}54)\\1+(-0{,}001t+1{,}52)\\1+(-0{,}0015t+1{,}48)\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}t\\\frac{3}{2}t\\t\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}\cdot\left[\frac{1}{32}\begin{pmatrix}54&18&15\\28&52&22\\12&4&46\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}t\\\frac{3}{2}t\\t\end{pmatrix}\right]$$

$$=\left(-0{,}005t^2+10{,}8t\right)-9t=-0{,}005t^2+1{,}8t\,.$$

<u>Bestimmen des Gewinnmaximums:</u>

Bed.: $G'(t_E)=0\wedge G''(t_E)<0$ oder G ist nach unten geöffnete Parabel.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

$G'(t) = -0{,}01t + 1{,}8 \quad \text{und} \quad G''(t) = -0{,}01$

$G'(t) = 0 \Rightarrow t_E = 180 \quad \text{und} \quad G''(180) = -0{,}01 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt bei t_E

$G(180) = -0{,}005 \cdot 180^2 + 1{,}8 \cdot 180 = 162$

$\vec{y} = \begin{pmatrix} 180 \\ \frac{3}{2} \cdot 180 \\ 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 270 \\ 180 \end{pmatrix}$

$\vec{x} = (E - A)^{-1} \cdot \vec{y} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 54 & 18 & 15 \\ 28 & 52 & 22 \\ 12 & 4 & 46 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 180 \\ 270 \\ 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 540 \\ 720 \\ 360 \end{pmatrix}$

Der maximale Gewinn beträgt 162 GE.

Die Leistungen, die an den Markt geliefert werden, betragen 180 ME (Sparte A), 270 ME (Sparte B) und 180 ME (Sparte C)

Die produzierten Mengen betragen 540 ME für Sparte A, 720 ME für Sparte B und 360 ME für Sparte C.

</td><td></td><td>15</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>65</td><td>15</td></tr>
</table>

Stochastik 1

III.1 Sportschuhe

Ein Sportschuhhersteller verkündet, dass sein neuestes Produkt bei 99 % seiner Kunden die Sprintleistung verbessern wird.

a) Geben Sie an, was gewährleistet sein muss, damit die Anzahl X der Kunden ohne Verbesserung ihrer Sprintleistung als binomialverteilt angenommen werden kann. Nennen Sie außerdem Gründe, die dagegen sprechen.

Die Zufallsgröße X beschreibe wie in a) die Anzahl der Kunden, deren Sprintleistungen sich nicht verbessert haben. X wird im Folgenden als binomialverteilt mit der aus den Herstellerangaben folgenden Wahrscheinlichkeit von 0,01 angenommen.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 100 Kunden höchstens einer keine Verbesserung der Sprintleistung feststellt.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 500 Kunden mehr als 3 keine Verbesserung der Sprintleistung beobachten.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 950 Kunden bei mindestens 12 von diesen keine Verbesserung der Sprintleistung eintritt.

e) In einem kleinen Leichtathletik-Verein schwärmen die Mitglieder von dem neuen Schuh und behaupten, bei allen hätten sich die Leistungen verbessert.

   Untersuchen Sie, ob in einem Großverein die gleiche Euphorie ausbrechen könnte.

   Es liegt auf der Hand, dass bei der Betrachtung hinreichend vieler Personen auch solche dabei sein werden, die keine Verbesserung der Sprintleistung feststellten.
   Ermitteln Sie daher die Mindestanzahl von Vereinsmitgliedern, ab der die Wahrscheinlichkeit, dass bei <u>allen</u> Mitgliedern Leistungsverbesserungen zu beobachten sind, unter 0,05 % sinkt.

f) Die Zentrale für Verbraucherschutz hält die allgemeine Begeisterung für übertrieben. Sie möchte ihre Skepsis durch einen Signifikanztest auf dem 5 %-Niveau belegen und dazu 950 Schuhbesitzer aus einer repräsentativen Stichprobe befragen.

   Bestimmen Sie einen entsprechenden Test.

g) Bereits nach einem halben Jahr sinken die Verkaufszahlen der Sportschuhe signifikant.
   Die Werbeabteilung möchte deswegen eine Kampagne starten, um den Bekanntheitsgrad des Produkts wieder über 80 % zu heben.
   Die Finanzabteilung hält dies für überflüssig. Der Bekanntheitsgrad läge bereits über 80 % und die Ursache für das Sinken der Verkaufszahlen sei eher in der Qualität der Konkurrenzprodukte zu suchen.

   Bestimmen Sie die Hypothesen, die hinter diesen Behauptungen stehen, und beschreiben Sie, durch welches Vorgehen und welche Ergebnisse die jeweiligen Verfechter sich von ihren Standpunkten abbringen ließen.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	*Es wird eine „ergebnisoffene" zusammenhängende Darstellung erwartet, z.B.:* Die Unabhängigkeit der Ergebnisse muss gewährleistet sein. Sie ist es nicht, sobald ein Sportler aufgrund der Erfahrungsberichte anderer seine Erwartungshaltung anpasst. Es muss davon ausgegangen werden, dass die Sportler ihre eigene Leistung objektiv bewerten, d.h. dass sie auch andere Faktoren, welche die Sprintleistung nicht besser werden lassen, erkennen. Tagesform, Klima, Halle oder Stadion usw. können sich negativ auf die Leistung auswirken, unabhängig von der Qualität des neuen Schuhs.	10		
b)	$P(X \le 1) = 0{,}99^{100} + \binom{100}{1} \cdot 0{,}01^1 \cdot 0{,}99^{99} \approx 73{,}58\%$.	10		
c)	$P(X > 3) = 1 - 0{,}99^{500} - \binom{500}{1} \cdot 0{,}01^1 \cdot 0{,}99^{499} - \binom{500}{2} \cdot 0{,}01^2 \cdot 0{,}99^{498} - \binom{500}{3} \cdot 0{,}01^3 \cdot 0{,}99^{497}$ $\approx 73{,}64\%$.		10	
d)	Es gilt $\sigma = \sqrt{950 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99} = \sqrt{9{,}405} > 3$. Damit kann die Binomial- durch die Normalverteilung approximiert werden. Die Anwendung der integralen Näherungsformel mit Hilfe der Tafel für die Gaußsche Integralfunktion führt zu $P(X \ge 12) = 1 - P(X \le 11) \approx 1 - \Phi\left(\frac{11{,}5 - 9{,}5}{\sqrt{9{,}405}}\right) \approx 1 - \Phi(0{,}65) \approx 0{,}26$. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei mindestens 12 von 950 Kunden keine Verbesserung der Sprintleistungen eintritt, ist etwa 26 %.		15	
e)	Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl *n*, für die gilt $0{,}99^n < 0{,}0005$. Es ergibt sich $n > \frac{\lg\ 0{,}0005}{\lg\ 0{,}99} \approx 756{,}28$. In einem Verein mit mehr als 756 Mitgliedern ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich bei allen Mitgliedern die Sprintleistungen verbessern, kleiner als 0,05%. In einem Großverein wird eine Euphorie also kaum ausbrechen.		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
f)	Es sei p die Einzelwahrscheinlichkeit, dass bei einem Kunden durch den Schuhkauf keine Verbesserung der Sprintleistung eintritt. Die Verbraucherschutzzentrale wird die Nullhypothese H_0: $p \le 1\%$ zu verwerfen versuchen. Viele unzufriedene Kunden sprechen gegen die Nullhypothese. Es sei X die Anzahl unzufriedener Kunden unter den 950 Kunden. Gesucht ist eine kleinste Grenze g, so dass $P(X > g \mid H_0) \le 5\%$. Nun ist $P(X > g \mid H_0) < P(X > g \mid p = 0{,}01)$. Man bestimmt daher g so klein wie möglich, damit die rechte Seite kleiner oder gleich 5 % wird. Wie in d) kann die Normalverteilung zur Approximation verwendet werden: $P(X > g \mid p = 0{,}01) = 1 - P(X \le g \mid p = 0{,}01) \approx 1 - \Phi\left(\frac{g + 0{,}5 - 9{,}5}{\sqrt{9{,}405}}\right)$ $\Phi\left(\frac{g + 0{,}5 - 9{,}5}{\sqrt{9{,}405}}\right) = 0{,}95$. Die Tabelle liefert $\frac{g + 0{,}5 - 9{,}5}{\sqrt{9{,}405}} \approx 1{,}65$ und daher ist $g \approx 14,\ldots$ Die Nullhypothese sollte also verworfen werden, wenn mehr als 15 der Befragten keine Verbesserung der Sprintleistungen durch den neuen Schuh erfahren haben.		10	20
g)	Bezeichne p den Bekanntheitsgrad des Produkts. Dann vertreten die Werber die Meinung, dass $p \le 0{,}8$. Sie lassen sich nur durch signifikant große Stichprobenergebnisse vom Gegenteil überzeugen. Die Finanzabteilung vertritt den Standpunkt, dass $p > 0{,}8$. Sie ändert ihre Meinung nur durch signifikant kleine Stichprobenergebnisse. *Andere in sich stringente Lösungen sind ebenfalls als richtig zu bewerten.*		15	
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Stochastik 2

III.2 Lichterkettenproduktion

Eine Firma stellt hochwertige Lichterketten für den Einsatz im Außenbereich her, die durch ihre spezielle Konstruktion, bei der die einzelnen Glühlampen – im Volksmund auch *Glühbirnen* genannt – fest eingelötet werden, jedem Wetter standhalten sollen. Die Ketten werden an die Abnehmer mit folgender Garantie verkauft: Wenn die Lichterkette nicht einwandfrei funktioniert, so erhält der Kunde 20 € als Entschädigung.

Bei der Produktion sind zwei voneinander unabhängige Fehler möglich:

- Die Glühlampen können bereits vor dem Einlöten defekt sein. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Glühlampe defekt ist, beträgt erfahrungsgemäß 4 %.
- Der Zusammenbau der Kette kann fehlerhaft erfolgen, z.B. indem ein Kontakt (oder mehrere) nicht richtig gelötet wird. Die Wahrscheinlichkeit für fehlerhaften Zusammenbau einer Kette beträgt erfahrungsgemäß 5 %.

Eine Lichterkette enthält 24 Glühlampen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Lichterkette einwandfrei funktioniert.

b) Ein Kunde hat eine defekte Lichterkette reklamiert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dieser Kette alle Glühlampen heil sind und damit der Fehler nur im Zusammenbau liegt.

c) Es gehen gleich nach Verkaufsbeginn viele Garantieansprüche bei der Firma ein. Die hohen Kosten geben den Verantwortlichen zu denken. Daher beauftragen sie einen Stochastiker, um die Gründe zu klären. Dieser berechnet zunächst den Erwartungswert der Garantiekosten für 1 000 verkaufte Lichterketten. Berechnen auch Sie diesen Wert.

Anschließend wird in der Firma diskutiert, ob man nicht besser die einzelnen Glühlampen vor dem Zusammenbau oder auch die fertig gestellte Kette vor dem Verkauf kontrollieren sollte. Ein Mitarbeiter stellt die Kosten für die Kontrolle zusammen: Jede Funktionskontrolle einer Glühlampe kostet 0,06 €, die Kontrolle der Kette 0,40 €. Dabei hat er die Kosten für den Arbeitsplatz und die Arbeitszeit des Prüfers berücksichtigt.

Nun soll die Summe der zu erwartenden Kontroll- und Garantiekosten für drei verschiedene Möglichkeiten berechnet werden (siehe Aufgabenteile d) bis f)), und zwar für jeweils 1000 zum Verkauf kommende Ketten. Die Gesamtkosten will man dann mit dem in c) berechneten Erwartungswert vergleichen.

d) <u>Fall 1:</u> Es werden nur die Lampen kontrolliert.
Bestimmen Sie die Zahl der durchschnittlich zu kontrollierenden Lampen, damit man 24 funktionierende Lampen erwarten kann.
Da keine Kontrolle der Kette erfolgen soll, kommen dennoch defekte Ketten zum Verkauf. Bestimmen Sie für diesen Fall die Summe der zu erwartenden Kontroll- und Garantiekosten.

e) <u>Fall 2:</u> Es werden nur die fertigen Ketten kontrolliert.
Wenn die Ketten kontrolliert werden, kommen natürlich nur brauchbare Ketten in den Verkauf. Ermitteln Sie die Summe der zu erwartenden Kontroll- und Garantiekosten.

f) <u>Fall 3:</u> Es werden die Lampen und die Ketten kontrolliert.
Bestimmen Sie die Summe der zu erwartenden Kontroll- und Garantiekosten, wenn sowohl die einzelnen Glühlampen als auch die fertigen Ketten kontrolliert werden.

g) Mit den so bestimmten Gesamtkosten ist der zuständige Betriebswirtschaftler nicht einverstanden. Er meint, dass man die Materialkosten und die Arbeitszeit für den Zusammenbau der Ketten ebenfalls berücksichtigen muss und zwar mit 3 € pro Kette, unabhängig davon, ob die Kette in den Verkauf geht oder bei einer Kontrolle aussortiert wird. Die Materialkosten für aussortierte Glühlampen will aber auch er vernachlässigen.

Ermitteln Sie unter dieser Annahme das kostengünstigste Kontrollverhalten der Firma.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Jede einzelne Glühlampe muss funktionieren und auch der Zusammenbau muss korrekt erfolgt sein. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit ca. 36 %: $0{,}96^{24} \cdot 0{,}95 \approx 0{,}3566$.	10		
b)	Die Lösung erfolgt über die Berechnung einer bedingten Wahrscheinlichkeit bei geeigneter Definition von Ereignissen: A: Alle Glühlampen sind heil. B: Die Lichterkette ist defekt. Gesucht ist P(A | B): Gegeben ist in der Aufgabe $P(A \cap B) = 0{,}96^{24} \cdot 0{,}05 \approx 0{,}0188$, und mit Aufgabenteil a) erhält man P(B) ≈ 1 – 0,3566 = 0,6434. Also ist $P(A \mid B) \approx \frac{0{,}0188}{0{,}6434} \approx 0{,}0292$. Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler nur im Zusammenbau ist knapp 3 %.		15	
c)	Da für jede defekte verkaufte Kette 20 € anfallen, ergibt sich mit dem Wert aus a) für 1 000 Ketten (1 – 0,3566) · 20 € · 1000 = 12 868 €.	10		
d)	<u>Fall 1</u>: Da 4 % aller Glühlampen defekt sind, erwartet man bei 25 geprüften Lampen durchschnittlich 24 Lampen, die funktionieren. (25 · 0,96 = 24). Es fallen somit Kontrollkosten von 25 · 0,06 € = 1,50 € pro zusammengebauter Kette an. Wegen Fehlern bei Zusammenbau sind aber durchschnittlich 50 von 1 000 verkauften Ketten dennoch defekt, also muss man mit 50 · 20 € = 1 000 € Garantiekosten rechnen. Die zu erwartenden Kontroll- und Garantiekosten betragen 1 000 · 1,50 € + 1 000 € = 2 500 €.		15	
e)	<u>Fall 2</u>: Damit 1 000 Ketten in den Verkauf kommen, müssen durchschnittlich $\frac{1000}{0{,}96^{24} \cdot 0{,}95} \approx 2804$ Ketten kontrolliert werden. Die zu erwartenden Kontrollkosten sind somit 2 804 · 0,40 € = 1 121,60 €. Garantiekosten entfallen, da alle verkauften Ketten intakt sind.		15	
f)	<u>Fall 3</u>: Wie unter d) berechnet, betragen die Kontrollkosten zur Gewinnung einer Kette mit intakten Glühlampen im Mittel 1,50 €. Da jetzt 95% aller zu prüfenden Ketten intakt sind, muss man 1 000 : 0,95 ≈ 1 053 Ketten mit intakten Glühlampen weiter prüfen. Die Kontrollkosten und damit die zu erwartenden Gesamtkosten betragen somit 1 053 · (1,50 € + 0,40 €) = 2 000,70 €.		15	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>g)</td><td>Für jede zusammengebaute Kette müssen jetzt Kosten in Höhe von 3 € zusätzlich berücksichtigt werden.

Damit erhält man ohne Kontrolle 15 868 €, da bei 1 000 verkauften Ketten auch nur 1000 zusammengebaut werden (12 868€ + 1 000 · 3 €).

Im <u>Fall 1</u> erhält man aus dem gleichen Grunde 2 500 € + 1 000 · 3 € = 5 500 €.

Im <u>Fall 2</u> werden 2 804 Ketten zusammengebaut, also betragen die Kosten jetzt 1 121,60 € + 2 804 · 3€ = 9 533,60 €.

Im <u>Fall 3</u> werden 1 053 Ketten zusammengebaut, also betragen die Kosten jetzt 2 000,70 € +1 053 · 3 € = 5 159,70 €.

Unter dieser Annahme ist es am günstigsten, alles zu prüfen (Fall 3).</td><td></td><td></td><td>20</td></tr>
<tr><td></td><td align="right">Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>60</td><td>20</td></tr>
</table>