ANALYSIS 1

I.1 Funktionenschar exponentieller Funktionen

Gegeben ist die Schar von Funktionen f_a durch $f_a(x) = (x+a)\cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Untersuchen Sie die Graphen von f_a auf
- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
- Asymptoten
- Extrempunkte
- Wendepunkte
- Symmetrie.

b) Zeichnen Sie den Graphen von f_2 für $-2{,}5 \le x \le 3$.

c) Bestimmen Sie eine Formel für die n-te Ableitung von f_a.

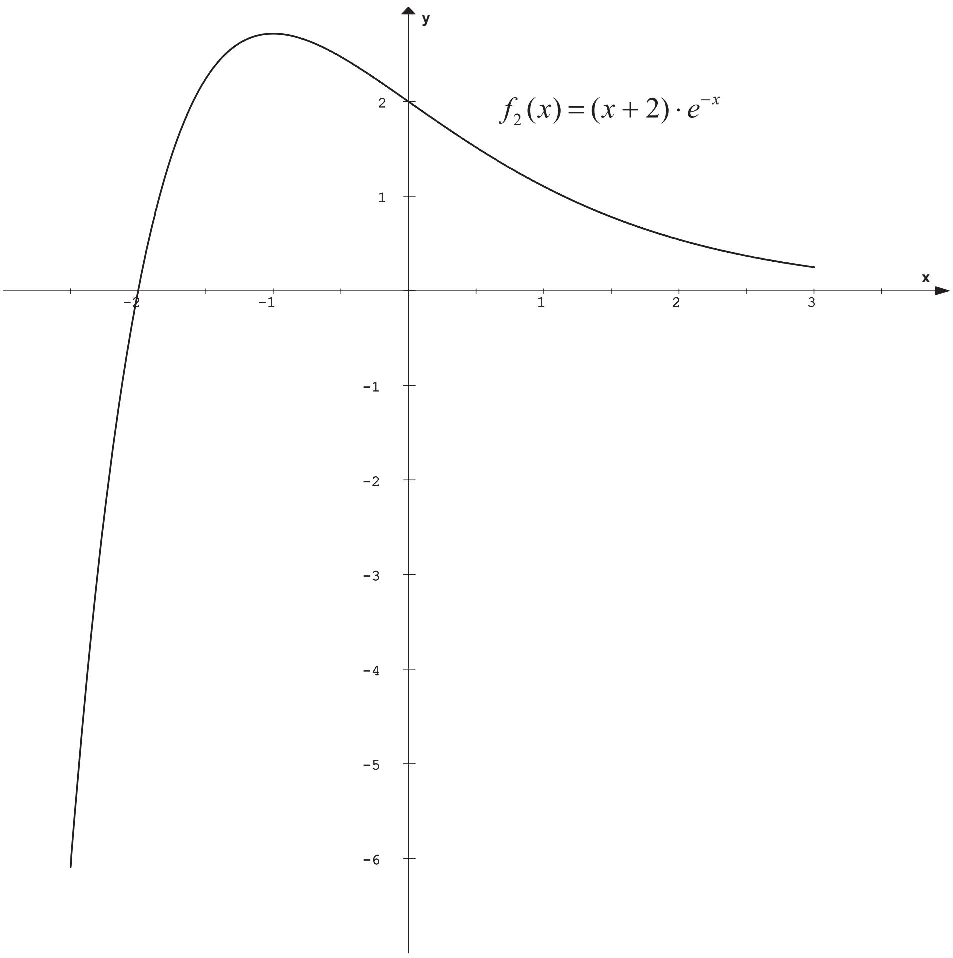
Ermitteln Sie eine Stammfunktion F_a zur f_a. Sie können dazu das eben erhaltene Resultat verwenden; wenn Sie dies tun, begründen Sie Ihr Vorgehen.

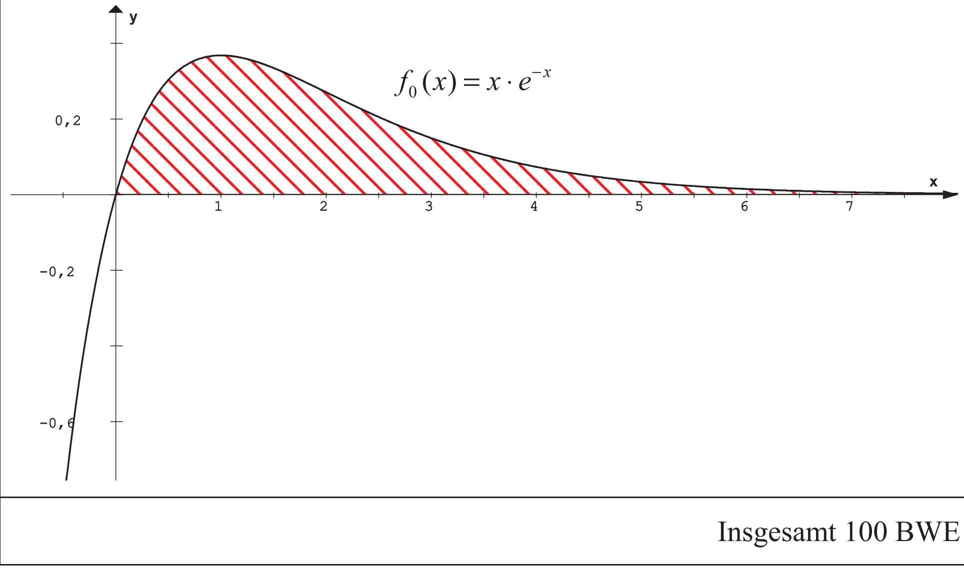
d) Ermitteln Sie die Gleichung der Ortskurve aller Extrempunkte der Graphen von f_a.

e) Der Graph von f_0 und die x-Achse begrenzen eine nach rechts ins Unendliche reichende Fläche. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<u>Schnittpunkte mit den Achsen:</u> $x = 0 \;\Rightarrow\; f_a(0) = a$ Nullstellen: $f_a(x_N) = 0 \;\Rightarrow\; x_N = -a$, da der Faktor e^{-x} niemals Null werden kann. <u>Asymptoten:</u> Für $x \to \infty$ geht zwar $(x+a)$ gegen unendlich, da aber e^{-x} stärker gegen Null geht, gilt: $x \to \infty \Rightarrow f_a(x) \to 0$. Für $x \to -\infty$ gibt es keine Asymptote. <u>Ableitungen:</u> $f_a'(x) = e^{-x}(1-a-x)$ $f_a''(x) = e^{-x}(x+a-2)$ Extrempunkte: Die notwendige Bedingung $f_a'(x) = 0$ führt zu $x = (1-a)$ als einziger Lösung. Die Verwendung der 2. Ableitung ergibt $f_k''(1-a) = -e^{-(1-a)} < 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Somit liegt an der Stelle $x = (1-a)$ für alle Funktionen der Schar f_a ein Hochpunkt $E_H(1-a \mid e^{a-1})$ vor. Wendepunkte: Die notwendige Bedingung $f''(x) = 0$ führt zu $x = (2-a)$ als einziger Lösung. Die Existenz genau eines Hochpunktes und das Verhalten der Graphen von f_a für $x \to +\infty$ als hinreichende Bedingungen (ersatzweise $f'''(x) \neq 0$ oder Vorzeichenwechsel bei $f''(1-a)$) ergibt genau einen Wendepunkt. Einsetzen ergibt: $W_a(2-a \mid 2e^{a-2})$. <u>Symmetrie:</u> • Achsensymmetrie bezogen auf die y-Achse: $f_a(-x) = f_a(x)$ $(-x+a)\cdot e^{x} \neq (x+a)\cdot e^{-x}$ • Punktsymmetrie bezogen auf den Ursprung: $f_a(-x) = -f_a(x)$ $(-x+a)\cdot e^{x} \neq -(x+a)\cdot e^{-x}$ Somit ist gezeigt, dass kein Graph der Funktionenschar achsensymmetrisch bezogen auf die *y*-Achse noch punktsymmetrisch bezogen auf den Ursprung ist.	20	20	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
b)		5		
c)	• Nach wiederholtem Ableiten $f_a(x) = \ \ e^{-x}(x+a-0)$ $f_a'(x) = -e^{-x}(x+a-1)$ $f_a''(x) = \ \ e^{-x}(x+a-2)$ $f_a'''(x) = -e^{-x}\left(x+a-3\right)$ $f_a^{<4>}(x) = \ \ e^{-x}\left(x+a-4\right)$ ist zu erkennen: Unter Verwendung der Produktregel und der Berücksichtigung, dass e^{-x} in ungeraden (geraden) Ableitungen zu $-e^{-x}$ (e^{-x}) wird und gleichzeitig $f'(x)=1$ für $f(x)=x+k$, $k \in \mathbb{R}$, gilt, ergibt sich: $f_a^{<n>}(x) = (-1)^n \cdot e^{-x}\left(x+a-n\right)$. Ein Nachweis durch vollständige Induktion wird nicht erwartet.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Verwendet man die eben gefundene Formel für die n-te Ableitung von f_a , so liegt es nahe, eine Stammfunktion von f_a zu vermuten, indem man für n die Zahl –1 einsetzt. f_a wird sozusagen „aufgeleitet“. Man erhält $F_a(x) = -e^{-x}(x+a+1)$. Man überzeugt sich nun leicht, dass gilt: $F_a'(x) = f_a(x)$, F_a ist also eine Stammfunktion von f_a.		10	10
d)	Die Hochpunkte der Schar f_a lauten $E_H(1-a \mid e^{a-1})$. Damit gilt $x_H = 1-a$ mit $a = 1-x_H$. Daraus folgt nach Einsetzen in y_H und entsprechenden Umformungen: $y_H = e^{-x_H}$ Damit ist die Ortslinie der Hochpunkte von f_a der Graph der Funktion mit der Gleichung: $t(x) = e^{-x}$.		15	
e)	$f_0(x) = x \cdot e^{-x}$ $\lim\limits_{a\to\infty}\int_0^a \left(x\cdot e^{-x}\right)dx = \lim\limits_{a\to\infty}\left[-e^{-x}\cdot(x+1)\right]_0^a = \lim\limits_{a\to\infty}(-e^{-a}(a+1)+1) = 1$. *Grafische Darstellung (nicht verlangt):*  		10	10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

ANALYSIS 2

I.2 Preispolitik

HINWEIS: Für die zu zeichnenden Funktionsgraphen kann es sinnvoll sein, eine Wertetabelle zu erstellen. Alle Funktionsgraphen sind in einem gemeinsamen Koordinatensystem darzustellen.

Für einen Betrieb soll eine Kostenfunktion ermittelt werden. Die zugehörigen Fixkosten belaufen sich auf 12 GE. Weiterhin ist bekannt, dass die Kosten für die Produktion von 2 ME 28 GE betragen. Bei einer Produktion von 3 ME betragen die Kosten 30 GE und der Graph der Funktion ändert dort seine Krümmungsrichtung.

a) Es wird versucht, die Kostenfunktion durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades zu beschreiben.
Zeigen Sie, dass für die Funktion *K* gilt: $K(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 + 15x + 12,\ \ x \geq 0,\ \ x$ reell.
Zeichnen Sie den Graphen der Kostenfunktion *K*.

b) Interpretieren Sie die wirtschaftliche Bedeutung des Ordinatenschnittpunktes und des Wendepunktes.

c) Eine Marktanalyse hat ergeben, dass die Produkte unabhängig von der Absatzmenge zu einem Stückpreis von 10 GE an den Markt abgegeben werden können.
Bestimmen Sie die Gleichungen der Preisabsatzfunktion *p*, der Erlösfunktion *E* und der Gewinnfunktion *G*.
Ermitteln Sie die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze. Bestimmen Sie die gewinnmaximale Absatzmenge und den dazugehörigen maximalen Gewinn.
Zeichnen Sie die Graphen der Erlösfunktion *E* und der Gewinnfunktion *G*.

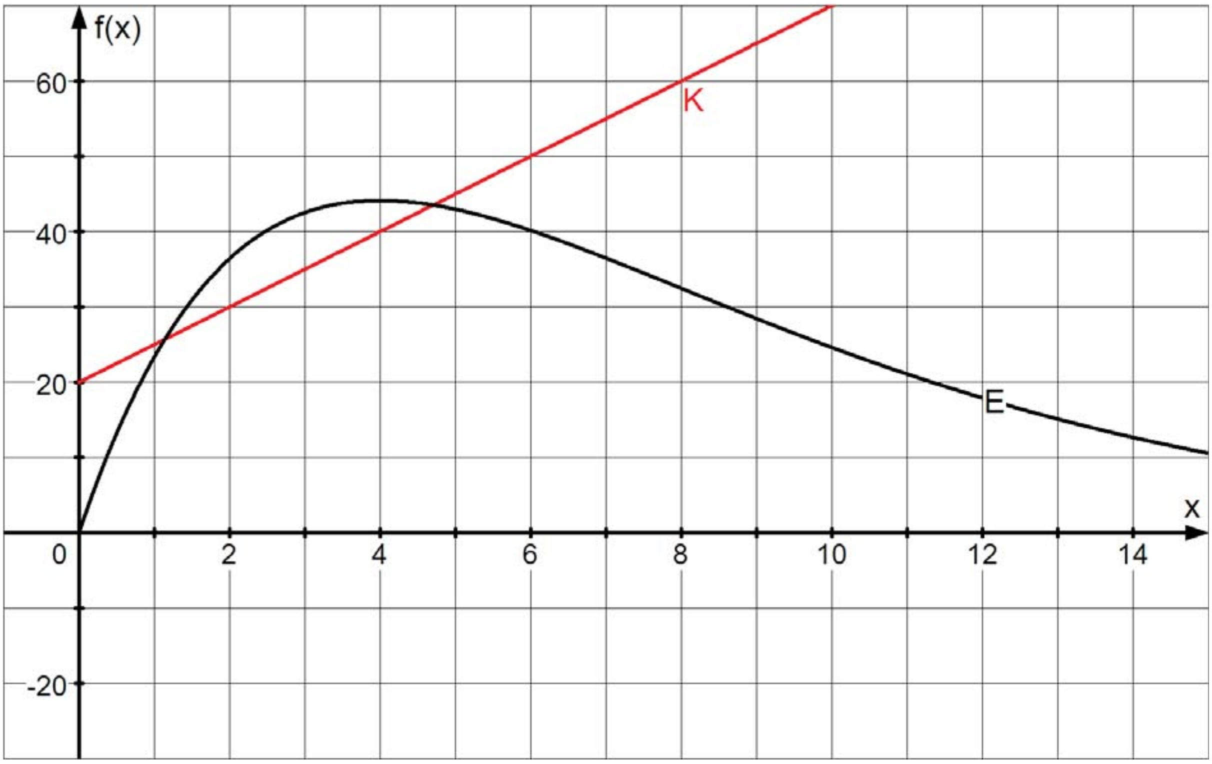
Die Betriebsleitung beabsichtigt, die Produktion zum Zwecke einer Gewinnmaximierung auf ein anderes Produkt umzustellen.
Für die Herstellung des neuen Produktes wird von einem linearen Kostenverlauf ausgegangen. Eine Marktanalyse hat weiterhin ergeben, dass der Preis, der für die Produkte zu erzielen ist, sich exponentiell zur Absatzmenge verhält. Die neue Kostenfunktion und die neue Preisabsatzfunktion lassen sich näherungsweise wie folgt beschreiben:

$$K_{neu}:\ \ K(x) = 5x + 20 \qquad\qquad p_{neu}:\ \ p(x) = 30 \cdot e^{-\frac{x}{4}}$$

d) Bestimmen Sie die neue Erlösfunktion E_{neu} und untersuchen Sie, wie sich die Erlöse bei sehr hohen Absatzmengen verhalten.

Fortsetzung nächste Seite →

Gegeben seien im Folgenden die Graphen der neuen Kosten- und der neuen Erlösfunktion:



e) Stellen Sie im obigen Koordinatensystem die neue Gewinnfunktion G_{neu} als Differenz der gegebenen Graphen dar.

f) Zeigen Sie, dass die Gleichung der neuen Gewinnfunktion G_{neu} wie folgt lautet:

$$G_{neu}: G(x) = 30x \cdot e^{-\frac{x}{4}} - 5x - 20$$

Ermitteln Sie die gewinnmaximale Absatzmenge mit Hilfe eines geeigneten Näherungsverfahrens auf eine Nachkommastelle gerundet. Bestimmen Sie den dazugehörigen maximalen Gewinn und interpretieren Sie die Ergebnisse hinsichtlich der angestrebten Gewinnmaximierung.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
$K(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
$K'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$
$K''(x) = 6a_3x + 2a_2$
$K(0) = 12 \Rightarrow \quad a_0 = 12$
$K(2) = 28 \Rightarrow \quad 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 28$
$K(3) = 30 \Rightarrow \quad 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 30$
$K''(3) = 0 \Rightarrow \quad 18a_3 + 2a_2 = 0$
(a_0 einsetzen)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 2 & 16 \\ 27 & 9 & 3 & 18 \\ 18 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 2 & 16 \\ 30 & 6 & 0 & -12 \\ 18 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 2 & 16 \\ 48 & 8 & 0 & -12 \\ -24 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right]$$
Durch Einsetzen ergibt sich: $a_3 = 0{,}5$; $a_2 = -4{,}5$; $a_1 = 15$.
Damit gilt: $K(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 + 15x + 12$
Funktionsgraph der Kostenfunktion K: (siehe Aufgabenteil c)
</td><td>5</td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>
<u>Wirtschaftliche Bedeutung des Ordinatenschnittpunktes $(0\vert 12)$:</u>
Die fixen Kosten der Produktion betragen 12 GE. Das sind Kosten, die unabhängig von der Produktion entstehen und die man Fixkosten nennt.
<u>Wirtschaftliche Bedeutung des Wendepunktes von K:</u>
Im Wendepunkt der Kostenkurve sind die Grenzkosten am geringsten, d.h. die Zunahme der Kosten bei Ausweitung der Produktionsmenge ist am geringsten.
</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>
<u>Preisabsatzfunktion p:</u>
$p(x) = 10$
<u>Erlösfunktion E:</u>
$E(x) = p(x) \cdot x = 10x$
<u>Gewinnfunktion G:</u>
$G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}5x^3 + 4{,}5x^2 - 5x - 12$
<u>Gewinnschwelle und Gewinngrenze:</u>
Grafische Lösung siehe unten
$-0{,}5x^3 + 4{,}5x^2 - 5x - 12 = 0$
$x^3 - 9x^2 + 10x + 24 = 0$
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

Horner-Schema: $x_1 = 3$.

1	−9	10	24
0	3	−18	−24
1	−6	−8	0

$$x^3 - 9x^2 + 10x + 24 = (x-3)\cdot\left(x^2 - 6x - 8\right)$$

$$x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$x_2 = 3 + \sqrt{17} \approx 7{,}12$$

$$x_3 = 3 - \sqrt{17} \approx -1{,}12 \notin D$$

Gewinnschwelle: $x_1 = 3$

Gewinngrenze: $x_2 \approx 7{,}12$

<u>Gewinnmaximum:</u> $G'(x) = 0 \;\wedge\; G''(x) < 0$

$$G'(x) = -1{,}5x^2 + 9x - 5$$

$$G''(x) = -3x + 9$$

$$-1{,}5x^2 + 9x - 5 = 0$$

$$x^2 - 6x + \frac{10}{3} = 0$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - \frac{10}{3}}$$

$$x_1 \approx 5{,}38$$

$$x_2 \approx 0{,}62$$

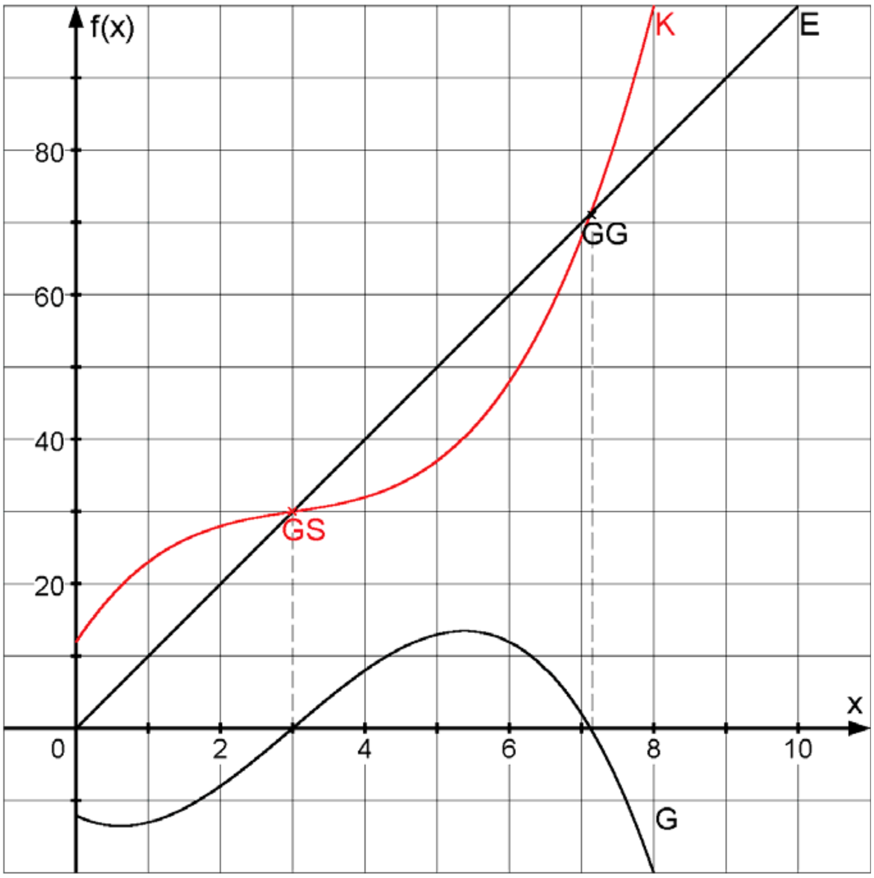
$$G''(5{,}38) = -7{,}14 < 0$$

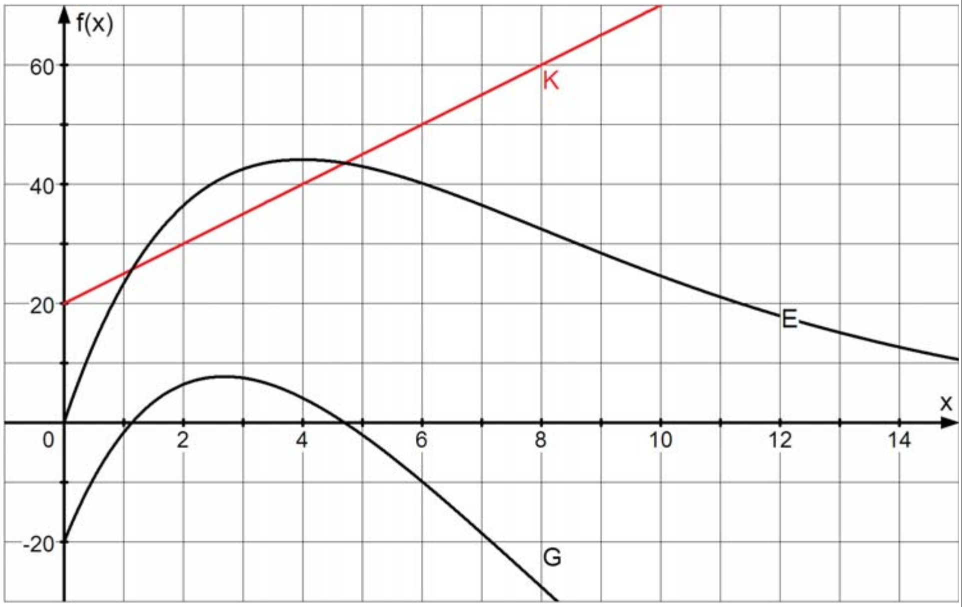
$$G''(0{,}63) = 7{,}14 > 0$$

$$G(5{,}38) = 13{,}49$$

Die gewinnmaximale Menge beträgt 5,38 ME, das Gewinnmaximum 13,49 GE.

Grafische Lösung siehe unten.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Grafische Darstellungen: 	10	25	5
d)	Kostenfunktion K: $K(x) = 5x + 20$ Erlösfunktion E_{neu}: $E_{neu}(x) = p(x) \cdot x = 30x \cdot e^{-\frac{x}{4}}$ Verhalten bei sehr hohen Ausbringungsmengen: $\lim\limits_{x \to \infty} (30x \cdot e^{-\frac{x}{4}}) = 0$. Zähler- und Nennerterm gehen zwar beide mit wachsendem x gegen 0, der Nennerterm aber deutlich schneller, d.h. der Erlös geht bei hohen Ausbringungsmengen gegen 0. oder: Nachweis über L'Hospital $\lim\limits_{x \to \infty}(30x \cdot e^{-\frac{x}{4}}) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{30x}{e^{\frac{x}{4}}} \overset{H}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{30}{\frac{1}{4} e^{\frac{x}{4}}} = 0$ Der Erlös strebt gegen Null.	5		5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Grafische Ermittlung der Gewinnfunktion: 		10	
f)	<u>Gewinnmaximum:</u> Bedingung: $G_{neu}'(x)=0 \;\wedge\; G_{neu}''(x)<0$ $G_{neu}(x)=30x\cdot e^{-\frac{x}{4}}-5x-20$ $G_{neu}'(x)=(30-7,5x)\cdot e^{-\frac{x}{4}}-5$ $G_{neu}''(x)=(\frac{15}{8}x-15)\cdot e^{-\frac{x}{4}}$ Das Newtonsche Näherungsverfahren liefert: $x\approx 2,7$ $G''(2,7)=-5,06<0$, Max. $G(2,7)\approx 7,74$ Die gewinnmaximale Absatzmenge bei dem neuen Produkt liegt bei 2,7 ME und der maximale Gewinn beträgt 7,74 GE. Die Umstellung der Produktion ist unter dem Gesichtspunkt der Gewinnmaximierung nicht sinnvoll, da mit dem neuen Produkt nur ein geringerer maximaler Gewinn erzielt werden kann. Alternativ könnte bei diesem Aufgabenteil die gewinnmaximale Absatzmenge durch geschicktes Einsetzen in die neue Gewinnfunktion gefunden werden. Die grafische Lösung liefert dafür einen guten Näherungswert.			10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

ANALYSIS 3

I.3 Funktionenschar von gebrochen rationalen Funktionen

Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit:

$$f_k(x) = \frac{k}{x^2} - \frac{1}{k \cdot x} \ , \ x \in D_{f_k} \ , \ k > 0 .$$

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von f_k an.
Bestimmen Sie für die Graphen der Funktionenschar die

- Asymptoten und Polstellen
- Nullstellen
- Extrempunkte
- Wendepunkte

jeweils in Abhängigkeit vom Parameter k.

b) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $f_{0,5}$ und f_1 in ein gemeinsames Koordinatensystem mit der Längeneinheit 2 cm ein. Dabei soll $-5 < x < 5$ gelten.

c) Zeigen Sie: Die Graphen zweier beliebiger Funktionen der Schar schneiden sich in genau einem Punkt.

d) Die Graphen der beiden Funktionen $f_{0,5}$ und f_1 sowie die x-Achse begrenzen unterhalb der x-Achse eine Fläche.

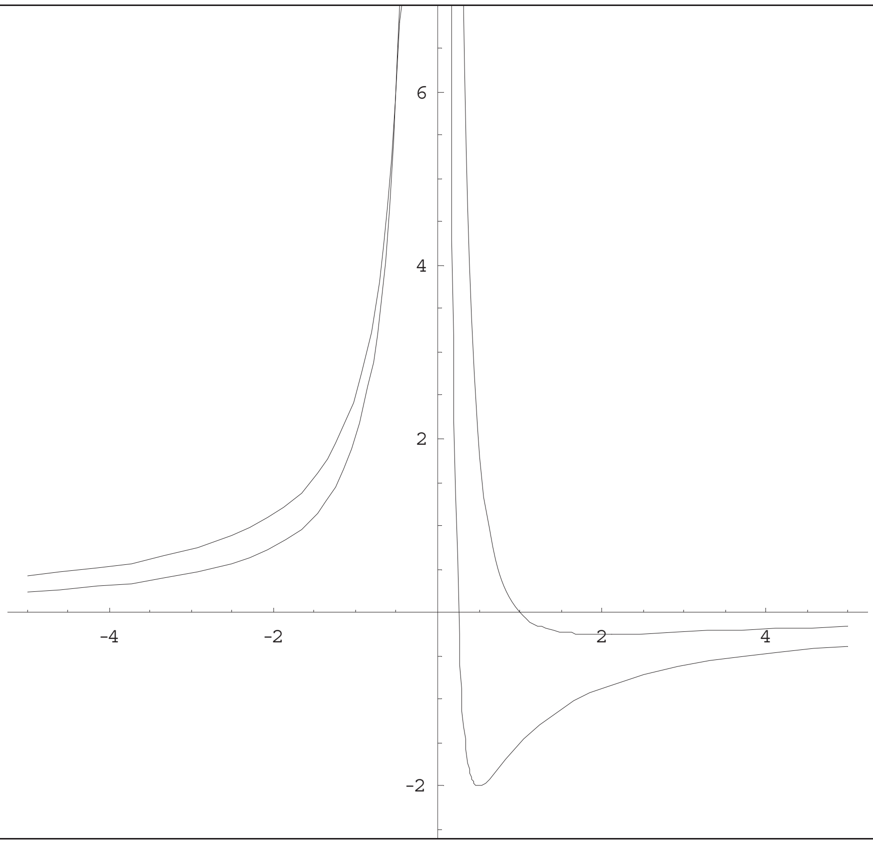
- Schraffieren Sie in Ihrer Zeichnung aus b) das Flächenstück bis $x = 5$.
- Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche.
- Begründen Sie, warum die Fläche für $x \to \infty$ kein endliches Flächenmaß aufweist.

e) Bestimmen Sie für $k > 0$ die Gleichung der Ortslinie der Tiefpunkte von f_k und skizzieren Sie den prinzipiellen Verlauf dieser Kurve in Ihrer Zeichnung im Teil b).

f) Bisher war k eine positive reelle Zahl. Nun soll die Funktionenschar dadurch erweitert werden, dass auch negative Werte für k zugelassen sind, d. h. $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Vergleichen Sie das Aussehen der Graphen f_k und f_{-k} und begründen Sie Ihre Aussage.

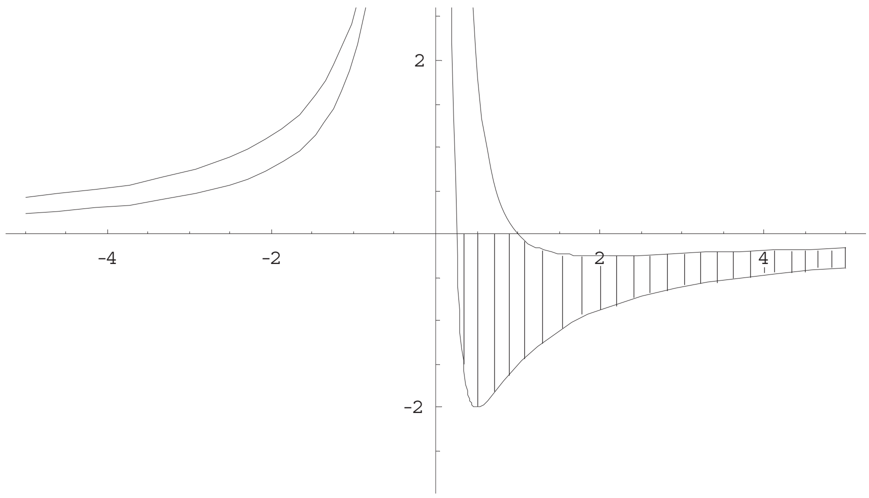
Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<u>Definitionsbereich:</u> $D_{f_k} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, denn nur bei $x = 0$ ist der Nenner Null. <u>Asymptoten:</u> Für $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) wird die x-Achse zur Asymptoten bei einer Näherung von unten (oben). <u>Polstellen:</u> Da die bekannte Nullstelle des Nenners nicht zugleich Nullstelle des Zählers ist, besteht hier eine nicht hebbare Lücke. Der Graph hat an der Stelle $x = 0$ einen Pol. <u>Nullstellen:</u> Für $f_k(x) = 0$ und $x \neq 0$ gilt: $\frac{k}{x^2} - \frac{1}{k \cdot x} = 0 \Leftrightarrow x^2 = k^2 \cdot x \Leftrightarrow x = k^2$. Die Funktionen f_k haben die Nullstelle $x = k^2$. <u>Ableitungen:</u> $f_k'(x) = \frac{-2 \cdot k}{x^3} + \frac{1}{k \cdot x^2}$ $f_k''(x) = \frac{6 \cdot k}{x^4} - \frac{2}{k \cdot x^3}$ $f_k'''(x) = \frac{-24 \cdot k}{x^5} + \frac{6}{k \cdot x^4}$ <u>Extrempunkte:</u> Für $f_k'(x) = 0$ und $x \neq 0$ gilt: $\frac{-2 \cdot k}{x^3} + \frac{1}{k \cdot x^2} = 0 \Leftrightarrow x^3 = 2k^2x^2 \Leftrightarrow x = 2k^2$. Die Verwendung der 2. Ableitung ergibt $f_k''(2k^2) = \frac{1}{8 \cdot k^7}$. Da voraussetzungsgemäß $k > 0$, gilt also $f_k''(2k^2) > 0$, und damit liegt an der betrachteten Stelle ein Minimum vor. Also hat jede Funktion f_k der Schar genau einen Tiefpunkt. Einsetzen ergibt: $T_k\left(2k^2 \mid -\frac{1}{4k^3}\right)$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Wendepunkte: Für $f_k''(x)=0$ und $x\neq 0$ gilt: $\frac{6\cdot k}{x^4}-\frac{2}{k\cdot x^3}=0 \Leftrightarrow 2x^4=6k^2x^3 \Leftrightarrow x=3k^2$. Die Existenz genau eines Tiefpunktes und das Verhalten der Graphen von f_k für $x\to+\infty$ ($f_k'''(3k^2)=\frac{-2}{81k^9}\neq 0$ oder Vorzeichenwechsel bei $f_k''(3k^2)$) ergibt genau einen Wendepunkt. Einsetzen ergibt: $W_k(3k^2 \mid -\frac{2}{9k^3})$.	10	20	
b)		10		
c)	Aus $f_a(x)=f_b(x)$ und $a, b>0$ ergibt sich: $\frac{a}{x^2}-\frac{1}{a\cdot x}=\frac{b}{x^2}-\frac{1}{b\cdot x} \Leftrightarrow a^2b-bx=ab^2-ax$ $\Leftrightarrow x\cdot(a-b)=ab\cdot(b-a)$ $\Leftrightarrow x\cdot(a-b)=-ab\cdot(a-b)$. Wegen $a\neq b$ gilt $x=-ab$. Es gibt also genau einen Schnittpunkt.		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III

d) Grafik:



Zur Flächenberechnung benutzt man eine Stammfunktion von f_k, z. B.

$$F_k(x) = -\frac{k}{x} - \frac{\ln x}{k}$$

Für die Fläche (unterhalb der x-Achse!) ergibt sich:

$$A = \left| \int_{0,25}^{5} f_{0,5}(x)dx \right| - \left| \int_{1}^{5} f_1(x)dx \right|$$

$$= \int_{5}^{0,25} \left(\frac{1}{2x^2} - \frac{2}{x} \right) dx - \int_{5}^{1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2x} - 2\ln x \right]_5^{0,25} - \left[-\frac{1}{x} - \ln x \right]_5^{1}$$

Einsetzen der Grenzen ergibt den Flächeninhalt $A \approx 3,28$.

Die betrachtete Fläche ergibt sich aus $\lim\limits_{t \to \infty} \left(\left[-\frac{1}{2x} - 2\ln x \right]_t^{0,25} - \left[-\frac{1}{x} - \ln x \right]_t^{1} \right)$.

Geeignete Umformungen liefern das Ergebnis: $\lim\limits_{t \to \infty} \left(0,773 - \frac{1}{2t} + \ln t \right)$.

Die Anwendung der Grenzwertsätze zeigt, dass der Ausdruck für $t \to \infty$ gegen unendlich strebt und somit die betrachtete Fläche ein nicht endliches Flächenmaß besitzt.

I	II	III
5	10	10

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>

Die Tiefpunkte der Schar f_k lauten nach a):

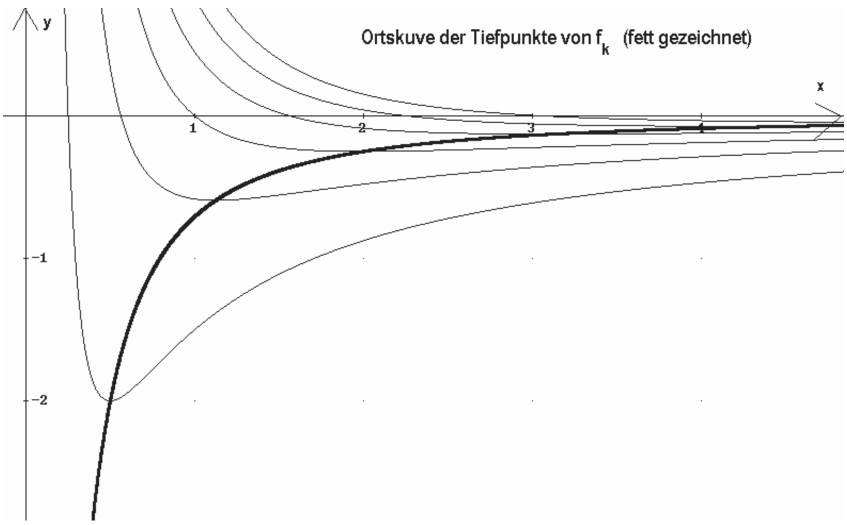
$$E_k\left(2k^2; -\frac{1}{4k^3}\right).$$

Damit gilt: $x_T = 2\cdot k^2$ mit $k = \sqrt{\frac{x_T}{2}}$.

Daraus folgt nach Einsetzen in y_T:

$$y_T = -\frac{1}{4\cdot\left(\sqrt{\frac{x_T}{2}}\right)^3} = -\frac{\left(\sqrt{2}\right)^3}{4\cdot\left(\sqrt{x_T}\right)^3} = -\frac{\sqrt{2}}{2x_T\cdot\sqrt{x_T}} = -\frac{\sqrt{2x_T}}{2x_T^2}$$

Damit ist die Ortslinie der Tiefpunkte von f_k der Graph der Funktion mit der Gleichung $t(x) = -\frac{\sqrt{2x}}{2x^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{x^{1,5}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x^{-1,5}$.



Es handelt sich also um eine Potenzfunktion mit negativem Exponenten und negativem Koeffizienten. Deren Graphen haben „hyperbelförmiges“ Aussehen (im 2.) und 4. Quadranten mit den Koordinatenachsen als Asymptoten.

</td><td></td><td>5</td><td>10</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>

Die Graphen der Schar f_{-k} sind die jeweils an der x-Achse gespiegelten Graphen der Schar f_k, denn es gilt: $f_{-k}(x) = \frac{-k}{x^2} + \frac{1}{kx} = -f_k(x)$.

</td><td></td><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>50</td><td>25</td></tr>
</table>

LA/AG 1

II.1 Geradenschar

Wir beginnen die Betrachtungen in der x-y-Ebene.

a) Für $a > 0$ sei h_a die Gerade, die durch den Koordinatenursprung (0 | 0) und den Punkt $P_a(a\,|\,a^2)$ geht. Begründen Sie, dass man auf diese Weise alle Ursprungsgeraden mit Ausnahme der beiden Koordinatenachsen darstellen kann.

Alle weiteren Aufgabenteile beziehen sich auf den dreidimensionalen Raum.

Gegeben ist die Geradenschar g_a mit $g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Bestimmen Sie die Gerade g_a, die den Punkt P (–1 | 4 | 7) enthält.

c) Geben Sie den gemeinsamen Punkt aller Geraden g_a an.
Zeigen Sie, dass alle Geraden der Schar in einer Ebene liegen und beschreiben Sie diese.

d) Beschreiben Sie unter Verwendung von a) anschaulich **alle** Geraden, die zu der Geradenschar g_a gehören.

e) Sei nun $k = 1$.
Bestimmen Sie die Ortskurve aller Punkte, die durch diese Bedingung aus der Schar g_a erzeugt werden.

Nun sind zwei weitere Punkte A (–3 | 1 | –5) und B (1 |–3 | –7) gegeben.

f) Geben Sie eine Gleichung für die Gerade h an, die durch die Punkte A und B verläuft.
Untersuchen Sie die Lagebeziehungen zwischen der Geraden h und den Geraden g_a der Schar.
Nennen Sie gegebenenfalls in Abhängigkeit von a die Koordinaten des Schnittpunktes und berechnen Sie den Schnittwinkel der entsprechenden Geraden.

g) Bestimmen Sie, für welchen Parameterwert a die Richtungsvektoren der Geraden g_a und h zueinander senkrecht stehen.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Gerade h_a hat die Steigung $\frac{a^2}{a} = a$. Damit sind alle positiven Steigungen erfasst. Die Steigung 0 lässt sich so nicht erfassen (selbst wenn man $a = 0$ zuließe, würde das bedeuten, dass P_a mit dem Ursprung zusammenfällt und man keine Gerade definieren kann). Also gehört die x-Achse nicht zu dieser Geradenschar. Auch die y-Achse mit nicht definierter Steigung (bzw. der Steigung ∞) gehört nicht zu der Geradenschar. Bis auf die beiden Koordinatenachsen gehören also alle Ursprungsgeraden zu der gegebenen Geradenschar.		5	
b)	Setzt man die Koordinaten des Punktes in die Definition der Geradenschar ein, so erhält man das Gleichungssystem $\begin{aligned} -1 &= -1 + k \cdot 0 \\ 4 &= 1 + k \cdot a \\ 7 &= 2 + k \cdot a^2 \end{aligned}$. Aus der 2. Gleichung folgt $k \cdot a = 3$. Eingesetzt in die 3. Gleichung erhält man $7 = 2 + 3 \cdot a$, so dass $a = \frac{5}{3}$. Eingesetzt in die 2. Gleichung erhält man $k = \frac{9}{5}$. Eine Gleichung der gesuchten Geraden: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{9}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{3} \\ \frac{25}{9} \end{pmatrix}$.	5		
c)	• Der gemeinsame Punkt ist durch den Stützvektor gegeben mit (–1 | 1 | 2). • Alle Geraden der Schar liegen in der um eine Einheit „nach hinten“ verschobenen x_2-x_3-Ebene, da für alle Punkte dieser Geraden gilt: $x_1 = -1$.	10		
d)	Alle Richtungsvektoren der Geradenschar haben die Form $\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$. Nach a) können so alle Richtungen in der unter b) beschriebenen Ebene erfasst werden mit Ausnahme der Richtungen parallel zur x_2-Achse und zur x_3-Achse. <u>Geometrische Interpretation:</u> Alle Geraden in der um eine Einheit nach hinten verschobenen x_2-x_3-Ebene, die durch den Punkt P (–1 | 4 | 7) verlaufen, gehören zu der Schar mit zwei Ausnahmen:			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

- die Gerade, die parallel zur x_3-Achse und durch den Punkt $P\,(-1 \mid 1 \mid 2)$ verläuft, sowie
- die Gerade, die parallel zur x_2-Achse und durch den Punkt $P\,(-1 \mid 1 \mid 2)$ verläuft,

gehören <u>nicht</u> zu der Schar.</td><td>10</td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>

Die Punkte der Geradenschar mit $k = 1$ haben die Ortsvektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}.$$

Die Punkte $(0 \mid a \mid a^2)$ liegen in der x_2-x_3-Ebene auf der Normalparabel mit dem Ursprung als Scheitelpunkt. In der angegebenen Darstellung ist diese Normalparabel um den Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ verschoben (liegt also in der um eine Einheit nach hinten verschobenen x_2-x_3-Ebene) und hat den Scheitelpunkt S$(-1 \mid 1 \mid 2)$.</td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>

- Eine Gleichung der Gerade h durch die Punkte A und B lautet

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -3-1 \\ 1-(-3) \\ -5-(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},\ l \in \mathbb{R}.$$

- Durch Gleichsetzen der Terme von g_a und h

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$$

erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} & & 4 \cdot l & = & -2 \\ k \cdot a & - & 4 \cdot l & = & 0 \\ k \cdot a^2 & - & 2 \cdot l & = & -7. \end{array}$$

Aus der 1. Gleichung folgt $l = -0{,}5$. Eingesetzt in die 2. und 3. Gleichung folgt: $\begin{array}{l} k \cdot a = -2 \\ k \cdot a^2 = -8 \end{array}$.

Danach ergibt sich $a = 4$ und $k = -0{,}5$.

D. h. nur die Gerade g_4 schneidet die Gerade h.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lösungsskizze</td><td colspan="3">Zuordnung, Bewertung</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td></td><td>
Alle anderen Geraden g_a sind also windschief oder parallel zu h. Der Vergleich beider Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\a\\a^2\end{pmatrix}$ zeigt, dass sie für alle a linear unabhängig sind. Damit sind alle Geraden g_a, $a \neq 4$, windschief zu h.

• <u>Schnittpunkt von g_4 und h:</u>
Durch Einsetzen der eben ermittelten Ergebnisse $l = k = -0,5$ ergeben sich unmittelbar die Koordinaten des Schnittpunktes: (–1 | –1 | –6).
Zur Korrekturhilfe, falls gerechnet wird:
Durch Gleichsetzen
$$\begin{pmatrix}-3\\1\\-5\end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix}0\\4\\16\end{pmatrix}$$
erhält man das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} -3-4\cdot l &= -1 \\ 1+4\cdot l &= 1+4\cdot k \\ -5+2\cdot l &= 2+16\cdot k \end{aligned}$$
$l = k = -0,5$. Danach hat der Schnittpunkt der Geraden g_4 und h die Koordinaten (–1 | –1 | –6).

• <u>Schnittwinkel:</u>
Der Winkel α zwischen den beiden Geraden ergibt sich aus dem Skalarprodukt der beiden Richtungsvektoren zu
$$\alpha = \arccos\left(\frac{48}{\sqrt{36}\cdot\sqrt{272}}\right) \approx \arccos(0,485) \approx 60,98°.$$
</td><td>5</td><td>20</td><td>10</td></tr>
<tr><td>g)</td><td>Die Richtungsvektoren der Geraden g_a und h (siehe Aufgabenteil f) stehen senkrecht, wenn ihr Skalarprodukt gleich 0 ist, also $4\cdot a + 2\cdot a^2 = 0$. Die Gleichung hat Lösungen für $a = 0$ und $a = -2$. Da $a = 0$ nicht im Definitionsbereich von g_a liegt, steht nur der Richtungsvektor der Geraden g_{-2} senkrecht auf dem der Geraden h.</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>30</td><td>50</td><td>20</td></tr>
</table>

LA/AG 2

II.2 Leontief-Modell

Ein Unternehmen besitzt die drei Werke W_1, W_2 und W_3, in denen elektronische Bauteile hergestellt werden. Die drei Werke beliefern sich gegenseitig und selbstverständlich auch den Markt. Sie sind also im Sinne des „Leontief-Modells" miteinander verbunden.

Die Herstellung und Verwendung der Bauteile der drei Werke in Mengeneinheiten (ME) entspreche der nachstehenden Input-Output-Tabelle:

Werk	W_1	W_2	W_3	Konsum $\vec{y}$	Produktion $\vec{x}$
W_1	$\boldsymbol{x_{11}}$	80	60	40	300
W_2	60	40	60	$\boldsymbol{y_2}$	200
W_3	30	20	40	10	$\boldsymbol{x_3}$

Es gilt also die folgende Gleichung: $\vec{y}=(E-A)\cdot\vec{x} \quad\Leftrightarrow\quad \vec{x}=(E-A)^{-1}\cdot\vec{y}$
($\vec{y}$ = Konsumvektor, $\vec{x}$ = Produktionsvektor und A = Inputmatrix.)

a) Bestimmen Sie die fehlenden Werte x_{11}, y_2 und x_3 in der obigen Tabelle. Geben Sie den Produktionsvektor $\vec{x}$ und den Konsumvektor $\vec{y}$ an und ermitteln Sie die Inputmatrix A.

b) Bestimmen Sie durch geeignete Rechnungen die Parameter a und b so, dass die folgende Inverse zur zugehörigen Leontief-Inversen wird:

$$(E-A)^{-1}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 21 & 2a+b & 36 \\ a+b & 15 & 24 \\ 5 & 5 & 20 \end{pmatrix}$$

Beschreiben Sie, welche Bedingungen bezüglich der Leontief-Inversen erfüllt sein müssen, damit jede externe Nachfrage befriedigt werden kann.

Für die folgenden Aufgaben seien $\boldsymbol{a = 6}$ und $\boldsymbol{b = 3}$.

c) Ermitteln Sie, wie groß die Produktion in jedem Zweigwerk sein muss, wenn ein erwarteter Konsum $\vec{y}_{neu} = (36 \mid 48 \mid 18)^T$ erfüllt werden soll.

d) Ermitteln Sie, welche Mengen bei einer Produktion $\vec{x}_{neu} = (500 \mid 400 \mid 200)^T$ an den Markt abgeben werden können.

e) Für die nächste Periode soll die Gesamtproduktion der drei Zweigwerke W_1, W_2, W_3 im Verhältnis 3:2:1 durchgeführt werden. Für das Zweigwerk W_2 steht lediglich fest, dass 100 ME für den Konsum zur Verfügung stehen müssen.
Bestimmen Sie den Konsum- und den Produktionsvektor für diese Planungsperiode.

Fortsetzung nächste Seite →

Aufgrund einer statistischen Auswertung ergibt sich für die Zukunft folgende neue Input-Matrix A_t mit der Anpassungsgröße $t \in \mathbb{R}^+$. Auch die Produktion wird von der Anpassungsgröße t beeinflusst, so dass sich ein neuer Produktionsvektor $\vec{x}_t$ ergibt:

$$A_t = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & t \\ 0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 10t^2 - 6t + 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_t = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ \frac{20}{t} \end{pmatrix}$$

f) Berechnen Sie, wie viele Mengeneinheiten (ME) die einzelnen Werke in Abhängigkeit vom Parameter t an den Markt abgeben können.

g) Alle Bauteile liefern einen positiven Deckungsbeitrag und tragen somit zur Deckung der fixen Kosten bei. Der Deckungsbeitrag der Bauteile aus Werk W_1 beträgt 40 GE je verkaufter Mengeneinheit (ME), bei Bauteilen aus Werk W_2 beträgt er 10 GE je ME und bei Bauteilen aus Werk W_3 15 GE je ME.

Bestimmen Sie, welchen Wert der Parameter t annehmen muss, damit der Gesamtdeckungsbeitrag in der nächsten Planungsperiode möglichst groß wird.

Berechnen Sie den maximal möglichen Gesamtgewinn für die nächste Planungsperiode, wenn die fixen Kosten des Unternehmens 670 GE betragen.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>$x_{11}=120$, $y_2=40$, $x_3=100$; $\vec{x}=\begin{bmatrix}300\\200\\100\end{bmatrix}$; $\vec{y}=\begin{bmatrix}40\\40\\10\end{bmatrix}$; $A=\begin{bmatrix}0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}6\\0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6\\0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4\end{bmatrix}$</td><td>10</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Ansatz: $(E-A)^{-1}\cdot(E-A)=E$
$(E-A)=\begin{bmatrix}0{,}6 & -0{,}4 & -0{,}6\\-0{,}2 & 0{,}8 & -0{,}6\\-0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}6\end{bmatrix}$
$\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}21 & 2a+b & 36\\a+b & 15 & 24\\5 & 5 & 20\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0{,}6 & -0{,}4 & -0{,}6\\-0{,}2 & 0{,}8 & -0{,}6\\-0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
An dieser Stelle sind mehrere Lösungsvarianten möglich. Es können zwei beliebige Gleichungen aufgestellt werden, welche die Parameter a und b enthalten. Anhand der beiden Gleichungen können die Parameter bestimmt werden.
Beispiel:
$\frac{1}{6}\cdot(21\cdot 0{,}6-0{,}2(2a+b)-0{,}1\cdot 36)=1$
$-0{,}4a-0{,}2b=-3$
$\frac{1}{6}\cdot(0{,}6\cdot(a+b)-0{,}2\cdot 15-0{,}1\cdot 24)=0$
$0{,}6a+0{,}6b=5{,}4$
$\left[\begin{array}{cc|c}-0{,}4 & -0{,}2 & -3\\0{,}6 & 0{,}6 & 5{,}4\end{array}\right]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{cc|c}-0{,}4 & -0{,}2 & -3\\-0{,}6 & 0 & -3{,}6\end{array}\right]\Rightarrow\quad a=6\ \text{ und }\ b=3$
Die Matrix $(E-A)$ muss invertierbar sein und die Inverse darf nur nichtnegative Elemente enthalten.</td><td></td><td>15</td><td>5</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$\vec{y}_{neu}=\begin{bmatrix}36\\48\\18\end{bmatrix}$; Ansatz: $\vec{x}_{neu}=(E-A)^{-1}\cdot\vec{y}_{neu}$
$\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}21 & 15 & 36\\9 & 15 & 24\\5 & 5 & 20\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}36\\48\\18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}354\\246\\130\end{bmatrix}=\vec{x}_{neu}$
Die Produktion in W_1 muss 354 ME, in W_2 246 ME und in W_3 130 ME betragen, um den erwarteten Konsum abzudecken.</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
d)	$\vec{x}_{neu} = \begin{bmatrix} 500 \\ 400 \\ 200 \end{bmatrix}$; Ansatz: $\vec{y}_{neu} = (E - A) \cdot \vec{x}_{neu}$ $\begin{bmatrix} 0,6 & -0,4 & -0,6 \\ -0,2 & 0,8 & -0,6 \\ -0,1 & -0,1 & 0,6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 500 \\ 400 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 100 \\ 30 \end{bmatrix} = \vec{y}_{neu}$ Es können 20 ME von W_1, 100 ME von W_2 und 30 ME von W_3 an den Markt abgegeben werden.	5		
e)	$\vec{x}_{neu} = \begin{bmatrix} 3x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$; $\vec{y}_{neu} = \begin{bmatrix} y_1 \\ 100 \\ y_3 \end{bmatrix}$; Ansatz: $\vec{y}_{neu} = (E - A) \cdot \vec{x}_{neu}$ (oder: $\vec{x}_{neu} = (E - A)^{-1} \cdot \vec{y}_{neu}$) $\begin{bmatrix} 0,6 & -0,4 & -0,6 \\ -0,2 & 0,8 & -0,6 \\ -0,1 & -0,1 & 0,6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ 100 \\ y_3 \end{bmatrix} = \vec{y}_{neu}$ $1,8x_3 - 0,8x_3 - 0,6x_3 = y_1 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = 0,4x_3$ $-0,6x_3 + 1,6x_3 - 0,6x_3 = 100 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = 250$ $-0,3x_3 - 0,2x_3 + 0,6x_3 = y_3 \quad \Leftrightarrow \quad y_3 = 0,1x_3$ Durch Einsetzen von x_3 ergibt sich $y_1 = 100$ und $y_3 = 25$. $\vec{x}_{neu} = \begin{bmatrix} 750 \\ 500 \\ 250 \end{bmatrix}$; $\vec{y}_{neu} = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 25 \end{bmatrix}$		15	5
f)	Ansatz: $\vec{y}_t = (E - A_t) \cdot \vec{x}_t$ $\quad \vec{x}_t = \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ \frac{20}{t} \end{bmatrix}$ $(E - A_t) = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,2 & -t \\ -0,8 & 0,6 & -0,6 \\ -0,1 & -0,1 & -10t^2 + 6t \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0,8 & -0,2 & -t \\ -0,8 & 0,6 & -0,6 \\ -0,1 & -0,1 & -10t^2 + 6t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ \frac{20}{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 180 \\ -\frac{12}{t} - 120 \\ -200t + 70 \end{bmatrix} = \vec{y}_t$		15	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>g)</td><td>

$DB(t) = \vec{db} \cdot \vec{y}_t$

$[40\ ,10\ ,15] \cdot \begin{bmatrix} 180 \\ -\frac{12}{t} - 120 \\ -200t + 70 \end{bmatrix} = DB(t)$

$DB(t) = -3000t - \frac{120}{t} + 7050$

$DB'(t) = -3000 + \frac{120}{t^2}$

$DB''(t) = -\frac{240}{t^3}$

Bed.: $DB'(t) = 0 \quad \wedge \quad DB''(t) < 0$

$-3000 + \frac{120}{t^2} = 0$

$t = 0{,}2 \quad \vee \quad t = -0{,}2 \notin ID$

$DB(0{,}2) = 5850 \qquad DB''(0{,}2) < 0$ also Max $(0{,}2 / 5850)$.

Ansatz: $G(t) = DB(t) - K_f$

$G(0{,}2) = DB(0{,}2) - K_f = 5180$

Der größtmögliche Gesamtgewinn in der nächsten Periode beträgt 5180 GE.</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>60</td><td>20</td></tr>
</table>

Stochastik 1

III.1 Gepäckaufgabe

Auf einem bestimmten Flughafen geben die Passagiere an den Schaltern Gepäck auf. Die Gepäckstücke bekommen jeweils einen Anhänger mit einem Strichcode auf Papieraufklebern, der den Zielflughafen angibt. Alle an den verschiedenen Schaltern aufgegebenen Gepäckstücke laufen über viele Förderbänder und schließlich zum Code-Lesegerät, durch das dann die Stücke einzeln auf die richtigen Flugzeuge verteilt werden sollen. Auf dem Weg zum Lesegerät werden aber einige Anhänger verknickt oder verschmutzt, so dass dann diese Gepäckstücke vom Lesegerät nicht der richtigen Maschine zum Zielflughafen zugewiesen werden. Der Anteil der fehlgeleiteten Gepäckstücke hat sich über lange Zeit im Mittel als stabil gezeigt und beträgt ca. 3,5 %.

Rechnen Sie in dieser Aufgabe mit exakt 3,5 % .

a) Begründen Sie, warum man die Zufallsgröße X, die die Anzahl der vom Code-Lesegerät fehlgeleiteten Gepäckstücke zählt, als binomialverteilt annehmen kann.

b) Für eine Fokker F27 werden 45 Gepäckstücke aufgegeben.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

- Alle 45 Gepäckstücke finden durch das Lesegerät ihre richtige Maschine.
- Genau 2 der 45 Gepäckstücke werden fehlgeleitet.
- Höchstens 4 der 45 Gepäckstücke werden fehlgeleitet.
- Es werden mehr als 4 der 45 Gepäckstücke fehlgeleitet.

c) Die Flughafengesellschaft rechnet mit Kosten von 70 € pro fehlgeleitetem Gepäckstück.
Um ihre Gesamtkosten in diesem Bereich zu vermindern, werden die Anhänger verbessert. Dadurch werden nur noch 0,5 % der Gepäckstücke vom Code-Leser fehlgeleitet. 3 % der Gepäckstücke werden als unleserlich ausgesondert. Diese ausgesonderten Stücke werden dann von einem Angestellten weiter bearbeitet. Dieser kann 80 % der ausgesonderten Stücke richtig zuordnen. Die restlichen Stücke bleiben am Startflughafen und werden erst auf Suchantrag zugestellt.
Eine Prüfung durch den Angestellten kostet 10 €, eine Zustellung nach Suchantrag insgesamt 100 €.
Berechnen Sie die dadurch erreichte Minderung der erwarteten Kosten pro Koffer.

Fortsetzung nächste Seite →

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein fehlgeleitetes Gepäckstück innerhalb eines Monats überhaupt nicht wieder auffindbar ist, beträgt nur ca. 0,02 %. Wir nennen einen solches Gepäckstück „Verlustkoffer".

Monatlich fliegen von dem Flughafen im Schnitt 8.000 Passagiere mit ca. 12.000 aufgegebenen Gepäckstücken nach Boston.

Die folgenden Fragen beziehen sich nur auf diese Flugstrecke.
(Verwenden Sie, wo möglich, die anliegende Tabelle.)

- Begründen Sie, dass man für die Anzahl der Verlustkoffer unter den innerhalb eines Jahres aufgegebenen Koffern eine Poisson-Verteilung mit dem Erwartungswert $\mu = 28{,}8$ annehmen kann.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den in einem Jahr aufgegebenen Gepäckstücken tatsächlich genau 29 Verlustkoffer auftreten.
- Da für jeden Verlustkoffer Entschädigungszahlungen in (mittlerer) Höhe von 400 € geleistet werden müssen, möchte sich die Flughafengesellschaft gegen hohe Entschädigungssummen versichern. Um die Versicherungsprämie gering zu halten, wird die Entschädigungssumme eines Jahres nur dann versichert, wenn Sie 12.000 € übersteigt.
  Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Fall eintritt?
- Bei einem Gesamtschaden im Jahr von über 12.000 € zahlt die Versicherungsgesellschaft den Betrag, der 12.000 € übersteigt.
  Mit welchem Betrag an Schadenszahlung pro Jahr muss die Versicherungsgesellschaft im Durchschnitt rechnen?

Anlage zur Aufgabe „Gepäckaufgabe“:

Daten zur Poisson-Verteilung

$\mu = 28{,}8$

	k	$e^{-\mu} \cdot \sum_{i=0}^{k} \frac{\mu^i}{i!}$	$e^{-\mu} \cdot \sum_{i=0}^{k} i \cdot \frac{\mu^i}{i!}$
	23	0,1615	3,3776
	24	0,2146	4,6518
	25	0,2758	6,1809
	26	0,3435	7,9424
	27	0,4158	9,8936
	28	0,4901	11,9748
	29	0,5639	14,1156
	30	0,6348	16,2415
	31	0,7006	18,2824
k	32	0,7599	20,1785
	33	0,8116	21,8850
	34	0,8554	23,3743
	35	0,8915	24,6358
	36	0,9203	25,6738
	37	0,9427	26,5043
	38	0,9597	27,1507
	39	0,9723	27,6405
	40	0,9813	28,0023
	41	0,9877	28,2628
	42	0,9921	28,4458

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Es werden nur zwei Ergebnisse unterschieden: Ein Gepäckstück wird der richtigen Maschine zugewiesen oder nicht. Der Anhänger kann zum Beispiel gleich beim Anbringen versehentlich verknickt werden. Fällt das Gepäckstück ungünstig auf das Förderband oder ist dieses an einer Stelle verschmutzt, kann die Lesbarkeit des Anhängers ebenfalls beeinträchtigt werden. Auf eine Abhängigkeit kann hieraus wohl nicht geschlossen werden, so dass man den Transport von n Gepäckstücken vom Einchecken bis zum richtigen Flugzeug als Bernoulli-Kette der Länge n ansehen kann.		15	
b)	Die Wahrscheinlichkeit für genau *k* Treffer in einer Bernoulli-Kette der Länge *n* mit der Trefferwahrscheinlichkeit *p* beträgt $P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$. Sieht man fehlgeleitete Gepäckstücke als „Treffer“ an, so berechnet man die gesuchten Wahrscheinlichkeiten mit $p = 0{,}035$. <u>Kein Gepäckstück fehlt: $k = 0$</u> $n = 45,\ k = 0:\quad P(X=0)=0{,}965^{45}\approx 0{,}201$. <u>Genau zwei Gepäckstücke sind fehlgeleitet: $k = 2$</u> $n = 45,\ k = 2:\quad P(X=2)=\binom{45}{2}0{,}035^2\cdot 0{,}965^{43}\approx 0{,}262$. <u>Höchstens vier Gepäckstücke sind fehlgeleitet: $k = 0, 1, .., 4$</u> Zwei der fünf Summanden sind bereits bestimmt. $P(X=1)=45\cdot 0{,}035\cdot 0{,}965^{44}\approx 0{,}328$, $P(X=3)=\binom{45}{3}\cdot 0{,}035^3\cdot 0{,}965^{42}\approx 0{,}136$ $P(X=4)=\binom{45}{4}\cdot 0{,}035^4\cdot 0{,}965^{41}\approx 0{,}052$. Insgesamt erhält man also $P(X\le 4)\approx 0{,}979$. *Dieser Wert ergibt sich als Summe der oben genannten gerundeten Werte, wenn man den exakten Wert auf 3 Nachkommastellen rundet, erhält man 0,980.* <u>Mehr als vier Gepäckstücke sind fehlgeleitet</u>: Dies ist ersichtlich das Gegenereignis zum gerade betrachteten Ereignis. $P(X>4)=1-P(X\le 4)\approx 1-0{,}979=0{,}021$ (Analog erhält man dieselben Ergebnisse, wenn man ein richtig transportiertes Gepäckstück als „Treffer“ interpretiert.)	20		

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>c)</td><td>Die Fluggesellschaften rechnen zunächst mit $E(Y_1) = 70$ € · 0,035 = 2,45 € Kosten pro aufgegebenem Gepäckstück.
Nach der Verbesserung ihrer Lesegeräte gilt:

Y_2: 0 | 10 | 70 | 110
Wahrscheinlichkeit: 0,965 | 0,024 | 0,005 | 0,006

und man erhält: $E(Y_2) = 1{,}25$ €. Die zu erwartende Kostenminderung beträgt mithin 1,20 € pro Gepäckstück.</td><td>5</td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Nimmt man die Anzahl Z der Verlustkoffer innerhalb eines Jahres als binomialverteilt an, so ist, da $n > 100$ und $p < 0{,}01$, die Poisson-Verteilung eine gute Näherung. Für ein Jahr ergibt sich:
$\mu = E(Z) = 12 \cdot 0{,}0002 \cdot 12000 = 28{,}8$.

<u>$k = 29$</u>
Mit Hilfe der Näherungsformel von Poisson $P(Z = k) \approx \frac{1}{e^{\mu}} \cdot \frac{\mu^k}{k!}$ direkt oder durch Differenzbildung zweier kumulierter Werte aus der Tabelle erhält man:
$P(Z = 29) \approx (0{,}5639 - 0{,}4901) = 0{,}0738 \approx 0{,}074$.

Bei 30 Verlustkoffern ist die Entschädigungssumme von 12 000 € zu zahlen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $P(Z > 30)$.
Mit Hilfe der Tabelle erhält man
$P(Z > 30) = 1 - P(Z \le 30) \approx 1 - 0{,}6348 \approx 0{,}365$

Der Erwartungswert für die Schadenzahlung beträgt:
$400 \cdot \frac{1}{e^{\mu}} \cdot \sum_{i=31}^{\infty} (i-30) \cdot \frac{\mu^i}{i!} = 400 \cdot \frac{1}{e^{\mu}} \cdot \left(\sum_{i=31}^{\infty} i \cdot \frac{\mu^i}{i!} - 30 \cdot \frac{1}{e^{\mu}} \cdot \sum_{i=31}^{\infty} \frac{\mu^i}{i!} \right)$
$\approx 400 \cdot \left[(28{,}8 - 16{,}2415) - 30 \cdot (1 - 0{,}6348) \right] = \left[12{,}5585 - 10{,}956 \right] \cdot 400 = 641$.</td><td></td><td>20</td><td>25</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>50</td><td>25</td></tr>
</table>

Stochastik 2

III.2 Wahlen

Eine Großstadt hat 523.740 wahlberechtigte Einwohner.

a) Nach der letzten Stadtratswahl wurde die Wahlbeteiligung analysiert. Dabei wurde die wahlberechtigte Bevölkerung in drei Gruppen eingeteilt:

Gruppe I: 157.122 Wahlberechtigte, die jünger als 35 Jahre sind,

Gruppe II: 235.683 Wahlberechtigte im Alter von 35 Jahren bis 65 Jahren,

Gruppe III: 130.935 Wahlberechtigte, die älter als 65 Jahre sind.

Die Wahlbeteiligung betrug 87 % in der Gruppe I, 82 % in Gruppe II und 65 % in Gruppe III. Bestimmen Sie die Wahlbeteiligung insgesamt.

b) Ermitteln Sie Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei einer zufälligen Auswahl von 100 Personen aus dem Personenkreis der über 65-jährigen mehr als 30 und weniger als 40 Personen findet, die nicht an der Wahl teilgenommen haben.
(Sie können eine Binomialverteilung annehmen, weil die Zahl 100 sehr klein gegenüber der Gesamtzahl in dieser Gruppe ist.)

c) Bei der bevorstehenden Wahl erhofft sich die Partei G die absolute Mehrheit. Um nicht unnötig einen teuren Wahlkampf zu führen, beschließt sie, ihre Chancen durch eine repräsentative Umfrage untersuchen zu lassen. Falls man aufgrund des Ergebnisses einen Stimmenanteil von mehr als 55 % aller Wahlberechtigten erwarten kann, will sich die Partei einen aufwändigen Wahlkampf sparen.
Ein Amateurstatistiker erläutert den Parteistrategen:
„Wir befragen repräsentativ 200 wahlberechtigte Personen. Die Hypothese, dass Sie einen Stimmenanteil von höchstens 55 % erwarten können, wird mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 % erst dann abgelehnt, wenn sich unter den 200 Befragten mindestens 123 für Sie entscheiden, anderenfalls empfehle ich weitere Wahlkampfmaßnahmen.“

- Zeigen Sie, dass die Zahl von 123 Personen korrekt bestimmt ist.
- Bestimmen Sie unter der Annahme, dass die Partei G zu diesem Zeitpunkt einen Stimmenanteil von 60 % bekäme, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dennoch ein aufwändiger Wahlkampf geführt wird. Interpretieren Sie dieses Ergebnis.

d) In Deutschland gilt für Bundes- und Landtagswahlen die 5-Prozent-Klausel.
Die Partei Q erhofft den Einzug in den Landtag. Sie geht von höchstens 80 % Wahlbeteiligung aus, braucht also nur 4 % der Stimmen aller Wahlberechtigten. Um ihre Chancen einschätzen zu können, beauftragt sie deshalb ein Wahlforschungsinstitut.

Eine typische repräsentative Umfrage eines Wahlforschungsinstitutes umfasst 1100 wahlberechtigte Personen.
Die Partei Q erhält vom Wahlforschungsinstitut das Ergebnis mitgeteilt, dass 5,4 % der befragten Personen die Partei Q wählen und auch zur Wahl gehen würden.
Ermitteln Sie: Kann die Partei Q aufgrund dieser Umfrage mit 95-prozentiger Sicherheit damit rechnen, ins Parlament einzuziehen?

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die prozentualen Anteile unter allen Wahlberechtigten betragen 30 % für Gruppe I, 45 % für Gruppe II und 25 % für Gruppe III. Daraus ergibt sich mit $0,3\cdot 0,87+0,45\cdot 0,82+0,25\cdot 0,65=0,7925$ eine Wahlbeteiligung von insgesamt 79,25 % .	10		
b)	$n = 100$, $p = 0{,}35$. X bezeichne die Anzahl der Nichtwähler in dieser Stichprobe. Gesucht ist $P(31\le X\le 39)$. Es ist mühsam, aber durchaus möglich, diese Wahrscheinlichkeit schrittweise mit Hilfe der Formel $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ auszurechnen. Da für $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$ hier gilt: $\sigma=\sqrt{100\cdot 0,35\cdot 0,65}=\sqrt{22,75}>3$, kann jedoch die Binomial- durch die Normalverteilung approximiert werden. Mit Hilfe der Integralen Näherungsformel von Moivre und Laplace folgt mit Interpolieren: $P(31\le X\le 39)\approx\Phi\left(\frac{39,5-35}{\sqrt{22,75}}\right)-\Phi\left(\frac{30,5-35}{\sqrt{22,75}}\right)=2\cdot\Phi\left(\frac{4,5}{\sqrt{22,75}}\right)-1$ $\approx 2\cdot\Phi(0,943)-1\approx 2\cdot 0,8272-1=0,6544\approx 65,4\%$. *In einigen Büchern, wie auch in der genehmigten Tafel wird die Formel von Moivre-Laplace ohne die Korrektur mit 0,5 angegeben. Entsprechende Rechnungen sind natürlich auch als richtig anzusehen.*		20	
c)	<u>Es handelt sich um das einseitige Testen einer Hypothese.</u> Getestet wird H_0: $p\le 0,55$. Die Hypothese H_0 wird abgelehnt und der Wahlkampf nicht intensiviert, wenn, die Anzahl Y der Wähler unter den 200 Befragten hinreichend groß ist. Genauer: Es wird eine möglichst kleine natürliche Zahl N bestimmt, so dass unter der Annahme, dass H_0 richtig ist, die Wahrscheinlichkeit $P(Y > N)$ kleiner oder gleich 5 % ist. Da H_0 eine zusammengesetzte Hypothese ist, müssen wir abschätzen und nehmen an, dass $p=0,55$. Außerdem approximieren wir die jetzt angenommene Verteilung von Y durch eine Normalverteilung mit $\mu=110$ und $\sigma=\sqrt{200\cdot 0,55\cdot 0,45}\approx 7,036$. Dem Tafelwerk entnimmt man: $P(Y\le\mu+1,64\cdot\sigma)\approx 95\,\%$ Also $P(Y\le 121.5)\approx 95\,\%$ bzw. $P(Y>121.5)\approx 5\,\%$. Also muss $N = 122$ gewählt werden, d.h. H_0 wird abgelehnt, wenn sich mindestens 123 Personen für die Partei G entscheiden.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

<u>Fehler 2. Art:</u>

Die Partei G führt unnötig einen aufwendigen Wahlkampf, begeht also einen Fehler 2. Art, wenn unter der Annahme, dass $p = 0{,}6$ das Ergebnis der Umfrage nicht im Ablehnungsbereich von H_0 liegt, wenn also $Y \leq 122$. Zu berechnen ist deshalb $P(Y \leq 122)$. Mit $\mu = 120$, $\sigma = \sqrt{48} > 3$ und der Integralen Näherungsformel folgt:

$$P(Y \leq 122) \approx \Phi\left(\frac{122 - 120 + 0{,}5}{\sqrt{48}}\right) \approx \Phi(0{,}3608) \approx 64{,}1\,\% .$$

<u>Interpretation:</u>

Dass dieser Fehler 2. Art so groß ist, verwundert nicht, da p nur geringfügig größer als 55 % ist. Der Annahmebereich von H_0, also das Intervall [0 ; 122], endet erst mehr als eine Viertel Streuung rechts vom Erwartungswert 120 für $p = 0{,}6$.

Wächst p, so „wandert" der Erwartungswert nach rechts aus diesem Intervall heraus, der Fehler 2. Art wird kleiner.

Auf die Situation der Partei G bezogen bedeutet dies sehr nachvollziehbar:
Je mehr Wähler sie unter allen Wahlberechtigten hat, desto unwahrscheinlicher wird ein Umfrageergebnis, dass sie unnötig in einen aufwändigen Wahlkampf zwingt.

I	II	III
10	25	10

d) Wie dieses Konfidenzintervall bestimmt wird, ob als so genanntes *grobes, echtes* oder *Näherungs-Konfidenzintervall* , hängt vom vorangegangenen Unterricht und entscheidend vom verwendeten Lernbuch ab. In der Darstellung muss das Verständnis für die gewählte Vorgehensweise deutlich werden. Die Korrektoren sollten auch tolerant sein gegenüber Formulierungen, die den Unterschied zwischen den Begriffen „Sicherheit" und „Wahrscheinlichkeit" verwischen.

Wir geben hier die drei genannten Varianten an.

Zunächst bestimmen wir ein zur zufällig gefundenen empirischen relativen Häufigkeit $R = 0{,}054$ symmetrisches Intervall, das den gesuchten Wert p nur mit ungefähr 90 % Wahrscheinlichkeit einschließt, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Intervall rechts von p liegt ungefähr 5 %. Nur in diesem letzten Fall, würde das Institut die gestellte Frage fälschlich bejahen.

Es muss dann gelten: $|0{,}054 - p| = 1{,}64 \dfrac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}}$

<u>Grobes Konfidenzintervall:</u>

Man schätzt $\sqrt{p \cdot (1-p)}$ nach oben durch $\dfrac{1}{2}$ ab und setzt $n = 1100$.

Dann gilt: $P(|R - p| \leq 0{,}025) \geq 90\,\%$.

Bei dieser Abschätzung kann die Partei also mit mindestens 95 % Wahrscheinlichkeit nur damit rechnen, mindestens 2,9 % der wahlberechtigten Stimmen zu bekommen. Die gestellte Frage ist so zu verneinen.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Näherungs-Konfidenzintervall: Man schätzt $\sqrt{p\cdot(1-p)}$ durch $\sqrt{0{,}054\cdot(1-0{,}054)}\approx 0{,}227$ ab und setzt $n=1100$. Dann gilt $P(\lvert R-p\rvert \le 0{,}011)\approx 90\ \%$ Dann kann bei dieser Abschätzung die Partei also mit mindestens 95 % Wahrscheinlichkeit damit rechnen, mindestens 4,3 % der wahlberechtigten Stimmen zu bekommen. Die gestellte Frage ist zu bejahen. Echtes Konfidenzintervall: Man löst die quadratische Gleichung: $\lvert p-0{,}054\rvert = 1{,}64\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{1100}}$ nach p auf und erhält als Lösungen zwei extreme Möglichkeiten für p also das Intervall [0,044 , 0,066] Nach dieser Rechnung kann die Partei mit ungefähr 95 % Wahrscheinlichkeit damit rechnen, mindestens 4,4 % der wahlberechtigten Stimmen zu bekommen. Die gestellte Frage ist zu bejahen.		10	15
	Insgesamt 100 BWE	20	55	25