ANALYSIS 1

I.1 Deichbau

Entlang der Küsten sind so genannte Sommerdeiche den Hauptdeichen vorgelagert. Sie sind mit Böschungsneigungen (Neigung = Betrag der Steigung) von 1 : 7 (bis zu 1 : 12) zur See hin und mit Böschungsneigungen von 1 : 5 (bis zu 1 : 10) zum Land hin den besonderen Beanspruchungen durch das Überströmen bei Sturmfluten angepasst.

Die Deiche bestehen aus einem so genannten Deichkern und zum Land und zum Wasser hin auslaufenden Wällen. Der Kern eines solchen Deiches kann durch die Funktion $f_{a;b}$ mit

$$f_{a;b}(x) = (x+a)\cdot e^{b-x} \qquad a,b \in \mathbb{R}$$

beschrieben werden.

a) Ermitteln Sie die Nullstelle, den Extrempunkt und den Wendepunkt des Funktionsgraphen in Abhängigkeit von den Parametern *a* und *b*. [Kontrollergebnis: $f'(x) = (1-x-a)e^{b-x}$].

Ein Sommerdeich in der Nähe von Nordstrand soll eine Deichhöhe von 3,50 m haben. Für die Modellierung soll folgendes gelten:

- Die Deichkrone (das ist die höchste Stelle des Deichkerns) liegt auf der *y*-Achse.
- Die Meerseite des Deiches entspricht dem Funktionsgraphen für $x > 0$.
- Die Landseite des Deiches entspricht dem Funktionsgraphen für $x < 0$.

b) Bestimmen Sie *a* und *b* so, dass $f_{a;b}$ den oben genannten Bedingungen entspricht. Geben Sie die Koordinaten von Wendepunkt und Hochpunkt an und skizzieren Sie den Graphen der Funktion. [Kontrollergebnis: $a = 1$, $b = \ln 3{,}5$.]

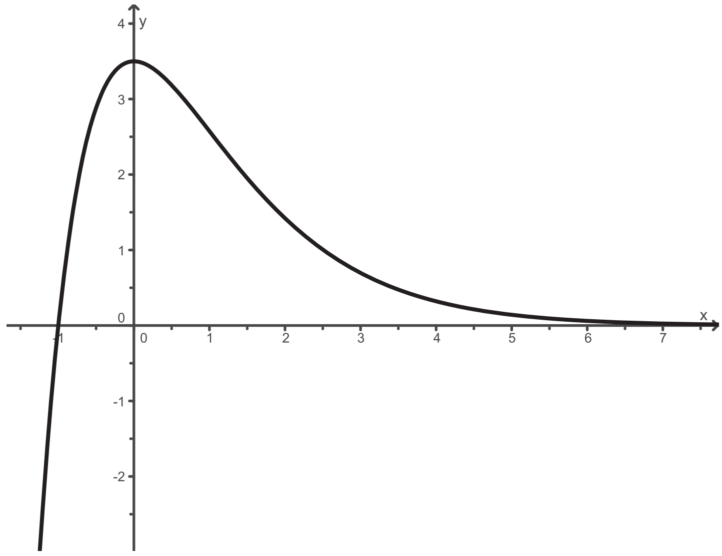
c) Zur Landseite wird der Deichkern mit einem Sand-Kiesel-Gemisch aufgeschüttet. Die Höhe der Aufschüttung kann mit einer linearen Funktion *g* beschrieben werden, die die *y*-Achse in der Deichkrone trifft und die Höhe NN (Normal Null, also Schnittpunkt mit der *x*-Achse) bei $x = -17{,}5$ erreicht.
Berechnen Sie den Funktionsterm von *g* und zeigen Sie, dass sich das Gefälle der Aufschüttung in der vorgegebenen Toleranz von 1:5 bis 1:10 befindet.

d) Zur Seeseite hin soll der Deich vom Wendepunkt ab mit einem Gefälle von 1:7 ebenfalls mit einem Sand-Kiesel-Gemisch aufgeschüttet werden.
Berechnen Sie den Term der linearen Funktion *h*, die diese Aufschüttung beschreibt.

e) Ermitteln Sie, wie viel m^3 Sand-Kiesel-Gemisch für 10 Meter der seeseitigen Aufschüttung benötigt werden.
[Hinweis: $f_{1;\ln 3,5}(19) \approx 0$.]

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<u>Nullstelle:</u> Bedingung: $f_{a,b}(x)=(x+a)e^{b-x}=0$ <=> $x=-a$ Die Nullstelle liegt bei $x=-a$ <u>Extrempunkt:</u> $f'_{a;b}(x)=0 \wedge f''_{a;b}(x)\neq 0$ $f'_{a;b}(x)=0 \Leftrightarrow f'_{a;b}(x)=(1-x-a)\cdot e^{b-x}=0 \Leftrightarrow x=1-a$ $f''_{a;b}(x)=(x+a-2)e^{b-x}$ $f''_{a;b}(1-a)=-e^{b-(1-a)}<0$ für alle $a,b\in\mathbb{R}$. Bei $x = 1 - a$ liegt ein lokales Maximum vor. Weiter gilt: $f_{a,b}(1-a)=e^{b+a-1}$. Damit ergibt sich für den Hochpunkt: $H(1-a\|e^{b+a-1})$ <u>Wendepunkt:</u> $f''_{a;b}(x)=0 \wedge f'''_{a;b}(x)\neq 0$ Es gilt: $f''_{a;b}(x)=0 \Leftrightarrow f''_{a;b}(x)=(x+a-2)\cdot e^{b-x}=0 \Leftrightarrow x=2-a$ $f'''_{a;b}(x)=(-x-a+3)e^{b-x}$ $f'''_{a;b}(2-a)=e^{b-2+a}>0$ für alle $a,b\in\mathbb{R}$. Bei $x = 2 - a$ liegt eine Wendestelle. Mit $f_{a,b}(2-a)=2\cdot e^{b+a-2}$ ergibt sich für den Wendepunkt $W(2-a\,\|\,2e^{b+a-2})$		30	
b)	Bedingungen: 1. Lokales Maximum bei $x = 0$. Also $x = 1 - a = 0$ <=> $a = 1$ (alternativer Ansatz : $f'_{a;b}(0)=0$) 2. Maximum $y = 3{,}5$ Also muss gelten: $f_{1;b}(0)=(0+1)e^{b-0}=3{,}5$ <=> $b = \ln 3{,}5$. Damit heißt die gesuchte Funktion: $f_{1;1,25}\ (x)=(x+1)e^{1,25-x}$ *oder auch ohne Rundung* $f_{1;\ln 3,5}(x)=3{,}5\cdot(x+1)e^{-x}$. Wendepunkt $W\left(1\|\frac{7}{e}\right)$, Hochpunkt: $(0 \| 3{,}5)$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
		10	15	
c)	$g(x) = \frac{3,5}{17,5} \cdot (x + 17,5)$ $= 0,2x + 3,5$. Es ergibt sich für die gesuchte Funktion: $g(x) = 0,2x + 3,5$. Die Steigung von 0,2 liegt im Bereich der geforderten Böschungsneigung.	5	5	
d)	Wendepunkt $W\left(1 \mid \frac{7}{e}\right) \approx (1 \mid 2,58)$. <u>Gleichung der seeseitigen Böschung:</u> $h(x) = \frac{7}{e} - \frac{1}{7} \cdot (x - 1)$ $= -\frac{1}{7}x + \left(\frac{7}{e} + \frac{1}{7}\right)$ $\approx -\frac{1}{7}x + 2,72.$	5		
e)	1. <u>Die Querschnittsfläche des Deichkerns vom Wendepunkt bis zur Nullstelle von *h* ist zu berechnen:</u> Nullstelle von *h*: $h(x) = 0$ <=> $x \approx 19,03$. Es kann mit $x = 19$ gerechnet werden. Damit ergibt sich für die Querschnittfläche des Kerns: $A_K = \int_1^{19} f_{1;1,25}(x)dx$.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Bestimmung einer Stammfunktion $F_{1;1,25}$ mit Hilfe partieller Integration:

Es gilt: $f_{1;1,25}(x) = 3,5 \cdot (x+1) \cdot e^{-x}$

Sei: $u(x) = 3,5 \cdot (x+1)$ und $v'(x) = e^{-x}$.
Dann ergibt sich: $u'(x) = 3,5$ und $v(x) = -e^{-x}$.

Wir erhalten folgende Stammfunktion:
$F_{1;1,25}(x) = -3,5 \cdot (x+2) \cdot e^{-x}$.

Es gilt: $F_{1;1,25}(1) =$ –3,863 und $F_{1;1,25}(19) = \frac{147}{2 \cdot e^{19}} \approx 0$.

Damit ergibt sich für das Maß der Querschnittfläche des Deichkerns:
A_K = 3,863.

2. <u>Die Querschnittsfläche des Dreiecks ist zu berechnen:</u>
$A_D \approx (18 \cdot 2,58) : 2 = 23,22$.

3. <u>Die Querschnittfläche A des aufgeschütteten Walls ist zu berechnen:</u>
$A = A_D - A_K = 19,36$.
Damit ergibt sich, dass 193,6 m³ Sand-Kies-Gemisch benötigt werden.</td><td></td><td>10</td><td>20</td></tr>
<tr><td></td><td align="right">Gesamt:</td><td>20</td><td>60</td><td>20</td></tr>
</table>

ANALYSIS 2

I.2 Preispolitik

Hinweis: Für die zu zeichnenden Funktionsgraphen kann es sinnvoll sein, eine Wertetabelle zu erstellen. Alle Funktionsgraphen sind im vorliegenden Koordinatensystem darzustellen.

Für das Produkt eines Betriebes werden die Kosten in Abhängigkeit von der Absatzmenge x durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades dargestellt: $K: K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $D_K = \mathbb{R}^+$.
Eine mögliche „Kostenschlange“ ist in das Koordinatensystem (Anlage) eingetragen. Dem Funktionsgraphen der Kostenfunktion ist zu entnehmen, dass er keine Extrempunkte, jedoch einen Wendepunkt besitzt.

a) Begründen Sie, warum die Parameter a und d positive Werte annehmen müssen, damit eine ökonomisch sinnvolle Kostenfunktion entsteht.

   Bestimmen Sie, aus welcher Menge die Parameter b und c jeweils zu wählen sind, damit keine Extrempunkte existieren und K in der Definitionsmenge D_K einen Wendepunkt besitzt.

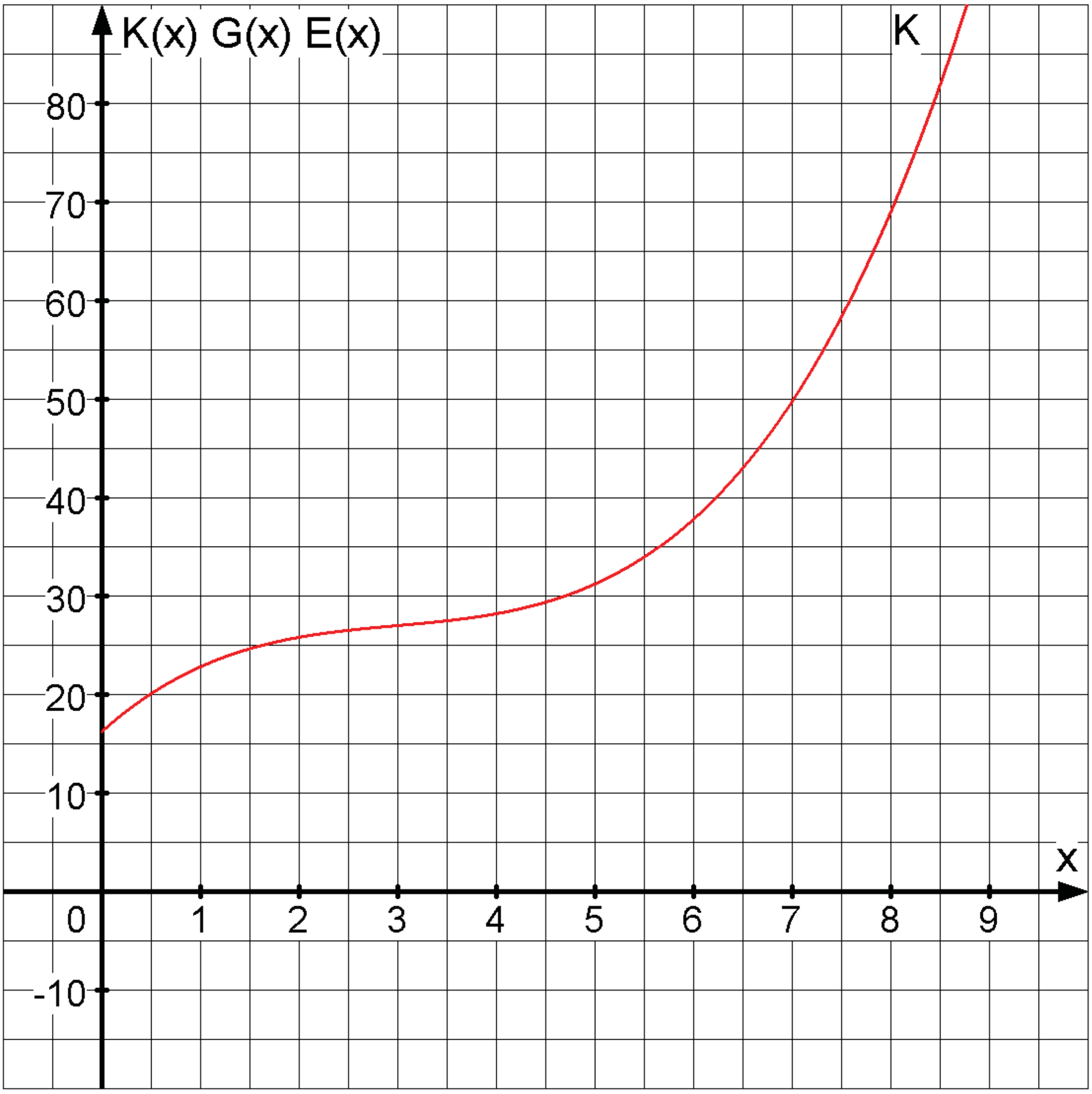
b) Zeigen Sie, dass die dargestellte Kostenfunktion $K: K(x) = 0{,}3x^3 - 2{,}7x^2 + 9x + 16{,}2$ lauten muss, wenn der Wendepunkt bei $W(3 \mid 27)$ liegt und die Parameter mit $a = 0{,}3$ und $d = 16{,}2$ bekannt sind.

c) Der Preis, der sich auf dem Markt für das Produkt erzielen lässt, beträgt 9 GE (Geldeinheiten).
   Berechnen Sie die Gleichung der Erlösfunktion E und der Gewinnfunktion G und zeichnen Sie den Graphen der Erlösfunktion E in das beiliegende Koordinatensystem.
   Skizzieren Sie in Ihrer Zeichnung die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze und ermitteln Sie diese rechnerisch mit einem geeigneten Verfahren.
   Bestimmen Sie die gewinnmaximale Absatzmenge und den dazugehörigen maximalen Gewinn.
   Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der Gewinnfunktion G in beiliegendes Koordinatensystem.

Unter dem Betriebsoptimum versteht man die Ausbringungsmenge, bei deren Produktion die geringsten Stückkosten entstehen. Die langfristige Preisuntergrenze ist dabei der Preis, der so hoch ist wie die minimalen Stückkosten.

d) Geben Sie die Stückkostenfunktion des Produktes an.
   Ermitteln Sie mit Hilfe eines geeigneten Näherungsverfahrens das Betriebsoptimum sowie die langfristige Preisuntergrenze auf zwei Nachkommastellen genau.
   Weisen Sie ihre Ergebnisse durch eine graphische Lösung näherungsweise nach.
   (Zeichnung in beiliegendes Koordinatensystem)

Anlage zur Aufgabe „Preispolitik“



Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Der Parameter a muss positiv sein, da K keine Extrempunkte besitzt und eine ökonomisch sinnvolle Kostenfunktion monoton steigt. Der Parameter d stellt die fixen Kosten dar, muss somit also auch positiv sein.
<u>Ableitungen:</u>
$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$\Rightarrow K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ und $K''(x) = 6ax + 2b$ und $K'''(x) = 6a$.
<u>Extremwerte:</u>
Notwendige Bedingung: $K'(x) = 0$.
$3ax^2 + 2bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{2b}{3a}x + \frac{c}{3a} = 0$ also $x_{1,2} = -\frac{b}{3a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{9a^2} - \frac{c}{3a}}$
Damit kein Extremwert existiert, muss der Term unter der Wurzel kleiner als Null sein.
$\frac{b^2}{9a^2} - \frac{c}{3a} < 0 \Rightarrow c > \frac{b^2}{3a} \Rightarrow c \in \mathbb{R}^+$
Da a und b^2 positive Werte annehmen, muss auch c positiv sein.
<u>Wendepunkt:</u>
Bed.: $K''(x) = 0 \wedge K'''(x) \neq 0$
$6ax + 2b = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{b}{3a}$. Da $a, x \in \mathbb{R}^+$ muss $b \in \mathbb{R}^-$ sein.</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $K''(x) = 6ax + 2b$ (s.o.)
Durch Einsetzen von a und d ergeben sich folgende Gleichungen:
$K(x) = 0{,}3x^3 + bx^2 + cx + 16{,}2$ und $K''(x) = 1{,}8x + 2b$
Einsetzen des Wendepunktes W(3 | 27) ergibt:
$K''(3) = 5{,}4 + 2b = 0 \Rightarrow b = -2{,}7$
$K(3) = 27 \quad \Rightarrow \quad 9b + 3c = 2{,}7 \qquad mit\ b = -2{,}7 \quad \Rightarrow \quad c = 9$
Damit ist $K(x) = 0{,}3x^3 - 2{,}7x^2 + 9x + 16{,}2$</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td><u>Erlösfunktion:</u>
Ansatz: $E(x) = p(x) \cdot x \quad \Rightarrow \quad E(x) = 9x$
Ansatz: $G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}3x^3 + 2{,}7x^2 - 16{,}2$.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Lösungsskizze

<u>Gewinnschwelle und Gewinngrenze:</u> Ansatz: $G(x)=0$

$-0,3x^3+2,7x^2-16,2=0 \Rightarrow x^3-9x^2+54=0$

Horner Schema für $x_1=3$

1	−9	0	54
0	3	−18	−54
1	−6	−18	0

Restpolynom:

$x^2-6x-18=0$

$x_2=3+\sqrt{27}=8,20$

$x_3=3-\sqrt{27}=-2,20 \notin D$

Die Gewinnschwelle liegt bei 3 ME, die Gewinngrenze bei 8,2 ME.

Graphische Lösung: siehe Koordinatensystem.

<u>Gewinnmaximum:</u>

Bed.: $G'(x)=0 \quad \wedge \quad G''(x)<0$

$G'(x)=-0,9x^2+5,4x \Rightarrow G''(x)=-1,8x+5,4$

$G'(x)=-0,9x^2+5,4x=0 \Rightarrow x^2-6x=0$

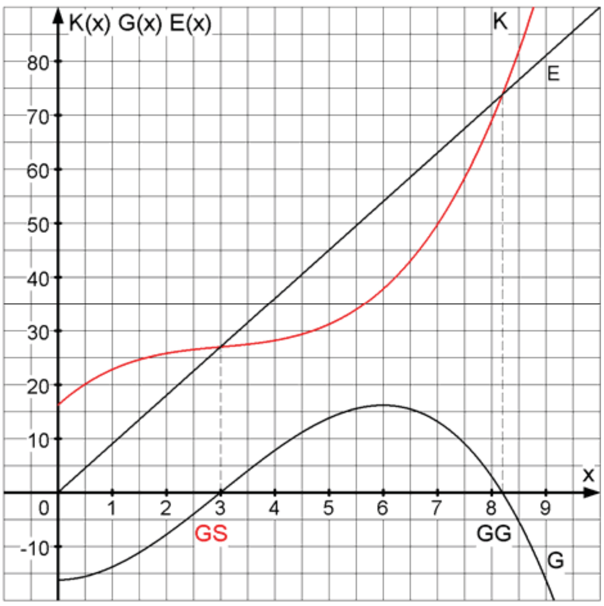
$x(x-6)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1=6 \quad \wedge \quad x_2=0$

$G''(6)=-5,4<0$ bei $x_1=6$ (relatives) Maximum

$G''(0)=5,4>0$ Minimum (nicht relevant)

$G(6)=16,2 \quad \Rightarrow \quad Max(6\,|\,16,2)$

Die gewinnmaximale Absatzmenge liegt bei 6 Mengeneinheiten und der maximale Gewinn beträgt 16,2 Geldeinheiten.



Zuordnung, Bewertung		
I	II	III
15	20	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

d) Stückkostenfunktion:

Ansatz: $k(x) = \frac{K(x)}{x}$

$k(x) = 0{,}3x^2 - 2{,}7x + 9 + \frac{16{,}2}{x}$, $k'(x) = 0{,}6x - 2{,}7 - \frac{16{,}2}{x^2}$

Betriebsoptimum: Bed.: $k'(x) = 0$

$0{,}6x - 2{,}7 - \frac{16{,}2}{x^2} = 0$

$0{,}6x^3 - 2{,}7x^2 - 16{,}2 = 0 \Rightarrow x^3 - 4{,}5x^2 - 27 = 0$

Eine Möglichkeit, die Nullstellen der Gleichung zu ermitteln, bietet das Newton'sche Näherungsverfahren:

(Auch Annäherungen durch andere Verfahren sind hier möglich.)

$f(x) = x^3 - 4{,}5x^2 - 27 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 9x$

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Startwert:

$x_0 = 5$	$x_0 = 6$
$x_1 = 5 - \frac{-14{,}5}{30} \approx 5{,}4833$	$x_1 = 6 - \frac{27}{54} = 5{,}5$
$x_2 \approx 5{,}4833 - \frac{2{,}5658}{40{,}8508} \approx 5{,}4205$	$x_2 = 5{,}5 - \frac{3{,}25}{41{,}25} \approx 5{,}4212$
$x_3 \approx 5{,}4205 - \frac{0{,}0469}{39{,}3615} \approx 5{,}4193$	$x_3 \approx 5{,}4212 - \frac{0{,}0740}{39{,}3777} \approx 5{,}4193$
$x \approx 5{,}42$	$x \approx 5{,}42$

Betriebsoptimum bei $x = 5{,}42\ ME$.

Einsetzen des Betriebsoptimum in die Stückkostenfunktion liefert die langfristige Preisuntergrenze

$k(5{,}42) = 6{,}17 \qquad \Rightarrow \qquad p(x) = 6{,}17\ GE$.

Graphische Lösung:

Die Erlösfunktion, welche die Kostenfunktion berührt, liefert den Punkt, der das Betriebsoptimum anzeigt.

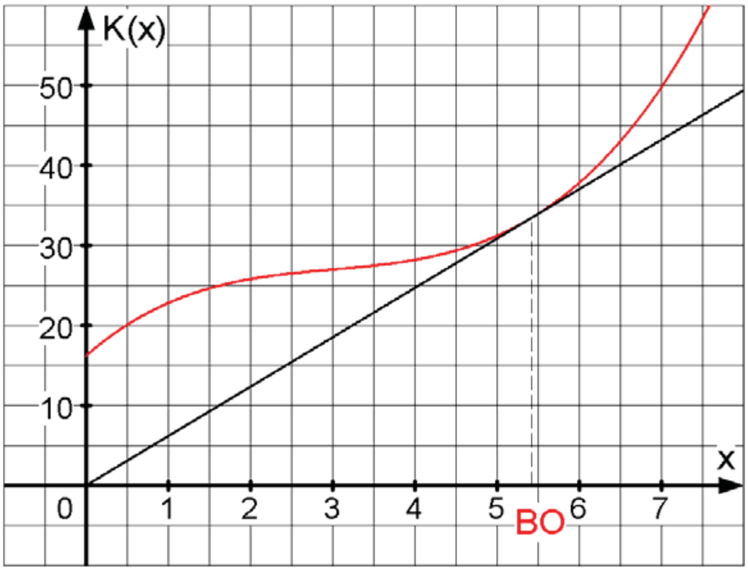
Die langfristige Preisuntergrenze entspricht der Tangentensteigung.

Betriebsoptimum:

$x \approx 5{,}4\ ME$.

Langfr. Preisuntergrenze:

$p(x) = \frac{40}{6{,}5} \approx 6{,}15\ GE$.

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lösungsskizze</td><td colspan="3">Zuordnung, Bewertung</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>5</td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>60</td><td>20</td></tr>
</table>

ANALYSIS 3

I.3 Funktionenschar

Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit der Gleichung $f_k(x) = x \cdot (1 - \frac{1}{k} \cdot \ln x),\ k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von f_k an.
Berechnen Sie die Nullstellen von f_k und geben Sie begründend an, für welche Werte von k die Nullstellen zwischen 0 und 1 liegen.

b) Bestimmen Sie die Extrem- und Wendepunkte von f_k in Abhängigkeit von *k*.
Zeigen Sie, dass der Quotient von Extremstelle und Nullstelle unabhängig von *k* ist.
(Zur Kontrolle: $f_k'(x) = 1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k}\ln x$.)

c) Untersuchen Sie, ob die Graphen der Schar gemeinsame Punkte haben. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Schnittpunkte.
Weisen Sie nach, dass es ein Intervall gibt, in dem jeder beliebige Graph mit negativem *k* unter jedem beliebigen Graphen mit positivem *k* verläuft.

d) Skizzieren Sie die drei Graphen für *k* = 1, *k* = 0,5 und *k* = -0,5 in ein Koordinatensystem.

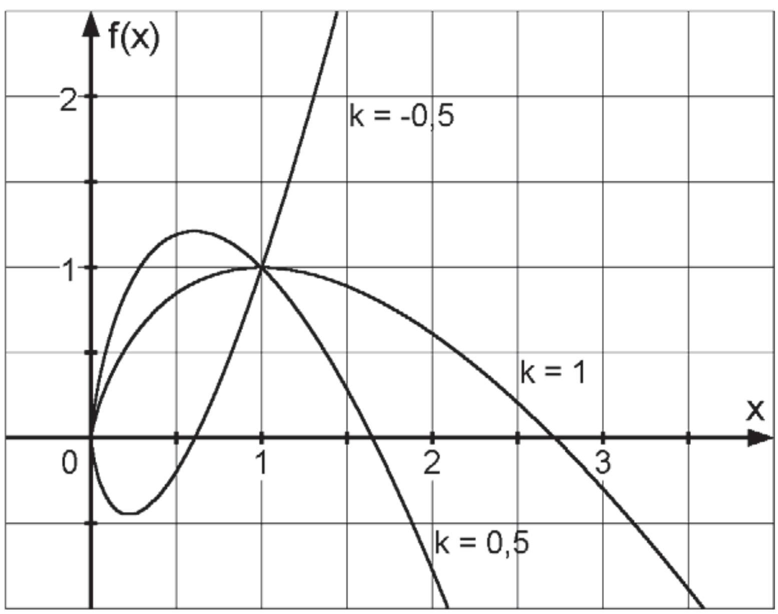
e) Bestimmen Sie für positive *k* den Inhalt $A(k)$ der Fläche, den der Graph von f_k mit der *x*-Achse einschließt.
Hinweis: $\lim\limits_{c \to 0} c^2 \cdot \ln c = 0$ (Zur Kontrolle: $A(k) = \frac{e^{2k}}{4k}$)

f) Bestimmen Sie den Wert für *k*, *k* > 0, für den der Flächeninhalt $A(k)$ extremal wird.
Ermitteln Sie diesen Flächeninhalt und entscheiden Sie, ob es sich um ein Minimum oder ein Maximum handelt.

g) Für positive *k* schließen die Parallele zur *x*-Achse durch den Hochpunkt von f_k, die Parallele zur *y*-Achse durch die Nullstelle von f_k sowie die Koordinatenachsen ein Rechteck ein.
Ermitteln Sie, ob das Verhältnis, in dem der Graph von f_k dieses Rechteck teilt, von *k* abhängt.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Definitionsbereich: $D=\mathbb{R}^+$ Nullstellen: $f_k(x)$ kann nur 0 werden, wenn der 2. Faktor den Wert 0 annimmt, da 0 selber nicht zum Definitionsbereich gehört. Der 2. Faktor nimmt den Wert Null an, genau dann wenn $x=e^k$. e^k ist für alle k positiv, also in der Definitionsmenge und damit auch Nullstelle. Für $k<0$ ist $e^k<1$, die Nullstellen liegen daher für $k<0$ zwischen 0 und 1	10	5	
b)	Um die Extrem- und Wendepunkte zu bestimmen, bildet man zunächst die 1. und die 2. Ableitung. Für die 1. Ableitung wendet man die Produktregel an und erhält: $f_k'(x)=1-\frac{1}{k}-\frac{1}{k}\ln x$. Für die 2. Ableitung folgt: $f_k''(x)=-\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{x}$. Die 1. Ableitung hat eine Nullstelle und zwar bei $x=e^{k-1}$. Um die Existenz der Extremstelle zu überprüfen, bildet man die 2. Ableitung an dieser Stelle und erhält $f_k''(e^{k-1})=-\frac{e^{1-k}}{k}$. Da e^{1-k} stets positiv ist, wird dieser Term für positive k immer negativ, also liegt in diesen Fällen ein Maximum vor. Für negative k liegt entsprechend ein Minimum vor. Für den Funktionswert gilt: $f_k(e^{k-1})=\frac{e^{k-1}}{k}$ und somit für die Extrempunkte: $E(e^{k-1}\mid\frac{e^{k-1}}{k})$. Bildet man das Verhältnis von Null- und Extremstelle, so gilt: $\frac{x_0}{x_E}=e$, ein von k unabhängiger Wert. Da der Term der 2. Ableitung für alle k nicht den Wert 0 annehmen kann, gibt es keine Wendepunkte.		20	
c)	Wenn alle Graphen der Schar einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, dann muss die folgende Gleichung – unabhängig von k – erfüllbar sein: $x\cdot(1-\frac{1}{k_1}\cdot\ln x)=x\cdot(1-\frac{1}{k_2}\cdot\ln x),\ k_1\neq k_2$. Da 0 nicht zum Definitionsbereich gehört, ist diese Gleichung genau dann erfüllt, wenn gilt: $ln(x)(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2})=0$. Dies ist äquivalent zu: $x=1$ oder $k_1=k_2$.			

	Lösungsskizze	I	II	III
	Also schneiden sich alle Funktionsgraphen der Schar bei $x = 1$ und nur dort. Da der Funktionswert dieser Stelle ebenfalls 1 ist, schneiden sich alle Graphen der Schar im Punkt (1 | 1). Aus der obigen Argumentation geht noch schärfer hervor, dass sich je zwei verschiedene Graphen der Schar außer bei $x = 1$ nicht mehr schneiden. Es kommen als Intervalle, in dem jeder beliebige Graph mit negativem k unter jedem beliebigen Graphen mit positivem k verläuft, also nur Teilintervalle von $]0;1[$ bzw. $]1;\infty[$ in Frage. Man kann nun an einer beliebigen Stelle „testen“, z. B. bei $\frac{1}{2}$: $f_k\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\ln(2)}{2k}+\frac{1}{2}$. Daraus erkennt man unmittelbar, dass dieser Funktionswert für jeden negativen Wert von k kleiner ist als der für jeden positiven Wert von k. Wegen der Stetigkeit der Funktionen f_k bleibt diese Relation auf dem ganzen Intervall $]0;1[$ erhalten. Alle Teilintervalle von $]0;1[$ erfüllen also die geforderte Bedingung. *Alternative Argumentation:* Sei x_A die Stelle, an der der Verlauf der Graphen betrachtet wird. Dann muss folgende Ungleichung untersucht werden: $x_A \cdot (1-\frac{1}{k_1}\cdot \ln x_A) \le x_A \cdot (1-\frac{1}{k_2}\cdot \ln x_A),\ k_1 \ne k_2$. Aus $x_A > 0$ folgt, dass nur die Beziehung $\ln x_A\,(\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k_1}) \le 0$ zu untersuchen ist. Geht man von dem Intervall $]0;1[$ aus, dann ist der Logarithmus kleiner als 0. Hat k_2 ein positives Vorzeichen, dann wird mit negativem k_1 die Ungleichung erfüllt. Also verlaufen im Intervall $]0;1[$ alle Graphen mit $k > 0$ oberhalb aller Graphen mit $k < 0$.		10	5
d)		10		

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>Um den Flächeninhalt zu bestimmen, berechnet man das folgende Integral partiell: $A(k) = \lim\limits_{c \to 0} \int_c^{e^k} x \cdot (1 - \frac{1}{k} \ln x)\, dx$.
Man setzt $v'(x) = x$ und $u(x) = 1 - \frac{1}{k} \cdot \ln x$. Dann folgt: $v(x) = \frac{x^2}{2}$ und
$u'(x) = -\frac{1}{kx}$. Setzt man die Terme gemäß der partiellen Integration ein, so
erhält man: $(1 - \frac{1}{k} \ln x) \cdot \frac{x^2}{2} + \int \frac{1}{kx} \cdot \frac{x^2}{2}\, dx$. Das zweite Integral lässt sich elementar bestimmen und man erhält für die Stammfunktion folgenden Term:
$\frac{x^2}{2} \cdot (1 - \frac{1}{k} \ln x) + \frac{x^2}{4k}$. Setzt man die Grenzen ein und berücksichtigt den angegebenen Grenzwert, so folgt $A(k) = \frac{e^{2k}}{4k}$.</td><td></td><td>10</td><td>5</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>Um das gesuchte k zu erhalten, leitet man $A(k)$ mit Hilfe der Produkt-Quotienten- und Kettenregel nach k ab.
Für die 1. und die 2. Ableitung folgt:
$A'(k) = \frac{e^{2k} \cdot (2k-1)}{4k^2}$
$A''(k) = \frac{e^{2k} \cdot (2k^2 - 2k + 1)}{2k^3}$
Da $k > 0$, ist diese 2. Ableitung stets positiv, denn die zur Klammer gehörende quadratische Gleichung hat keine reellen Lösungen. Also ist der Flächeninhalt bei $k = 0{,}5$ minimal. Er hat den Wert $\frac{e}{2}$.
Hinweis. Hier sind auch andere Begründungen möglich.</td><td></td><td>5</td><td>10</td></tr>
<tr><td>g)</td><td>Die Parallelen bilden ein Rechteck mit den Seitenlängen $\frac{e^{k-1}}{k}$ und e^k. Dessen Flächeninhalt beträgt $A_R(k) = \frac{e^{2k-1}}{k}$ Dann folgt für das Verhältnis:
$A(k) : A_R(k) = \frac{e}{4}$. Dieser Wert ist von k unabhängig.</td><td></td><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>55</td><td>25</td></tr>
</table>

LA/AG 1

II.1 Geradenscharen

Gegeben sind eine Ebene E und zwei Geradenscharen g_a und h_a:

$$E: x_1 + 2x_2 = 3$$

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} a \\ 1+a \\ 1-a \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ a-1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}$$

a) Berechnen Sie ein a, für das g_a parallel zu E ist.
Untersuchen Sie, ob diese Gerade g_a in der Ebene E liegt.
Berechnen Sie allgemein für alle $a \in \mathbb{R}$ den Schnittpunkt von g_a und E.

b) Ermitteln Sie diejenige Gerade g_a, die E senkrecht schneidet.

c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt von g_a und h_a in Abhängigkeit von a.
Beschreiben Sie, wie Sie ausgehend von den Richtungsvektoren von g_a und h_a eine Koordinatenform einer Ebene F_a ermitteln können, die g_a und h_a enthält.
Bestimmen Sie eine Koordinatenform von F_a.
Mögliches Ergebnis: $F_a: 2x_1 + (a-2)x_2 + (2+a)x_3 = 3a + a^2$

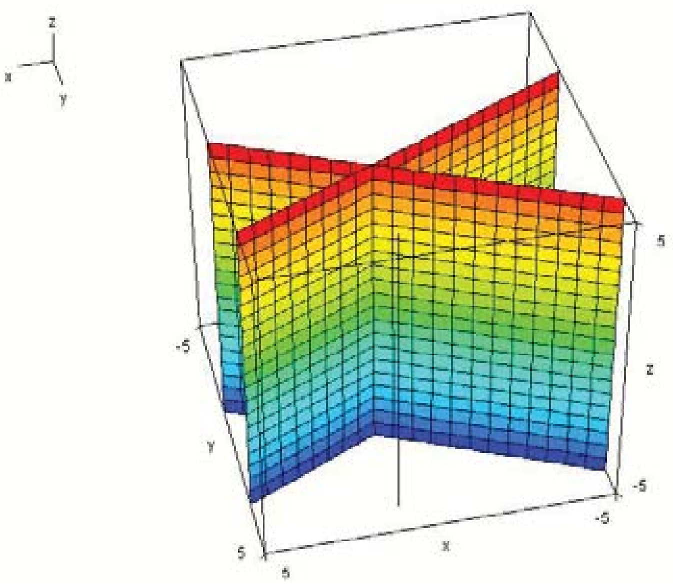
d) Zeigen Sie, dass eine der Ebenen F_a die x_1-x_2-Ebene senkrecht schneidet und geben Sie den zugehörigen Wert a an.
Bestimmen Sie den Schnittwinkel dieser Ebene F_a mit E.

e) Bestimmen Sie die prinzipielle Lage aller Geraden, die sowohl zu E als auch zu F_{-2} parallel sind und die außerdem den gleichen Abstand zu diesen beiden Ebenen haben.
Ermitteln Sie eine dieser Geraden.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Berechnung von a: Die Gerade g_a ist parallel zu E, wenn ein Normalenvektor von E orthogonal zu einem Richtungsvektor von g_a ist. $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\1+a\\1-a\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow a+2+2a=0 \Leftrightarrow a=-\frac{2}{3}$ Die Gerade $g_{-\frac{2}{3}}$ liegt in der Ebene E, denn der Stützpunkt von g_a erfüllt unabhängig von a die Ebenengleichung. Berechnung des Schnittpunkts: Die eben genannte Begründung hat auch zur Folge, dass der Stützpunkt von g_a zugleich der gesuchte Schnittpunkt ist. Für $a=-\frac{2}{3}$ liegt die Gerade ja in der Ebene E. Alternativ kann natürlich auch die Geradendarstellung in die Koordinatenform von E eingesetzt werden: $1+ra+2(1+r(1+a))=3 \Leftrightarrow 1+ra+2+2r+2ra=3 \Leftrightarrow r(2+3a)=0$. Der Wert $a=-\frac{2}{3}$ ist ausgeschlossen (s.o.). Somit bestimmt $r=0$ den Schnittpunkt $S(1 \mid 1 \mid a)$, der der Stützpunkt der Geraden ist.	20	5	
b)	Die Gerade g_a schneidet die Ebene genau dann senkrecht, wenn ein Richtungsvektor der Geraden parallel zu einem Normalenvektor von E ist. Für die beiden Vektoren $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}a\\1+a\\1-a\end{pmatrix}$ ist diese Bedingung nur mit $a=1$ erfüllbar, d.h. g_1 ist die senkrecht schneidende Gerade.		10	
c)	Zur Berechnung des Schnittpunktes der Geraden kann die Gleichung $\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}a\\1+a\\1-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\a-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc\|c}a & -2 & 2\\1+a & -1 & 1\\1-a & 1 & -1\end{array}\right)$ gelöst werden. Entweder die Lösung $r=0 \wedge s=-1$ fällt sofort ins Auge oder es ist noch eine Umformung des LGS $\left(\begin{array}{cc\|c}a & -2 & 2\\1+a & -1 & 1\\1-a & 1 & -1\end{array}\right) \begin{array}{c}II-I\\ \rightarrow\\ III+I\end{array} \left(\begin{array}{cc\|c}a & -2 & 2\\1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\end{array}\right) \begin{array}{c}\\ \rightarrow\\ III-II\end{array} \left(\begin{array}{cc\|c}a & -2 & 2\\1 & 1 & -1\\0 & -2 & 2\end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c}r=0\\s=-1\end{array}$ notwendig. Der Schnittpunkt ist also $T(1 \mid 1 \mid a)$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Die Geraden sind für keinen Wert von a identisch, denn ihre Richtungsvektoren sind für alle $a \in \mathbb{R}$ linear unabhängig (nicht kollinear). *Lösungsweg 1:* Orthogonal zu den beiden Richtungsvektoren ist jeder Normalenvektor der Ebene F_a, in der g_a und h_a liegen. Ein solcher Normalenvektor lässt sich z.B. als Vektorprodukt ermitteln: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 1+a \\ 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-a)+(1+a) \\ (-a)-2(1-a) \\ 2(1+a)-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-2 \\ 2+a \end{pmatrix}$. Durch Multiplikation mit dem Stützvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ erhält man die fehlende rechte Seite der Koordinatenform: $F_a : 2x_1 + (a-2)x_2 + (2+a)x_3 = 3a + a^2$. *Lösungsweg 2:* Aufstellen der Parameterform der Ebene F_a ausgehend vom Schnittpunkt T: $F_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} a \\ 1+a \\ 1-a \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad r, s \in \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}$. Umformen in Koordinatenform ergibt z.B.: $\begin{array}{lll} I\ x_1 = & 1 + r\cdot a + 2s & 2\cdot II - I \\ II\ x_2 = & 1 + r\cdot(1+a) + s & \rightarrow \\ III\ x_3 = & a + r\cdot(1-a) - s & 2\cdot III + I \end{array} \quad \begin{cases} 2x_2 - x_1 = & 1 + r\cdot(2+a) \\ 2x_3 + x_1 = & 1 + 2a + r\cdot(2-a) \end{cases}$ Weitere Umformungen führen schließlich auf die Koordinatenform der Ebene: $(2x_2 - x_1)\cdot(2-a) - (2x_3 + x_1)\cdot(2+a) = 2 - a - (1+2a)\cdot(2+a)$ $(4-2a)x_2 - 2x_1 + ax_1 + (-4-2a)x_3 - 2x_1 - ax_1 = -6a - 2a^2$ $-4x_1 + (-2a+4)x_2 + (-2a-4)x_3 = -6a - 2a^2 \ \vert : (-2)$ $\Rightarrow F_a : 2x_1 + (a-2)x_2 + (2+a)x_3 = 3a + a^2$.		30	
d)	Die x_1-x_2-Ebene wird genau dann senkrecht geschnitten, wenn die Normalenrichtung von F_a parallel zur x_1-x_2-Ebene ist. Das ist nur für $a = -2$ der Fall: $F_{-2} : 2x_1 - 4x_2 = -2$. Ausgehend von zwei Normalenvektoren der Ebenen wird der Winkel berechnet. $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}} = \dfrac{6}{\sqrt{100}} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \alpha \approx 53{,}1°$. Der Schnittwinkel der Ebenen E und F_{-2} beträgt etwa 53,1°.	5	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Die Ebenen E und F_{-2} sind parallel zur x_3-Achse oder – äquivalent – senkrecht zur x_1-x_2-Ebene. Ebenso müssen also die gesuchten Geraden verlaufen. Die beiden Ebenen E und F_{-2} schneiden die x_1-x_2-Ebene in zwei Geraden l_1 und l_2, die miteinander den in Teil d) berechneten Winkel α einschließen. Alle Geraden in Richtung der x_3-Achse, die durch eine der beiden Winkelhalbierenden von l_1 und l_2 verlaufen, haben die gewünschten Eigenschaften. Interpretiert man die Koordinatenformen von E und F_{-2} mit $x_3 = 0$ als Geradengleichungen, so erhält man $x_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}$ und $x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}$. Diese beiden Geraden haben als Winkelhalbierende in der x_1-x_2-Ebene die Geraden $x_2 = 1$ und $x_1 = 1$. Damit sind auch die beiden Ebenen beschrieben, in denen die gesuchten Geraden verlaufen müssen. Beispielgerade: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R}$. *Abbildung mit den Ebenen E und F_{-2} sowie der Beispielgeraden (nicht verlangt).* 			20
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

LA/AG 2

II.2 Leontief-Modell

Ein Industrieunternehmen besitzt drei Werke. Diese sind über das Leontief-Modell miteinander verbunden.
Das Werk A beliefert den Markt mit 30 ME, liefert an das Werk B 6 ME und an das Werk C 4 ME; der interne Verbrauch beträgt 40 ME.
Das Werk B beliefert den Markt mit 14 ME, beliefert das Werk A mit 16 ME und das Werk C mit 12 ME; es verbraucht selbst 18 ME.
Vom Werk C werden 6 ME an den Markt geliefert, 8 ME an das Werk A und 6 ME an das Werk B.

Die Herstellkosten belaufen sich für die Produkte aus den Werken A, B und C auf 30 GE, 21 GE und 12 GE.

a) Geben Sie den Zusammenhang in einem Verflechtungsdiagramm an.

b) Die Produkte sollen zu folgenden Preisen angeboten werden: Produkte der Werke A und B: jeweils 100 GE pro ME, Produkt des Werkes C: 50 GE pro ME.
Berechnen Sie den derzeitigen Gewinn.

c) Die Produktion soll im Bereich A um 20% gesteigert werden. Bestimmen Sie die Auswirkungen der Produktionssteigerung auf die Umsatz- und Gewinnentwicklung.

d) Zeigen Sie, dass die Leontief-Inverse folgende Gestalt hat:

$$(E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{160}{69} & \frac{10}{23} & \frac{50}{69} \\ \frac{65}{69} & \frac{40}{23} & \frac{85}{69} \\ \frac{15}{46} & \frac{5}{23} & \frac{55}{46} \end{pmatrix}$$

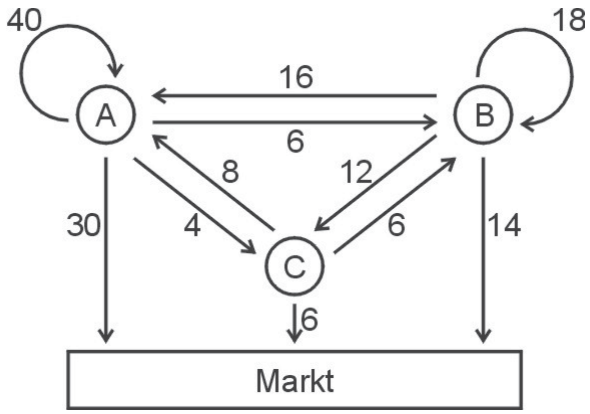
Die Leitung erwägt, den ursprünglichen Absatz um 50 % zu erhöhen. Im Vorfeld sollen die benötigten Produktionsmengen sowie der zu erwartende Gewinn untersucht werden.
Bestimmen Sie für diesen Fall die Produktionsmengen und den Gewinn.

e) Genauere Marktuntersuchungen haben ergeben, dass die gewünschte Absatzsteigerung aus Aufgabenteil d) nicht umsetzbar ist. Die Absatzmengen der Produkte sind voneinander abhängig. Sie hängen in folgender Weise zusammen: $\vec{y}^T = \begin{pmatrix} 3t & 2,4t-0,1t^2 & 0,6t \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass für die Gewinnfunktion G gilt: $G(t) \approx -4,8t^2 + 128t$

Bestimmen Sie die Absatzmengen, für welche der Gewinn maximal ist, und den maximalen Gewinn.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>


</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

$$\vec{e}^{\,T} = \begin{pmatrix} 100 & 100 & 50 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} G &= U - K \\ &= \vec{e}^{\,T} \cdot \vec{y} - \vec{k}^{\,T} \cdot \vec{x} \\ &= \begin{pmatrix} 100 & 100 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 & 21 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \\ 20 \end{pmatrix} \\ &= 4.700 - 3.900 = 800 \end{aligned}$$

Der derzeitige Gewinn beträgt 800 GE.
</td><td>15</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1{,}2 \cdot 80 \\ 60 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96 \\ 60 \\ 20 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_1 = \vec{x}_1 - A\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 96 \\ 60 \\ 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 96 \\ 60 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 10{,}8 \\ 4{,}4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} G_1 &= U_1 - K_1 \\ &= \vec{e}^{\,T} \cdot \vec{y}_1 - \vec{k}^{\,T} \cdot \vec{x}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 100 & 100 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 38 \\ 10{,}8 \\ 4{,}4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 & 21 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 96 \\ 60 \\ 20 \end{pmatrix} \\ &= 5.100 - 4.380 = 720 \end{aligned}$$

Der Umsatz erhöhte sich von 4.700 GE um 400 GE auf 5.100 GE (+8,5 %).
Der Gewinn verringerte sich von 800 GE um 80 GE auf 720 GE (–10 %).
</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
d)	Es gilt $(E-A)\cdot(E-A)^{-1}=E$. Probe mit der gegebenen Inversen: $\begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}7 & -0{,}6 \\ -0{,}1 & -0{,}1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{160}{69} & \frac{10}{23} & \frac{50}{69} \\ \frac{65}{69} & \frac{40}{23} & \frac{85}{69} \\ \frac{15}{46} & \frac{5}{23} & \frac{55}{46} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\vec{y}_2 = 1{,}5 \cdot \vec{y} = 1{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 21 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\vec{x}_2 - A\vec{x}_2 = \vec{y}_2 \Leftrightarrow \vec{x}_2 = (E-A)^{-1} \cdot \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} \frac{160}{69} & \frac{10}{23} & \frac{50}{69} \\ \frac{65}{69} & \frac{40}{23} & \frac{85}{69} \\ \frac{15}{46} & \frac{5}{23} & \frac{55}{46} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 45 \\ 21 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 90 \\ 30 \end{pmatrix}$ $G_2 = \vec{e}^{\,T} \cdot \vec{y}_2 - \vec{k}^{\,T} \cdot \vec{x}_2$ $= \begin{pmatrix} 100 & 100 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 45 \\ 21 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 & 21 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 120 \\ 90 \\ 30 \end{pmatrix}$ $= 7.050 - 5.850 = 1.200$ *Alternativer Lösungsweg:* $\vec{x}_2 - A\vec{x}_2 = \vec{y}_2 \Leftrightarrow \vec{x}_2 = (E-A)^{-1} \cdot \vec{y}_2 = (E-A)^{-1} \cdot 1{,}5 \cdot \vec{y} = 1{,}5 \cdot \vec{x}$ $\Rightarrow G_2 = 1{,}5 \cdot G = 1{,}5 \cdot 800 = 1.200$ Die Produktionsmenge muss sich für diesen Fall auf 120 ME für Produkt A, 90 ME für Produkt B und 30 ME für Produkt C erhöhen (jeweils +50 %). Der Gewinn erhöht sich auf 1.200 GE (+ 50 %).		25	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

e)

$$\vec{x}_3 = (E-A)^{-1}\cdot\vec{y}_3 = \begin{pmatrix} \frac{160}{69} & \frac{10}{23} & \frac{50}{69} \\ \frac{65}{69} & \frac{40}{23} & \frac{85}{69} \\ \frac{15}{46} & \frac{5}{23} & \frac{55}{46} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3t \\ 2,4t-0,1t^2 \\ 0,6t \end{pmatrix} = \frac{1}{46}\begin{pmatrix} -2t^2+388t \\ -8t^2+356t \\ -t^2+102t \end{pmatrix}$$

$$G_3(t) = \vec{e}^{\,T}\cdot\vec{y}_3 - \vec{k}^{\,T}\cdot\vec{x}_3$$

$$= \begin{pmatrix} 100 & 100 & 50 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3t \\ 2,4t-0,1t^2 \\ 0,6t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 & 21 & 12 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{46}\begin{pmatrix} -2t^2+388t \\ -8t^2+356t \\ -t^2+102t \end{pmatrix}$$

$$\approx -4,8t^2+128t$$

<u>Bestimmen des Gewinnmaximums:</u>

Bed. $G_3'(t_E)=0 \wedge G_3''(t_E)<0$

$G_3'(t) = -9,6t+128$ und $G_3''(t) = -9,6$

$G_3'(t)=0 \Rightarrow t_E = 13,\overline{3}$ und $G_3''(t_E) = -9,6<0 \Rightarrow$ bei t_E liegt ein Maximum.

Folgt auch unmittelbar daraus, dass G_3 eine nach unten geöffnete Parabel ist.

$G_3(13,\overline{3}) = -4,8\cdot 13,\overline{3}^2 + 128\cdot 13,\overline{3} = 853,\overline{3}$

$$\vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 3\cdot 13,\overline{3} \\ 2,4\cdot 13,\overline{3} - 0,1\cdot 13,\overline{3}^2 \\ 0,6\cdot 13,\overline{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40,0 \\ 14,2 \\ 8,0 \end{pmatrix}$$

		I	II	III
	Für einen Absatz von 40,0 ME für Produkt A, 14,2 ME für Produkt B und 8,0 ME für Produkt C ist der Gewinn mit etwa 853 GE am größten.		10	20
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

Stochastik 1

III.1 Zufallszahlen

Ein Zufallsexperiment liefert Zufallsziffern von 0 bis 9 gleichverteilt mit der Wahrscheinlichkeit von jeweils $\frac{1}{10}$ für jede Ziffer. Das Zufallsexperiment werde 100-mal unabhängig wiederholt.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Ziffer 6 genau 10-mal erscheint.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Ziffer 6 mehr als 14-mal erscheint.

Otto hat ein neues Computerprogramm erhalten, von dem der Programmierer behauptet, dass jeder Programmdurchlauf 100 Zufallsziffern (von 0 bis 9) jeweils gleichverteilt und unabhängig erzeugt. Nachdem er mit dem Programm etwas gespielt hat, ist er skeptisch, ob das Programm das leistet, was es verspricht.

Otto interessiert nur die Häufigkeit der Sechsen, weil er dieses Programm für ein Glücksspiel benutzen will. Auf keinen Fall dürfen zu viele Sechsen fallen. Er vermutet aber, dass dies der Fall ist.

Es soll im Weiteren angenommen werden, dass die Realisierung der einzelnen Zufallsziffern zumindest voneinander stochastisch unabhängig ist.

c) Otto will seine Vermutung (Hypothese), dass zu viele Sechsen vom Computer ausgegeben werden, mit einem Hypothesentest auf dem 5%-Niveau signifikant nachweisen. Als Nullhypothese wählt er die Annahme, dass die Ziffer 6 jeweils – wie vom Programmierer behauptet – mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$ erscheint.

   Beschreiben Sie, wie Otto vorgehen sollte, und ermitteln Sie zu Ihrem Test unter der Annahme der Nullhypothese die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese irrtümlich verworfen wird (Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art).
   Warum lässt sich unter der Annahme der Alternativhypothese keine sinnvolle Aussage machen über die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese irrtümlich nicht verworfen wird (Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art)? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Otto führt den Test durch, erhält aber kein signifikantes Ergebnis. Was bedeutet dies und welche Schlussfolgerungen kann er daraus ziehen? Begründen Sie Ihre Antworten.

Otto überlegt, ob die Behauptung des Programmierers nicht doch zutrifft. Er versucht daher, mit hoher Sicherheit zu begründen, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs zumindest kleiner als 0,12 ist. Dazu will er hintereinander 50 Programmdurchläufe durchführen und wieder die Gesamtanzahl der Sechsen auswerten.

e) Bestimmen Sie dazu einen Hypothesentest auf dem 1%-Niveau.

   Interpretieren Sie den Fall, dass auch hier kein signifikantes Ergebnis auftritt.

Anlage zur Aufgabe „Zufallszahlen“

Tabelle der kumulierten Binomialverteilung für n = 100

k \ p	0,1	$\frac{1}{6}$	0,2	0,25	0,3	$\frac{1}{3}$	0,4	0,5
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,008	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,024	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	0,058	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	0,117	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	0,206	0,004	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8	0,321	0,010	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
9	0,451	0,021	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10	0,583	0,043	0,006	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
11	0,703	0,078	0,013	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
12	0,802	0,130	0,025	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
13	0,876	0,200	0,047	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000
14	0,927	0,287	0,080	0,005	0,000	0,000	0,000	0,000
15	0,960	0,388	0,129	0,011	0,000	0,000	0,000	0,000
16	0,979	0,494	0,192	0,021	0,001	0,000	0,000	0,000
17	0,990	0,599	0,271	0,038	0,002	0,000	0,000	0,000
18	0,995	0,696	0,362	0,063	0,005	0,000	0,000	0,000
19	0,998	0,780	0,460	0,100	0,009	0,001	0,000	0,000
20	0,999	0,848	0,559	0,149	0,016	0,002	0,000	0,000
21	1,000	0,900	0,654	0,211	0,029	0,005	0,000	0,000
22	1,000	0,937	0,739	0,286	0,048	0,009	0,000	0,000
23	1,000	0,962	0,811	0,371	0,076	0,016	0,000	0,000
24	1,000	0,978	0,869	0,462	0,114	0,028	0,001	0,000
25	1,000	0,988	0,913	0,553	0,163	0,046	0,001	0,000
26	1,000	0,994	0,944	0,642	0,224	0,071	0,002	0,000
27	1,000	0,997	0,966	0,722	0,296	0,107	0,005	0,000
28	1,000	0,999	0,980	0,792	0,377	0,152	0,008	0,000
29	1,000	0,999	0,989	0,850	0,462	0,209	0,015	0,000
30	1,000	1,000	0,994	0,896	0,549	0,277	0,025	0,000

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Der Tabelle entnimmt man: $B(\frac{1}{10},100,10) \approx 0{,}132$. Also beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass bei 100 stochastisch unabhängig voneinander durchgeführten Versuchen die Sechs genau 10-mal erscheint, ca. 13 %.	10		
b)	Der Tabelle entnimmt man: $1-\sum_{i=0}^{14} B(\frac{1}{10},100,i) \approx 0{,}073$. Also beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass bei 100 stochastisch unabhängig voneinander durchgeführten Versuchen die Sechs mehr als 14-mal erscheint, ca. 7,3 %.	10		
c)	Man sollte die Hypothese H_0: $p = 0{,}1$ gegen die Hypothese H_1: $p > 0{,}1$ rechtsseitig testen. Aus b) wissen wir $1-\sum_{i=0}^{14} B(\frac{1}{10},100,i) \approx 0{,}073$. Wir berechnen außerdem: $1-\sum_{i=0}^{15} B(\frac{1}{10},100,i) \approx 0{,}04$. Aus diesen Ergebnissen folgt, dass man den Ablehnungsbereich für die Nullhypothese so wählen sollte, dass sie abgelehnt wird, wenn die Anzahl der Sechsen größer als 15 ausfällt, und dass die Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art ca. 4 % beträgt, also insbesondere kleiner als 5 % ist. Über die Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art lässt sich deshalb keine Aussage machen, weil H_1 sich aus vielen (sogar kontinuierlich unendlich vielen) Fällen zusammensetzt (H_1 ist eine <u>zusammengesetzte</u> Hypothese). *<u>Bemerkung:</u> Die Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art wäre umso größer, je näher die tatsächliche Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Sechs bei 10 % liegt.*		25	5
d)	Otto hat bei seinem Versuch also zu wenig (weniger als 16) Sechsen erhalten. Bei diesem Ausgang lässt sich über die interessierende Wahrscheinlichkeit für das einzelne Auftreten einer Sechs gar keine begründete Aussage machen, insbesondere ist aus dem Testergebnis die Aussage jetzt nicht zu begründen, dass der Zufallszahlen-Generator in Bezug auf das Auftreten der Sechs die Anforderungen erfüllt *(und zwar hauptsächlich deshalb nicht, weil sich keine Aussage über die Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art machen lässt (vgl. c)).*		15	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>
Otto sollte nun die Hypothese H_0: $p = 0{,}12$ gegen die Hypothese H_1: $p < 0{,}12$ linksseitig testen.
Die Anzahl X der Sechsen ist unter der Annahme H_0 annähernd normalverteilt mit $\mu = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.
Mit $n = 5000$ und $p = 0{,}12$ erhält man: $\mu = 600$ und $\sigma = \sqrt{528}$.
Die Zufallsvariable $N = \frac{X - 600 + 0{,}5}{\sqrt{528}}$ ist also (annähernd) standard-normal-verteilt.
Wir lösen mit Hilfe der Tabelle der Normalverteilung die Gleichung $P(N < -x) = 0{,}01$ bzw. $P(N < x) = 0{,}99$ und erhalten: $x \approx 2{,}33$.
Um eine Grenze m für den Ablehnungsbereich zu finden, lösen wir die Gleichung $\frac{m - 600 + 0{,}5}{\sqrt{528}} = -2{,}33$ Also $m \approx 545{,}96$.
Für $X \le 545$ gilt also mit absteigender Grenze zum ersten Mal:
$P(X \le 545) \le 0{,}01$.
Wenn weniger als 546 Sechsen vom Computer simuliert werden, sollte also die Hypothese H_0 verworfen werden.
Wenn jetzt keine Signifikanz vorliegt, wenn also mehr 545 Sechsen simuliert werden, könnte man das Ergebnis wieder unter der Perspektive von Aufgabenteil c) betrachten und fragen, ob denn jetzt die Hypothese H_0, dass der Zufallsgenerator exakt das tut, was versprochen wurde, verworfen werden kann.
Dies entspricht zwar nicht der „reinen Lehre“, aber gängiger Praxis.
Eigentlich sollte die Testplanung immer <u>vor</u> Durchführung der Stichprobenziehung erfolgen!
Die Anzahl Y der Sechsen ist unter der Annahme H_0 (aus Teil c)) wieder annähernd normal-verteilt mit $\mu = 500$ und $\sigma = \sqrt{450}$.
Mit einem Ablehnungsbereich $Y > 545$ kann die zugehörige Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art durch $P(Y > 545 \mid H_0)$ berechnet werden:
$P(Y > 545 \mid H_0) = P(N > \frac{545 - 500 + 0{,}5}{\sqrt{450}}) \approx P(N > 2{,}14)$
$= 1 - P(N \le 2{,}14) \approx 1 - 0{,}9838 \approx 1{,}6\,\%$.
Dieser Wert ist so klein, dass auch im Fall von mehr als 545 simulierten Sechsen mit Signifikanz (zumindest auf dem 5%-Niveau) behauptet werden kann, dass der Zufallsgenerator mit mehr als 10 % Wahrscheinlichkeit im Einzelexperiment eine Sechs liefert und insofern für Otto unbrauchbar ist.
</td><td></td><td>20</td><td>15</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>60</td><td>20</td></tr>
</table>

Stochastik 2

III.2 Fehlersuche

In der Reparaturabteilung einer großen Firma muss recht oft ein bestimmter defekter Gerätetyp wieder Instand gesetzt werden. Aus längerer Erfahrung ist bekannt, dass es nur 3 verschiedene Ursachenfelder gibt und dass ein Fehler im Bereich A mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 %, ein Fehler im Bereich B mit einer Wahrscheinlichkeit von 15 % und ein Fehler im Bereich C mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % auftritt. Mehr als ein Fehler an ein- und demselben Gerät tritt (so gut wie) nie auf. Wenn man also einen Fehler gefunden und behoben hat, funktioniert das Gerät wieder.

Die Kosten der Instandsetzung (Fehlersuche und Reparatur) entstehen fast ausschließlich durch die Arbeitszeit, die für die Fehlersuche aufgebracht werden muss. Das Suchen nach der Fehlerquelle muss für die 3 möglichen Ursachenfelder nacheinander erfolgen, wobei die Reihenfolge frei wählbar ist. Die Kosten sind bei jedem Bereich unabhängig davon, ob der Fehler tatsächlich in diesem Bereich liegt oder nicht, und betragen 100 € für Bereich A, 10 € für Bereich B und 5 € für Bereich C. Die Fehlersuche ist bei jedem möglichen Ursachenfeld so gut, dass ein Übersehen des Fehlers nicht vorkommt; allerdings muss der Fehler im jeweiligen Bereich genau lokalisiert werden. Wenn also 2 Bereiche erfolglos durchsucht sind, muss der 3. Bereich auch durchsucht werden.

a) Es werde zuerst in der Reihenfolge A-B-C nach dem Fehler gesucht.

   Berechnen Sie für jeden der drei Fehlerursachen die Kosten, die bei der Suche entstehen.

   Berechnen Sie dann den Erwartungswert der Kosten, die bei dieser Fehlersuche entstehen. Bedenken Sie dabei, dass nicht weitergesucht werden muss, wenn man einen Fehler gefunden und behoben hat.

b) Bestimmen Sie nun für jede der weiteren fünf möglichen Suchreihenfolgen die zu erwartenden Suchkosten und geben Sie die kostengünstigste Suchreihenfolge und den zugehörigen Erwartungswert an.

c) Begründen Sie durch eine Plausibilitätsbetrachtung, warum man bei der Fehlersuche nicht mit A beginnen sollte, obwohl die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fehler im Bereich A auftritt, doch bei weitem am größten ist.

Ein Mitarbeiter schlägt in Ergänzung des Verfahrens als ersten Schritt ein verkürztes Suchverfahren für den Bereich A vor, das nur noch 20 € kostet. Es findet allerdings nur die Hälfte der Fehler im Bereich A.
Wenn der Fehler in diesem ersten Schritt nicht gefunden wurde, dann soll mit dem bisherigen Verfahren in der Reihenfolge B-C-A weitergesucht werden.

d) Bestimmen Sie unter der Bedingung, dass bei der verkürzten Suche in A der Fehler nicht gefunden wird, die drei bedingten Wahrscheinlichkeiten dafür, dass der Fehler bei A, B oder C liegt.

e) Begründen Sie, dass das neue Verfahren sinnvoll ist.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Wenn der Fehler bei A liegt, wird nur der Bereich A durchsucht und es entstehen 100 € Kosten.
Wenn der Fehler bei B liegt, wird erst der Bereich A und dann nur noch der Bereich B durchsucht und es entstehen 110 € Kosten.
Wenn der Fehler bei C liegt, werden alle drei Bereiche durchsucht und es entstehen 115 € Kosten.
Da die Wahrscheinlichkeiten für diese drei Fälle bekannt sind, kann man den Erwartungswert K der Durchsuchungskosten ausrechnen:
$E(K) = 0{,}8 \cdot 100 + 0{,}15 \cdot 110 + 0{,}05 \cdot 115 = 102{,}25$.
Wenn man also in der Reihenfolge A-B-C durchsucht, betragen die erwarteten Kosten (Erwartungswert) 102,25 €.
<u>Bemerkung:</u> Man kann auch die Kosten nach den Bereichen trennen und als einzelne Zufallsvariable auffassen, die dann addiert werden.
Dann erhält man das gleiche Ergebnis auf folgende Weise:
$E(K) = 1 \cdot 100 + 0{,}2 \cdot 10 + 0{,}05 \cdot 5 = 102{,}25$.</td><td>20</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Für die 5 weiteren Reihenfolgen, erhält man entsprechen der Rechnung aus a) folgende Kostenerwartungswerte (in Euro):
ACB 100 + 0,2 · 5 + 0,15 · 10 = 102,50.
BAC 10 + 0,85 · 100+ 0,05 · 5 = 95,25.
BCA 10 + 0,85 · 5 + 0,8 · 100 = 94,25.
CAB 5 + 0,95 · 100 + 0,15 · 10 = 101,50.
CBA 5 + 0,95 · 10 + 0,8 · 100 = 94,50.
Die kostengünstigste Suchreihenfolge ist also BCA mit den erwarteten Kosten von 94,25 €.</td><td>5</td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Wenn man mit A beginnt, hat man zwar die größte Chance den Fehler im ersten Schritt zu finden, aber man hat auch mit Sicherheit die hohen Kosten von 100 €. Wenn man nicht mit A beginnt, kommt man in immerhin 20% der Fälle mit erheblich niedrigeren Kosten aus.
<u>Bemerkung:</u> Hier sind sehr unterschiedliche Argumentationen denkbar, aber das obige Kernargument muss erkennbar sein.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>
Es seien A, B und C die Ereignisse, dass der Fehler in dem entsprechenden Bereich liegt. N sei das Ereignis, in der Voruntersuchung den Fehler nicht zu finden.

Gesucht sind: $P(A|N)$, $P(B|N)$, $P(C|N)$.

<u>Lösung mit dem Satz von Bayes:</u> $P(A|N)=\frac{P(A)\cdot P(N|A)}{P(N)}=\frac{0{,}8\cdot 0{,}5}{0{,}6}=\frac{2}{3}$.

Wenn man den Wert von P(N) nicht sofort sieht, kann man den Nenner oben natürlich auch stur nach Bayes (bzw. dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit) wie folgt ausrechnen:

$P(N)=P(A)\cdot P(N|A)+P(B)\cdot P(N|B)+P(C)\cdot P(N|C)$
$=0{,}8\cdot 0{,}5+0{,}15\cdot 1+0{,}05\cdot 1=0{,}6$

Entsprechend erhält man:

$P(B|N)=\frac{P(B)\cdot P(N|B)}{P(N)}=\frac{0{,}15\cdot 1}{0{,}6}=\frac{1}{4}$

$P(C|N)=\frac{P(C)\cdot P(N|C)}{P(N)}=\frac{0{,}05}{0{,}6}=\frac{1}{12}$

<u>Lösung mit idealisierter Simulation:</u>

Wir führen gedanklich das ganze Zufallsexperiment z. B. 100-mal durch und verteilen die relativen Häufigkeiten exakt wie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

Von den 100 Geräten wird bei 40 der Fehler bereits in der Voruntersuchung gefunden und 60 durchlaufen die bisherige Untersuchung: P(N) = 0,6.

Da 80 der 100 Geräte den Fehler im Bereich A auf weisen, der bei 40 aber bereits in der Voruntersuchung entdeckt wurde, weisen noch 40 diese Fehlerart auf. Daher ist $P(A|N)=\frac{P(A\cap N)}{P(N)}=\frac{40}{60}=\frac{2}{3}$.

15 der Geräte weisen den Fehler im Bereich B und 5 im Bereich C auf, und somit gilt $P(B|N)=\frac{P(B)}{P(N)}=\frac{15}{60}=\frac{1}{4}$ und $P(C|N)=\frac{P(C)}{P(N)}=\frac{5}{60}=\frac{1}{12}$, denn Fehler in den Bereichen B und C werden .von der Voruntersuchung nicht erfasst.
</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>

<u>1. Lösungsweg:</u>

Es entstehen mit Sicherheit die Kosten der Voruntersuchung von 20 €.

Zusätzlich entstehen mit 60% Wahrscheinlichkeit, die Kosten der Hauptuntersuchung, für die wir den bedingten Erwartungswert einsetzen, d.h. für die einzelnen Fälle verwenden wir die in d) berechneten bedingten Wahrscheinlichkeiten.

Da die Untersuchungsreihenfolge B-C-A ist, gilt für die erwarteten Zusatzkosten entsprechend der Rechnungen in b) (in Euro):

$$E(Z) = 10 + \frac{3}{4} \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot 100 \approx 80,42 \,.$$

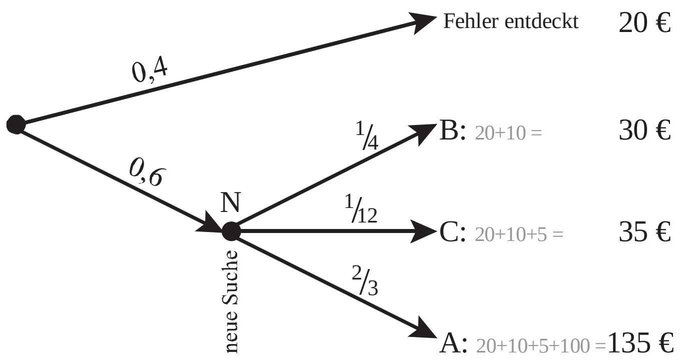
Insgesamt sind also Kosten von 68,25 € beim modifizierten Verfahren zu erwarten:

$$E(K) \approx 20 + 0,6 \cdot 80,42 \approx 68,25 \,.$$

Rechnet man hier mit dem exakten Wert von E(Z), so ergibt sich E(K) = 68,25.

<u>2. Lösungsweg:</u>

Wir betrachten das folgende Baumdiagramm:



Dann gilt: $E(K) = 0,4 \cdot 20 + 0,15 \cdot 30 + 0,05 \cdot 35 + 0,4 \cdot 135 = 68,25 \,.$

Die erwarteten Kosten sind also noch deutlich geringer als das in b) bestimmte Minimum.

</td><td></td><td></td><td>20</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>55</td><td>20</td></tr>
</table>