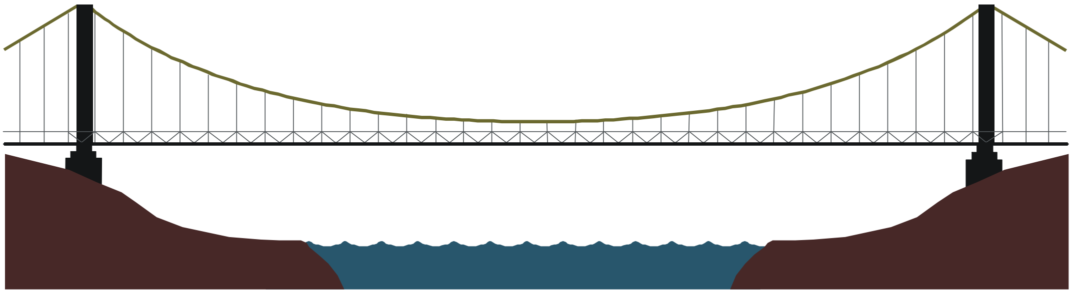
ANALYSIS 1

I.1 Hängebrücke



Eine Hängebrücke soll eine horizontale Spannweite von 200 m haben. Zwischen den beiden Aufhängepunkten $A_1(-100 \mid 30{,}7)$ und $A_2(100 \mid 30{,}7)$ wird ein Tragseil gespannt, das in der Mitte der Brücke seinen tiefsten Punkt in einer Höhe von 5 m haben soll. Die Linie des Seils folgt dem Graphen einer Kettenlinie k mit:

$$k(x) = \frac{c}{d}(e^{dx} + e^{-dx}),\ c, d \in \mathbb{R}^+.$$

Die Fahrbahn ist gerade und eben und wird durch die x-Achse beschrieben.

a) Berechnen Sie aus den Angaben die Parameter c und d der Funktion k.

Für die weiteren Aufgabenteile nutzen Sie in der Funktion k folgende Werte für die Parameter: $c = 0{,}0625$ und $d = 0{,}025$.

b) Bestätigen Sie, dass das Gefälle des Tragseils in den beiden Aufhängepunkten 75,6 % beträgt, und berechnen Sie die entsprechenden Neigungswinkel.

Die Funktion k lässt sich durch eine ganzrationale Funktion q vierten Grades annähern, für die gelten soll:

- An den Aufhängepunkten und am tiefsten Punkt stimmen die Funktionswerte überein.
- An den Aufhängepunkten stimmen k und q in ihren Steigungen (Neigungswinkeln) überein.

c) Ermitteln Sie aus diesen Bedingungen die Funktionsgleichung von q.
Berechnen Sie die Differenz der Funktionswerte von k und q bei $x = 50$.

Die Brücke soll durch Laserstrahlen interessant beleuchtet werden. Dazu soll eine Laser-Lichtquelle so am Tragseil angebracht werden, dass der Laserstrahl (ein Lichtbündel aus parallelen „Lichtstrahlen“) genau senkrecht zum Tragseil ausgesendet wird und genau den Fußpunkt $(100 \mid 0)$ des einen Stützpfeilers trifft.
Mit Hilfe der Näherungsfunktion q wurde errechnet, dass die Laser-Lichtquelle dann bei $x = 87{,}4$ am Trageseil angebracht werden müsste.

d) Da das Tragseil aber in Wirklichkeit der Funktion k folgt, trifft der Laserstrahl in x-Richtung die Fahrbahn etwas neben dem geplanten Punkt $(100 \mid 0)$. Bestimmen Sie diesen Unterschied dx.

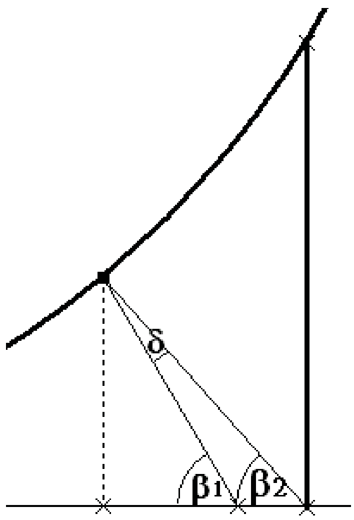
e) Der Laser müsste auf dem Seil also etwas verschoben werden. Geben Sie an, in welche Richtung und ob der Unterschied in horizontaler Richtung dem Betrage nach gleich, größer oder kleiner dx sein müsste. Begründen Sie Ihre Antwort.

Man könnte auch den Winkel des Laserstrahls um einen Winkel δ korrigieren. Bestimmen Sie die Winkelgröße von δ.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td><u>Einsetzen bekannter Punkte:</u>
$k(0)=5 \Rightarrow c=2,5\cdot d$
$k(100)=30,7 \Rightarrow 30,7=2,5(e^{100d}+e^{-100d})$
$\Leftrightarrow e^{100d}+e^{-100d}-12,28=0 \quad /\cdot e^{100d}$
$\Leftrightarrow \left(e^{100d}\right)^2-12,28\cdot e^{100d}+1=0$
$\Rightarrow e^{100d}\approx 6,14+6,06=12,20$
$\left(\vee e^{100d}\approx 6,14-6,06=0,08\text{, woraus } d<0 \text{ folgt, was nicht zugelassen ist}\right)$
$\Rightarrow d\approx 0,025$ und damit $c\approx 0,0625$.
Eine Substitution von $e^{100d}=u$ führt zum selben Ergebnis.
$k(x)=2,5\left(e^{0,025x}+e^{-0,025x}\right)$</td><td>20</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$k'(x)=2,5\cdot 0,025\cdot e^{0,025x}-2,5\cdot 0,025\cdot e^{-0,025x}$
$k'(x)=0,0625\left(e^{0,025x}-e^{-0,025x}\right)$
$k'(100)\approx 0,756$ und $k'(-100)\approx -0,756$
Das Gefälle in A_1 beträgt demnach 75,6 % ($\alpha_1\approx -37,1°$) und die Steigung in A_2 75,6 % ($\alpha_2\approx 37,1°$).</td><td>5</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td><u>Ermitteln der Funktionsgleichung von q:</u>
Aufgrund der Vorgaben handelt es sich um eine achsensymmetrische Funktion vierten Grades: $q(x)=a_4x^4+a_2x^2+a_0$.
$q(0)=5 \Rightarrow a_0=5$
$q(100)=30,7 \Rightarrow 30,7=10^8\cdot a_4+10^4\cdot a_2+5 \qquad \Rightarrow I \quad 25,7=10^8\cdot a_4+10^4\cdot a_2$
$q'(100)=0,756 \Rightarrow 0,756=4\cdot 10^6\cdot a_4+2\cdot 10^2\cdot a_2 \quad \Rightarrow II \ 37,8=2\cdot 10^8 a_4+10^4\cdot a_2$
$II-I: 12,1=10^8 a_4$
Damit gilt $a_4=1,21\cdot 10^{-7}$. Durch Einsetzen in I folgt $a_2=1,36\cdot 10^{-3}$.
Damit lautet die Gleichung $q(x)=1,21\cdot 10^{-7}x^4+1,36\cdot 10^{-3}x^2+5$.

<u>Differenz der Funktionswerte an der Stelle x =50:</u>
$k(50)\approx 9,442$
$q(50)\approx 9,156$
Die Differenz beträgt somit etwa 0,286 m.</td><td>5</td><td>20</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Man kann wie folgt vorgehen: An der Stelle $x = 87{,}4$ berechnet man die Steigung (Ableitung) von k und damit die Steigung des dazu senkrechten Laserstrahls: $-\frac{1}{k'(87{,}4)}$. <u>Geradengleichung des Laserstrahls und Bestimmung der Nullstelle:</u> $g(x) = k(87{,}4) - \frac{1}{k'(87{,}4)}(x - 87{,}4)$ $x_n = k(87{,}4) \cdot k'(87{,}4) + 87{,}4 \approx 99{,}75$ Der Unterschied beträgt also etwa 25 cm.		10	10
e)	Der Laserstrahl trifft also „etwas links“ vom gewünschten Fußpunkt des Pfeilers auf die Fahrbahn. Bewegt man den Laser auf dem Trageseil in x-Richtung (also „nach rechts“), wird er wegen der Krümmung des Trageseils auch etwas gegen den Uhrzeigersinn gedreht und damit wird der Auftreffpunkt zusätzlich in x-Richtung verschoben. Der Laser muss also zwar in x-Richtung („nach rechts“), aber (wegen der Drehung) weniger als 25 cm verschoben werden. Der Laserstrahl in unkorrigierter Lage hat die Steigung $-\frac{1}{k'(87{,}4)} \approx -1{,}823$, also bildet er mit der x-Achse den Winkel $\beta_1 = \arctan(1{,}823) \approx 61{,}25°$. Der korrigierte Laserstrahl müsste die Steigung der Verbindungsstrecke vom Punkt $(87{,}4 \mid k(87{,}4))$ zum Punkt $(100 \mid 0)$ haben, sie beträgt $-\frac{k(87{,}4)}{12{,}6} \approx -1{,}786$, also müsste er mit der x-Achse den Winkel $\beta_2 = \arctan(1{,}786) \approx 60{,}76°$ bilden. Wie man der anliegenden Skizze entnimmt, gilt für die Winkelkorrektur: $\delta = \beta_1 - \beta_2 \approx 0{,}5°$. Um diesen Winkel müsste der Laser in der gegebenen Ansicht gegen den Uhrzeigersinn gedreht werden.  		10	10
	Insgesamt 100 BWE	30	40	30

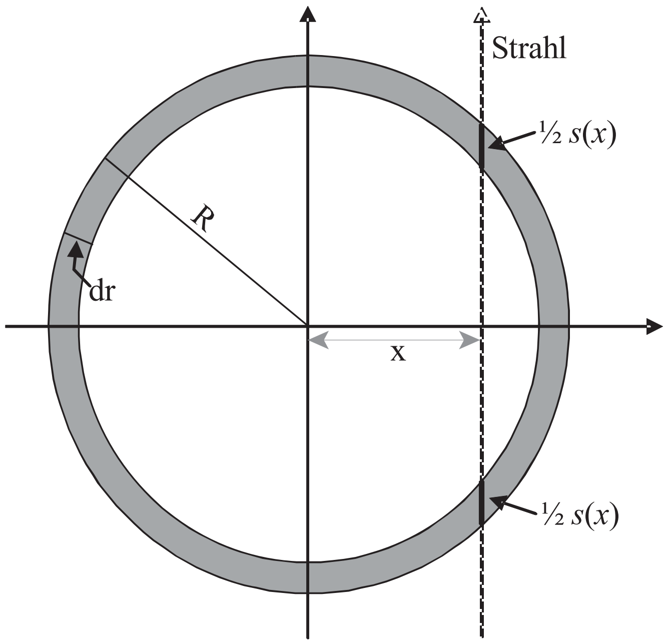
ANALYSIS 2

I.2 Hohlkugel

Eine Hohlkugel (Kugelschale) kann beschrieben werden durch ihren Radius R und ihre Schalendicke dr. Die Abbildung zeigt einen Querschnitt durch die Hohlkugel (grau dargestellt).

a) Berechnen Sie bei einer Hohlkugel mit $R = 10$ und $dr = 0{,}5$ das Volumen.
Berechnen Sie für $R = 2$ die Schalendicke, bei der das Volumen der Hohlkugel ein Zehntel des Volumens der Vollkugel beträgt.
Zeigen Sie, dass für dünne Kugelschalen (also wenn dr sehr klein gegenüber R ist) gilt:
$V \approx 4\pi \cdot R^2 \cdot dr$. (Hinweis: Multiplizieren Sie den Term $(R-dr)^3$ aus.)

Wenn man Präzisionswerkstücke in Form von Hohlkugeln herstellt, prüft man ihre Qualität, insbesondere, ob die Schalendicke konstant ist und ob sich im Material des Werkstücks Hohlräume gebildet haben. Dazu wird die Hohlkugel mit einem (im Querschnitt als punktförmig zu denkenden) Röntgenstrahl durchleuchtet, dessen Intensitätsverlust geeignet gedeutet werden muss. Dazu dient die in b) behandelte Funktion s.



In den folgenden Aufgabenteilen betrachten wir die Durchleuchtung einer Hohlkugel mit dem Radius R und der Schalendicke dr in einer Ebene, die den Mittelpunkt der Hohlkugel enthält. Für die mathematische Betrachtung ist es sinnvoll, den Kugelmittelpunkt im Koordinatenursprung zu befestigen. Der Strahl wird dann in x-Richtung verschoben

Die Funktion s gibt dabei die Länge der Strecke (die Schichtdicke) an, die der prüfende Röntgenstrahl <u>im Material der Kugelschale</u> zurücklegt.

b) Zeigen Sie – z.B. mit Hilfe von geometrischen Überlegungen an der Abbildung – , dass die Funktion s zusammengesetzt ist und folgende Teil-Funktionsgleichungen aufweist:

$$s(x) = \begin{cases} 0 & \textit{für} \;\; x \notin [-R, R] \\ 2(\sqrt{R^2 - x^2}) & \textit{für} \;\; |x| \in [R-dr, R[\\ 2\left(\sqrt{R^2 - x^2} - \sqrt{(R-dr)^2 - x^2}\right) & \textit{für} \;\; x \in \,]-R+dr, R-dr[\end{cases}$$

Geben Sie $s(0)$ an.
Begründen Sie, dass s bei $x = 0$ ein (lokales) Minimum aufweist.

c) Weisen Sie nach, dass bei $x = \pm(R-dr)$ die Teilgraphen von s aneinander stoßen und s dort Maxima aufweist. Bestimmen Sie diese Maxima.
Bei einer Hohlkugel mit $R = 2$ wurde die maximale Schichtdicke $s(x_m) = 1{,}25$ gemessen. Berechnen Sie die Schalendicke dr dieser Hohlkugel.

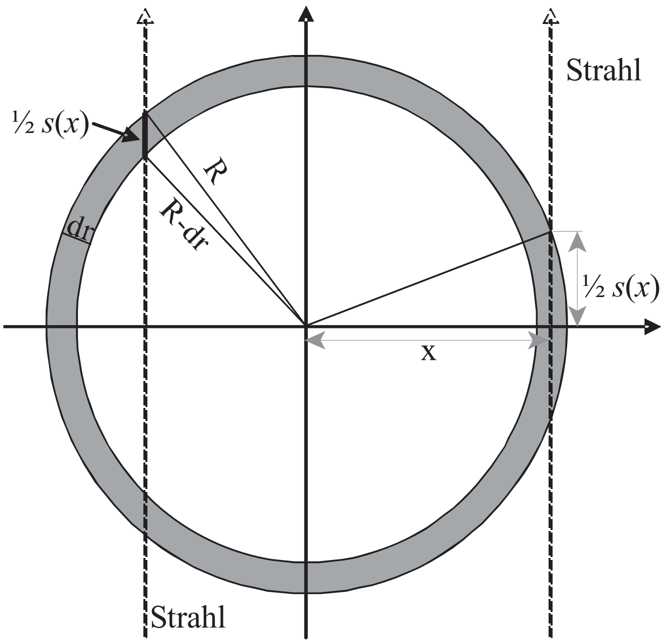
d) Die Funktion s beschreibt das (ideale) Werkmaterial der Hohlkugel. Man benötigt diese Funktion, um die Messung mit Röntgenstrahlen zu deuten, bei der die Stärke (Intensität) I des Strahls nach der Durchdringung des Werkstückes gemessen und mit der Anfangsintensität I_0 verglichen wird.
Beim Durchdringen von Materie verringert sich die Intensität des Strahls: es wird auf jedem Streckenstück ds der gleiche Anteil der Intensität des Strahls absorbiert.
Dieser Sachverhalt lässt sich in der Differentialgleichung $I'(s) = -\lambda \cdot I(s)$ ausdrücken.

Bestätigen Sie, dass die Funktion $I : I(s) = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot s}$ eine Lösung dieser Differentialgleichung ist.

Im betrachteten Fall der Werkstoffprüfung an der Hohlkugel würde die Intensität $I(x) = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot s(x)}$ in Abhängigkeit von x mit dem oben gegebenen $s(x)$ gemessen werden.

Begründen Sie, dass diese Messungen bei bekanntem λ eindeutig auf die durchstrahlte Schichtdicke $s(x)$ rückschließen lassen, und beurteilen Sie, woran nun ein Hohlraum im Werkstück erkannt wird.

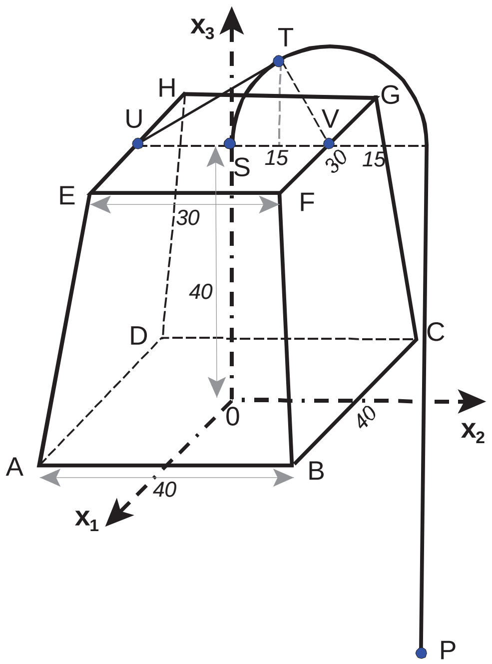
Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	• Das Volumen einer Hohlkugel lässt sich als Differenz zweier Kugelvolumina berechnen: $V_H = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(R^3 - (R-dr)^3\right)$. Einsetzen der Werte $R = 10$ und $dr = 0{,}5$ ergibt $V \approx 597{,}4$. • Hier ist $R = 2$ gegeben, und so ist die Gleichung $0{,}9 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (2-dr)^3$ zu lösen. Dies ergibt $dr = 2 - 2\cdot\sqrt[3]{0{,}9} \approx 0{,}0690$. • Es gilt $V_H = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(R^3 - (R-dr)^3\right) = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(3R^2 dr - 3R dr^2 + dr^3\right)$. Ausklammern von dr ergibt $V_H = \frac{4}{3}\pi \cdot dr \cdot \left(3R^2 - 3Rdr + dr^2\right)$. Im Fall $dr \ll R$ sind die beiden hinteren Terme in der Klammer klein gegenüber dem ersten. Es ergibt sich $V \approx 4\pi \cdot R^2 \cdot dr$	15	10	
b)	<u>Begründung der stückweisen Definition</u> Da im Außenbereich keinerlei Material durchdrungen wird, ist dort $s(x) = 0$. In dem Bereich, in dem der Strahl nur durch die Hohlkugel läuft (rechter Strahl in der Abbildung), ist unter Verwendung des Satzes des Pythagoras $s(x) = 2(\sqrt{R^2 - x^2})$.  In dem Bereich schließlich, in dem der Strahl zwei Abschnitte der Hohlkugel durchdringt und zwischendurch das Innere der Hohlkugel durchläuft (linker Strahl in der Abbildung), muss der Weg durch das Innere abgezogen werden. Es ergibt sich $s(x) = 2(\sqrt{R^2 - x^2} - \sqrt{(R-dr)^2 - x^2})$. Daraus folgt $s(0) = 2 \cdot dr$.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td><u>Begründung des Minimums bei $x = 0$</u>
Diese Begründung kann z.B. geometrisch erfolgen: Jede Verschiebung des Strahls aus der Position $x = 0$ verlängert infolge der Projektion von dr die Wegstücke.
Ebenso kann die Betrachtung der Ableitung argumentiert werden:
$s'(x) = 2x\left(-\frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{(r-dr)^2 - x^2}}\right)$ hat bei $x = 0$ eine steigende Durchgangsnullstelle und damit ein Minimum.</td><td>5</td><td>20</td><td>5</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Die Funktion s ist – aufgrund der durch $s(x)$ beschriebenen Situation – gerade. Es reicht also die Betrachtung an der Stelle $x = R - dr$; diese Stelle gehört als Rand zum zweiten Teil der Funktionsstücke. Der Funktionswert ist damit
$s(R - dr) = 2\sqrt{2Rdr - dr^2}$.
Sieht man die Stelle $x = R - dr$ als rechten Rand des dritten, „inneren“ Teils der Definition von s (mathematisch: Setzt man diesen Teil mit $x = R - dr$ fort), so erhält man auch $s(R - dr) = 2\sqrt{2Rdr - dr^2}$. Die beiden Teilgraphen von s stoßen also sprungfrei aneinander.
Unmittelbar ersichtlich ist aber, dass s im „inneren“ Teil monoton wächst und im „äußeren“ Teil monoton abnimmt. An der Stelle $x = R - dr$ muss also ein Maximum vorliegen.
Der Ausdruck $1{,}25 = 2\sqrt{2 \cdot 2 \cdot dr - dr^2}$ ist eine quadratische Gleichung in dr und hat im Bereich $0 \le dr \le 2$ nur die Lösung $dr \approx 0{,}1002$.</td><td>5</td><td>15</td><td>5</td></tr>
<tr><td>d)</td><td><u>Bestätigung der Differentialgleichung:</u>
Mit $I(s) = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot s}$ ist $I'(s) = -\lambda \cdot I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot s} = -\lambda \cdot I(s)$, wie gefordert.
<u>Begründung zum Rückschluss auf die Schichtdicke:</u>
Bei $I(x) = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot s(x)}$ ist $s(x) = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{I(x)}{I_0}\right) = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{I_0}{I(x)}\right)$. Da der Logarithmus streng monoton steigt, liefern verschiedene Intensitätswerte mit Sicherheit verschiedene $s(x)$-Werte.
<u>Beurteilung, woran Hohlraum erkennbar:</u>
Der Intensitätsverlust ist geringer als erwartet, wenn der Röntgenstrahl durch einen Hohlraum geht. Sei I_{normal} die erwartet Intensität, dann ist die gemessene Intensität I_{gemessen} im Falle eines Hohlraumes größer als I_{normal} und damit der Bruch $\frac{I_0}{I_{gemessen}} < \frac{I_0}{I_{normal}}$. Also ist wegen der oben erwähnten Monotonie die Schichtdicke geringer als normal.
(λ ist wegen des Sachkontextes der Aufgabe positiv.)</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>55</td><td>20</td></tr>
</table>

LA/AG 1

II.1 Tischlampe



Der Lampenschirm einer Tischlampe hat die Form eines senkrechten Pyramidenstumpfs mit quadratischer Grund- und Deckfläche. Die Aufhängung besteht aus einer Stange, deren oberes Ende zu einem Halbkreis mit dem Radius 15 cm gebogen ist.
Ein kartesisches Koordinatensystem hat seinen Ursprung *O* im Mittelpunkt der Grundfläche *ABCD*. Die x_1-Achse ist parallel zu der Kante *CB*, die x_2-Achse parallel zu der Kante *AB*. Die x_3-Achse geht durch den Mittelpunkt *S* der Deckfläche *EFGH*.
Der zur x_3-Achse parallele Stangenteil trifft im Punkt $P(\,0\mid 30\mid -40\,)$ die zur x_1-x_2-Ebene parallele Tischplatte. Die Tischplatte ist ein Spiegel.

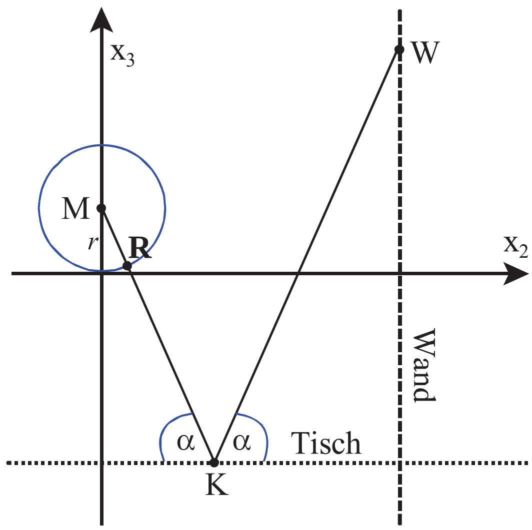
a) Berechnen Sie eine Koordinatengleichung für die Ebene, in der die Seitenfläche *AEHD* liegt.
Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Grundfläche und einer Seitenfläche, also den Neigungswinkel der Seitenflächen.

b) Die zur Beleuchtung verwendete Glühlampe befindet sich in der Höhe *r* auf der x_3-Achse im Mittelpunkt einer Glaskugel, welche die Grundebene *ABCD* berührt. Der Abstand des Kugelmittelpunktes $M(\,0\mid 0\mid r\,)$ von den Seitenflächen ist 1 cm größer als der Radius der Kugel.
Bestimmen Sie den Kugelradius auf 2 Dezimalen genau. *(Zur Kontrolle:* $r \approx 16{,}77$ *.)*

Hinweis: Bringen Sie Ihre Ebenengleichung $ax_1+bx_2+cx_3=k$ *in die Form* $\dfrac{ax_1+bx_2+cx_3-k}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=0$.

Der Abstand d eines Punktes $P(p_1\mid p_2\mid p_3)$ *von dieser Ebene ist der Zahlenwert, den man dann durch Einsetzen der Koordinaten des Punktes P in den Bruchterm (linke Seite) der Ebenengleichung erhält (hier in cm).*

c) Die Lampe steht neben einer Wand. Diese Wand ist parallel zur x_1-x_3-Ebene, sie hat die Koordinatengleichung $x_2=50$.
Die Glühlampe wird als punktförmig gedacht. Auf der Glaskugel befindet sich ein roter Punkt *R*; der Lichtstrahl von *M* durch *R* trifft die Tischplatte im Punkt $K(\,0\mid 20\mid -40\,)$. Der Lichtstrahl wird am Tisch gespiegelt, der gespiegelte Strahl trifft im Punkt *W* auf die Wand. Die Abbildung rechts zeigt die Situation in der x_2-x_3-Ebene.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes *W*.



d) Zur Stabilisierung ist der Mittelpunkt *U* der Kante *EH* durch einen Stab tangential mit der halbkreisförmigen Aufhängung verbunden (siehe Abbildung ganz oben).
Ermitteln Sie die Länge des Stabes und die Koordinaten des Berührpunktes *T*.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Ebene: Mit $A = (20 \mid -20 \mid 0)$, $D = (-20 \mid -20 \mid 0)$ und $E = (15 \mid -15 \mid 40)$ gilt: $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 40 \end{pmatrix}$. $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sei der Normalenvektor zu $\overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{AE}$. Die Skalarprodukte von $\vec{n}$ mit $\overrightarrow{AD}$ bzw. $\overrightarrow{AE}$ liefern die folgenden Gleichungen: $-40a = 0 \quad \Rightarrow a = 0$ $-5a + 5b + 40c = 0$. Einsetzen von $c = -1$ ergibt $b = 8$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$. Damit folgt für die Gleichung der Ebene: $8x_2 - x_3 - k = 0$. Werden die Koordinaten des Punktes $A(20 \mid -20 \mid 0)$ in diese Gleichung eingesetzt, so ergibt sich für k der Wert -160, denn $-160 - 0 - k = 0$. Die Gleichung der Ebene lautet damit: $8x_2 - x_3 + 160 = 0$. Winkel β zwischen einer Seitenfläche und der x_1-x_2-Ebene: Dieser Winkel lässt sich z.B. durch einfache trigonometrische Überlegungen ermitteln. $\tan\beta = \frac{40}{20-15} = \frac{40}{5} = 8 \Rightarrow \beta = 82{,}87°$.	20	10	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>b)</td><td>

Die Seitenfläche AEHD liegt in der durch die Gleichung $8x_2 - x_3 + 160 = 0$ gegebenen Ebene. In der in der Aufgabenstellung angegebenen Form (Hessesche Normalenform) lautet diese Gleichung

$$\frac{8x_2 - x_3 + 160}{\sqrt{65}} = 0.$$

Setzt man die Koordinaten des Punktes $M(0|0|r)$ in die Hessesche Normalenform ein, so folgt für den Abstand d:

$$d = \frac{-r + 160}{\sqrt{65}}.$$

Mit $d = r + 1$ folgt

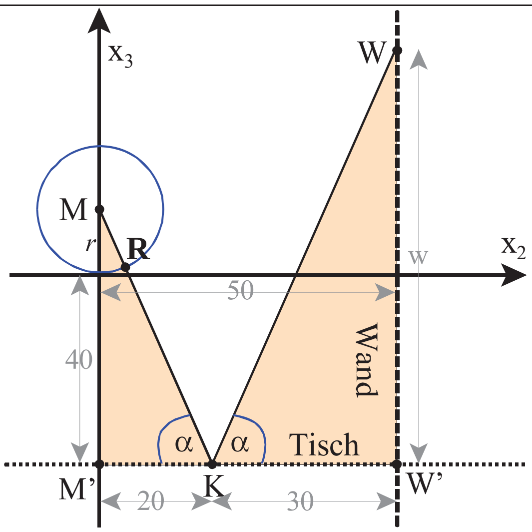
$$\frac{-r + 160}{\sqrt{65}} = r + 1 \mid \cdot \sqrt{65}$$

$$-r + 160 = \sqrt{65} \cdot r + \sqrt{65}$$

$$160 - \sqrt{65} = r \cdot (\sqrt{65} + 1)$$

$$r = \frac{160 - \sqrt{65}}{\sqrt{65} + 1} \approx 16{,}77\,[cm].$$

</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>



Werden die Punkte M und W auf die Tischebene heruntergelotet, so ergeben sich die Punkte M' und W'.

$(MM'K)$ und $(WW'K)$ sind dann zwei ähnliche rechtwinklige Dreiecke.

Sei $w = \overline{WW'}$, dann folgt wegen der Gleichheit der Winkel in K:

$$\frac{w}{30} = \frac{40 + r}{20}$$

$$w = \frac{40 + r}{20} \cdot 30.$$

Mit $r = \dfrac{160 - \sqrt{65}}{\sqrt{65} + 1}$ folgt $w \approx 85{,}15$ (mit $r = 16{,}77$ folgt $w \approx 85{,}16$).

Damit gilt: $W(0\,|\,50\,|\,45{,}15)$. Bei der Berechnung der x_3-Koordinate des Punktes W ist nämlich der Abstand 40 zwischen Tisch und x_1-x_2-Ebene zu subtrahieren.

(Skizze nicht verlangt)

</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Länge des Stabes Die Punkte T, U und V (V liegt dem Punkt U gegenüber auf der anderen Seite der Deckfläche) bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit den folgenden Seitenlängen: $\left\|\overline{UV}\right\| = 30, \left\|\overline{VT}\right\| = 15, \left\|\overline{UT}\right\| = l$ (=Länge des Stabes). Der Satz des Pythagoras liefert $l^2 + 15^2 = 30^2$ und damit $l \approx 25{,}98$ [cm]. Koordinaten des Berührpunktes T L sei der Fußpunkt des Lotes von T auf die Hypotenuse $\overline{UV}$, γ sei der Winkel zwischen $\overline{UV}$ und $\overline{UT}$. Im Dreieck (UVT) gilt: $\sin\gamma = \frac{15}{30} = 0{,}5 \Rightarrow \gamma = 30°$. Im Dreieck (ULT) gilt: $\sin\gamma = \frac{\overline{LT}}{l}$, also $\overline{LT} = l \cdot \sin\gamma = \frac{l}{2} \Rightarrow \overline{LT} \approx 12{,}99[cm]$. Damit lässt sich die x_3-Koordinate des Punktes T berechnen: $40 + 12{,}99 = 52{,}99$. Zur Berechnung der x_2-Koordinate wird die Länge von $\overline{UL}$ benötigt. $\overline{UL}^2 + \overline{LT}^2 = l^2$ $\overline{UL}^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3}{4} \cdot 675$ $\overline{UL} = 22{,}5[cm]$. Die x_2 − Koordinate beträgt somit $22{,}5 - 15 = 7{,}5$. Insgesamt folgt: $T(0\|7{,}5\|52{,}99)$. *Diese Koordinaten lassen sich auch über den Kathetensatz berechnen.* $15^2 = 30 \cdot \overline{LV} \Rightarrow \overline{LV} = 7{,}5[cm]$. $\overline{LT}^2 + \overline{LV}^2 = 15^2$ $\overline{LT}^2 = 15^2 - 7{,}5^2 = 168{,}75 \Rightarrow \overline{LT} \approx 12{,}99$ [cm].		10	20
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

LA/AG 2

II.2 Steuergeräte

Die Unternehmung Global Electronics benötigt zur Fertigung ihrer Mikroprozessoren M_1, M_2, M_3 und M_4 die Rohstoffe R_1, R_2 und R_3. Die pro Mikroprozessor erforderlichen Mengeneinheiten an Rohstoffen ergeben sich aus der untenstehenden Tabelle:

$R \rightarrow M$	M_1	M_2	M_3	M_4
R_1	2	2	3	0
R_2	4	2	0	2
R_3	2	4	5	0

Das Unternehmen stellt aus den Mikroprozessoren die Steuergeräte S_1, S_2 und S_3 her. Die Anzahl der pro Steuergerät benötigten Mikroprozessoren entnimmt man der untenstehenden Tabelle:

$M \rightarrow S$	S_1	S_2	S_3
M_1	2	2	1
M_2	3	1	2
M_3	4	0	2
M_4	3	3	0

Die Kosten für jeweils 1 ME der Rohstoffe betragen für R_1 4,5 GE, für R_2 2,4 GE und für R_3 8,5 GE.

a) Berechnen Sie, wie viele Mengeneinheiten der verschiedenen Rohstoffe für die Herstellung von jeweils einem Steuergerätetyp erforderlich sind und geben Sie die Rohstoffkosten für jeden Steuergerätetyp an.
Berechnen Sie die Gesamtrohstoffkosten für einen Auftrag über 350 Steuergeräte S_1, 600 Geräte S_2 und 200 Geräte S_3.

b) Bestimmen Sie, wie viele Steuergeräte der einzelnen Typen aus 9300 ME von R_1, 11800 ME von R_2 und 14600 ME von R_3 hergestellt werden können.

c) Von dem Rohstoff R_3, der nur in begrenzter Menge vorhanden ist, stehen 288 000 ME zur Verfügung. Im Hauptlager befinden sich vom Rohstoff R_2 38 000 ME mehr als von R_1.
Aus produktionstechnischen Gründen ist es sinnvoller, von dem Steuergerät S_3 immer nur die Hälfte der Stückzahl von S_2 zu produzieren.
Bestimmen Sie, wie viele Steuergeräte unter den dargestellten Bedingungen maximal produziert werden können und welche Rohstoffmengen R_1 und R_2 dazu erforderlich sind.

d) Das Unternehmen hat für die drei Steuergeräte S_1, S_2 und S_3 folgende Kosten- und Preiszusammenhänge ermittelt. Dabei stehen

k für die variablen Stückkosten (Produktionskosten pro Stück ohne Berücksichtigung der Fixkosten) in GE/ME,

p für die Preis-/Absatzfunktion in GE/ME

jeweils in Abhängigkeit von der produzierten und abgesetzten Stückzahl x:

S_1	S_2	S_3
$k_1(x)=0{,}001x^2-0{,}3x+30$	$k_2(x)=0{,}002x^2-0{,}6x+90$	$k_3(x)=0{,}0004x^2-0{,}08x+20$
$p_1(x)=-0{,}2x+80$	$p_2(x)=-0{,}5x+150$	$p_3(x)=-0{,}2x+96$

Für eine Produktionsserie sind Fixkosten von 8000 GE veranschlagt. Nach einer Marktanalyse ergeben sich die Absatzzahlen für die drei Steuergeräte S_1, S_2 und S_3 im Verhältnis 4:1:3.
Bestimmen Sie die Gleichungen der Gesamtkosten-, der Gesamterlös- und der Gesamtgewinnfunktion.
Ermitteln Sie anschließend, für welche Produktionsmengen von S_1, S_2 und S_3 (auf ganze ME gerundet) der Gesamtgewinn maximal wird und berechnen Sie diesen.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III

a) ME an Rohstoffen für die einzelnen Gerätetypen

$$A_{RS} = A_{RM} \cdot A_{MS} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 6 & 12 \\ 20 & 16 & 8 \\ 36 & 8 & 20 \end{pmatrix}$$

Das bedeutet folgenden Verbrauch von Rohstoffen:

$R \to S$	S_1	S_2	S_3
R_1	22	6	12
R_2	20	16	8
R_3	36	8	20

Rohstoffkosten für jedes Gerät:
S_1: (4,5|2,4|8,5) (22|20|36) = 453
S_2: (4,5|2,4|8,5) (6|16|8) = 133,4
S_3: (4,5|2,4|8,5) (12|8|20) = 243,2.

Gesamtrohstoffkosten für den Auftrag:
$453 \cdot 350 + 133{,}4 \cdot 600 + 243{,}2 \cdot 200 = 287\,230$.
Die Gesamtrohstoffkosten betragen 287 230 GE.

Bewertung: I: 25

b) $\vec{x}_R$ sei der Rohstoffvektor (9300|11800|14600), gesucht ist der damit produzierbare Steuergerätevektor $\vec{x}_S$, der sich als Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 22 & 6 & 12 & 9300 \\ 20 & 16 & 8 & 11800 \\ 36 & 8 & 20 & 14600 \end{array}\right) \xrightarrow[II:4 \text{ und } III:4]{I:2} \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 3 & 6 & 4650 \\ 5 & 4 & 2 & 2950 \\ 9 & 2 & 5 & 3650 \end{array}\right) \xrightarrow[2\cdot III - II]{3\cdot III - 2\cdot I}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 3 & 6 & 4650 \\ 5 & 0 & 3 & 1650 \\ 13 & 0 & 8 & 4350 \end{array}\right) \xrightarrow[3\cdot III - 8\cdot II]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 3 & 6 & 4650 \\ 5 & 0 & 3 & 1650 \\ -1 & 0 & 0 & -150 \end{array}\right) \Rightarrow x_{S_1} = 150 .$$

Eingesetzt in II folgt $3 \cdot x_{S_3} = 900$, also $x_{S_3} = 300$.

Beide Lösungen in I: $1650 + 3x_{S_2} + 1800 = 4650 \Rightarrow 3x_{S_2} = 1200$, also $x_{S_2} = 400$.

Es können 150 Stück S_1, 400 Stück S_2 und 300 Stück S_3 hergestellt werden.

Bewertung: II: 25

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>c)</td><td>

Grundlage dieser Teilaufgabe ist das lineare Gleichungssystem von b):

Festlegung der Bedingungen: $r_2 = r_1 + 38000$, $r_3 = 288000$ und $s_3 = \frac{1}{2} s_2$.

Eingesetzt in $\vec{x}_R = A_{RS} \cdot \vec{x}_S$ folgt:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_1 + 38000 \\ 288000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 6 & 12 \\ 20 & 16 & 8 \\ 36 & 8 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \frac{1}{2} s_2 \end{pmatrix}$$. Umgeformt ergibt sich:

$$\begin{array}{llcl} 22s_1 + 6s_2 + 6s_2 = r_1 & & 22s_1 + 12s_2 - r_1 & = 0 \\ 20s_1 + 16s_2 + 4s_2 = r_1 + 38000 & \Rightarrow & 20s_1 + 20s_2 - r_1 & = 38000 \\ 36s_1 + 8s_2 + 10s_2 = 288000 & & 36s_1 + 18s_2 & = 288000 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 22 & 12 & -1 & 0 \\ 20 & 20 & -1 & 38000 \\ 36 & 18 & 0 & 288000 \end{array}\right) \xrightarrow{II-I} \left(\begin{array}{ccc|c} 22 & 12 & -1 & 0 \\ -2 & 8 & 0 & 38000 \\ 36 & 18 & 0 & 288000 \end{array}\right) \xrightarrow[III+18\cdot II]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 22 & 12 & -1 & 0 \\ -2 & 8 & 0 & 38000 \\ 0 & 162 & 0 & 972000 \end{array}\right) \Rightarrow s_2 = 6000$$ eingesetzt in II folgt $s_1 = 5000$.

Mit I ergibt sich 110 000 + 72 000 $-r_1 = 0$, also $r_1 = 182\,000$.

Es können daher maximal 5 000 Steuergeräte S_1, 6 000 Steuergeräte S_2 und 3 000 Steuergeräte S_3 produziert werden.
Dazu sind 182 000 ME des Rohstoffes R_1 und 220 000 ME des Rohstoffes R_2 erforderlich.

</td><td></td><td>15</td><td>10</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>

Sei t die Absatzzahl für S_2, so erhält man den Absatzvektor $(4t \mid t \mid 3t)$.
Die Gesamtkostenfunktion K erhält man aus:
$K(t) = (4t \mid t \mid 3t) \cdot (k_1(t) \mid k_2(t) \mid k_3(t)) + 8000$,
zusammengefasst $K(t) = 0{,}0072t^3 - 2{,}04t^2 + 270t + 8\,000$.

Analog erhält man für den Gesamterlös $E(t)$:
$E(t) = (4t \mid t \mid 3t) \cdot (p_1(t) \mid p_2(t) \mid p_3(t)) = -1{,}9t^2 + 758t$
(beides kann auch ohne Vektor-Schreibweise gelöst werden)

$\Rightarrow$ Gesamtgewinn G: $G(t) = E(t) - K(t) = -0{,}0072t^3 + 0{,}14t^2 + 488t - 8\,000$.

Maximaler Gewinn: $G'(t) = 0 \Leftrightarrow -0{,}0216t^2 + 0{,}28t + 488 = 0$
$\Rightarrow \quad t_1 = 156{,}93 \approx 157$ und $G''(t_1) < 0$, denn $G''(t) = -0{,}0432t + 0{,}28$, damit ist der Gewinn bei t_1 maximal, denn bei einem Polynom 3. Grades gibt es nur höchstens ein Maximum.

Der Gewinn ist maximal bei folgendem Absatz:
628 Steuergeräte S_1, 157 Steuergeräte S_2, 471 Steuergeräte S_3.
Der maximale Gewinn beträgt etwa 44203,63 GE.

</td><td></td><td>15</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>55</td><td>20</td></tr>
</table>

STOCHASTIK 1

III.1 Befragung

Bei Befragungen zu peinlichen Themen werden die Ergebnisse dadurch verfälscht, dass viele Befragte nicht die Wahrheit sagen mögen. Damit der Befragte sicher sein kann, dass man aus seiner Antwort keine Rückschlüsse auf ihn als Einzelperson ziehen kann, hat es sich bewährt, die Antworten zu „verrauschen“, d.h. ein Zufalls-Experiment vorzuschalten. Durch das Ergebnis des Experiments, das vom Fragenden nicht eingesehen werden kann, wird festgelegt, ob eine Ja-Nein-Frage richtig und ehrlich oder bewusst falsch beantwortet werden soll.

Das Zufalls-Experiment sei zunächst das Ziehen aus einer Urne mit 10 schwarzen und 6 weißen Kugeln.
Im Falle einer schwarzen Kugel, soll die folgende Frage ehrlich beantwortet werden:

Haben Sie in der letzten Klausur getäuscht?

In einigen pädagogischen Veröffentlichungen wird behauptet, dass 10 % aller Schüler bei Klausuren täuschen. Gehen Sie in den folgenden Aufgaben von dieser Täuschungswahrscheinlichkeit aus. Nehmen Sie auch an, dass bei den hier betrachteten Schülergruppen, die Anzahl der Schüler, die täuschen, stets klar definiert und binomialverteilt ist.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiger Schüler mit „Ja“ antwortet.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler, der mit „Ja“ geantwortet hat, in der letzten Klausur getäuscht hat.

125 Schüler sollen befragt werden:
Bestimmen Sie die im Mittel zu erwartende Anzahl der Schüler, die mit „Ja“ antworten.

b) Demgegenüber meint ein Lehrer, viele seiner 125 Schüler von der besonderen „Verwerflichkeit“ und Unfairness des Täuschens bei Klausuren überzeugt zu haben. Er will deshalb zum Beleg alle seine Schüler nach dem obigen Verfahren befragen. Maßstab sind für ihn die genannten Veröffentlichungen.
Begründen Sie zunächst, dass die Wahrscheinlichkeit p_2, dass ein Schüler bzw. eine Schülerin „Ja“ sagt, als Funktion der tatsächlichen Täuschungswahrscheinlichkeit p_1 streng monoton wächst.
Bestimmen Sie einen Hypothesentest auf dem 5 %-Niveau, mit dem gegebenenfalls belegt werden kann, dass der Lehrer erfolgreich war.

In der Regel ist der Anteil p_1 der täuschenden Schüler nicht bekannt. Mit Hilfe der oben beschriebenen Befragung will man letztlich auch diesen Anteil der täuschenden Schüler bestimmen bzw. schätzen.

c) Es soll nun untersucht werden, welchen Einfluss der Bruchteil s der schwarzen an allen Kugeln im vorgeschalteten Bernoulli-Experiment im Hinblick auf dieses Ziel hat.

Leiten Sie eine Formel her, mit der Sie die Wahrscheinlichkeit p_1 der täuschenden Schüler berechnen können, wenn die Wahrscheinlichkeit p_2 der mit „Ja“ antwortenden Schüler und der Bruchteil s der schwarzen Kugeln bekannt sind.

(Kontrollergebnis: $p_1 = \dfrac{s + p_2 - 1}{2s - 1}$, falls $s \neq \dfrac{1}{2}$)

Interpretieren Sie, welche Werte für s bei diesem Verfahren besonders gut geeignet, welche schlecht oder gar nicht geeignet sind. Untersuchen Sie auch die Fälle $s = 0$, $s = 0{,}5$ und $s = 1$.

d) Ein gegenüber allen Befragungen sehr kritischer Schüler möchte den Lehrer bei der Befragung in trügerischem Optimismus wiegen.
Ermitteln Sie eine Antwortstrategie, mit welcher dieser Schüler sein Ziel erreichen kann, wenn er weiß, dass gilt: $s = 0{,}2$.

Anlage zur Aufgabe „Befragung“

Auszug aus einer Tabelle akkumulierter Binomialverteilungen

$$F(n,p,k) = \sum_{i=1}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{(n-i)}$$

					p			
n	k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
	35	1,0000	0,9882	0,3523	0,0035	0,0000	0,0000	0,0000
	36	1,0000	0,9932	0,4276	0,0061	0,0000	0,0000	0,0000
	37	1,0000	0,9962	0,5052	0,0103	0,0000	0,0000	0,0000
	38	1,0000	0,9980	0,5822	0,0167	0,0000	0,0000	0,0000
	39	1,0000	0,9990	0,6559	0,0263	0,0000	0,0000	0,0000
125	40	1,0000	0,9995	0,7237	0,0401	0,0000	0,0000	0,0000
	41	1,0000	0,9997	0,7840	0,0591	0,0001	0,0000	0,0000
	42	1,0000	0,9999	0,8356	0,0845	0,0002	0,0000	0,0000
	43	1,0000	0,9999	0,8784	0,1171	0,0003	0,0000	0,0000
	44	1,0000	1,0000	0,9125	0,1576	0,0006	0,0000	0,0000
	45	1,0000	1,0000	0,9389	0,2063	0,0011	0,0000	0,0000
	46	1,0000	1,0000	0,9585	0,2627	0,0020	0,0000	0,0000
	47	1,0000	1,0000	0,9726	0,3259	0,0035	0,0000	0,0000
	48	1,0000	1,0000	0,9825	0,3943	0,0060	0,0000	0,0000
	49	1,0000	1,0000	0,9891	0,4661	0,0098	0,0000	0,0000
	50	1,0000	1,0000	0,9934	0,5387	0,0157	0,0000	0,0000
	51	1,0000	1,0000	0,9962	0,6100	0,0243	0,0000	0,0000
	52	1,0000	1,0000	0,9978	0,6776	0,0366	0,0000	0,0000
	53	1,0000	1,0000	0,9988	0,7397	0,0535	0,0001	0,0000
	54	1,0000	1,0000	0,9994	0,7949	0,0761	0,0001	0,0000
	55	1,0000	1,0000	0,9997	0,8424	0,1052	0,0002	0,0000

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Man kann den Vorgang auf zwei Weisen als Stufenexperiment auffassen. Zuerst wird die Kugel gezogen, und dann festgestellt ob der oder die Schülerin täuscht oder auch umgekehrt, zuerst wird stellt sich heraus, ob der Schüler täuscht und dann wird die Kugel gezogen. - *P(Die Antwort lautet „Ja“)* $=\frac{10}{16}\cdot\frac{1}{10}+\frac{6}{16}\cdot\frac{9}{10}=\frac{2}{5}=40\%$ - *P(Schüler täuscht | Die Antwort lautet „ja“)* $=\frac{P(\text{Schüler täuscht})\cdot P(\text{Schüler sagt "ja"} \mid \text{Schüler täuscht})}{P(\text{Schüler sagt "ja"})}$ $=\frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{10}{16}}{\frac{4}{10}}=\frac{5}{32}\approx 15{,}6\%$. Es ist ein Erwartungswert einer Binomialverteilung zu bestimmen mit $n = 125$ und $p = 0{,}4$. Also $E = n\cdot p = 50$. Also sind im Mittel 50 SchülerInnen zu erwarten, die mit „ja“ antworten.	20	10	
b)	Wenn p_1 die tatsächliche Täuschungswahrscheinlichkeit für die SchülerInnen einer Schülergruppe ist, so gilt für einen zufällig ausgewählten Schüler (vgl. a)): $P(\text{Schüler sagt "ja"}) = p_2(p_1)=\frac{10}{16}\cdot p_1+\frac{6}{16}\cdot(1-p_1)=\frac{1}{4}p_1+\frac{3}{8}$ Das ist eine lineare Funktion von p_1 mit positiver Steigung, also eine streng monoton steigende Funktion. Es werden in der Befragungsgruppe 50 „Ja-Antworten“ erwartet. Deutlich weniger, sprechen für den Erfolg der Pädagogik des Lehrers. <u>Herleitung eines einseitigen Hypothesentest:</u> Wir setzen als Nullhypothese $H_0: p_2 \geq 0{,}4$ und deshalb $H_1: p_2 < 0{,}4$ Es sei X die Anzahl der „Ja-Antworten“, X ist n-p_2.-binomialverteilt. Kleine Werte von X sprechen für H_1. Wann sollte H_0 abgelehnt werden? Unter der Annahme dass $p_2 = 0{,}4$ entnehmen wir der anliegenden Tabelle: $P(X \leq 40) \approx 4{,}0\ \%$ und $P(X \leq 41) \approx 5{,}9\ \%$. Wenn man also als Ablehnungsbereich für die Nullhypothese alle Werte von X wählt, die kleiner als 41 sind, so lässt sich der Fehler 1. Art durch 4 % nach oben abschätzen. Wenn also weniger als 41 SchülerInnen mit „ja“ antworten, könnte der Lehrer auf ein signifikantes Ergebnis auf dem 5 %-Niveau für erfolgreiche pädagogischen Bemühungen verweisen.		30	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
c)	Die Verallgemeinerung der 1. Rechnung aus a) ergibt: $p_2 = s \cdot p_1 + (1-s)\cdot(1-p_1)$. Wenn $s = 0{,}5$ (gleich viele schwarze und weiße Kugeln), dann gilt $p_2 = 0{,}5$, und es ist kein Rückschluss auf p_1 möglich. Anderenfalls kann man die Gleichung nach p_1 auflösen: $p_2 = s \cdot p_1 + 1 - s - p_1 + s \cdot p_1 \Rightarrow s + p_2 - 1 = p_1 \cdot (2s-1)$ und man erhält $p_1 = \frac{s + p_2 - 1}{2s-1}$. $s = 0{,}5$ macht – wie gesagt – keinen Sinn, die gesuchte Information wird „total verrauscht“. In den Fällen $s = 1$ und $s = 0$, wird der Sinn des Verfahrens verfehlt, die gewünschte Anonymität geht total verloren. Es ist also ein Interessenausgleich zwischen Anonymität und „Verrauschtheit“ herzustellen. Je näher s bei 0,5 liegt, desto verrauschter ist das Ergebnis, desto schwerer ist es dann auch z.B., ein signifikantes Ergebnis in Sinne von b) zu erzielen.		20	10
d)	Wenn $s < 0{,}5$, dann fällt die in b) betrachtete Funktion streng monoton, d.h., **viele** „Ja-Antworten“ lassen auf **wenige** täuschende SchülerInnen schließen. Der Schüler sollte also mit “Ja“ antworten.			10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

STOCHASTIK 2

III.2 Prionentest

Durch Untersuchungen in der jüngsten Vergangenheit geht man davon aus, dass in Deutschland 0,05 ‰ der Rinder an BSE erkrankt sind. Nach der Schlachtung werden die Rinder auf BSE, im Volksmund: „Rinderwahn", getestet. Es wird an Teilen des Gehirns überprüft, ob besondere Prionen (spezielle Eiweißmoleküle) vorhanden sind. Zeigt ein Test das Vorliegen dieser Prionen an, wird das Ergebnis als positiv bezeichnet.

Die **Sensitivität** eines solchen Tests ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem infizierten Tier das Testergebnis positiv ist. Sie beträgt 99,99 %
Die **Spezifität** eines solchen Tests ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem gesunden Tier das Testergebnis negativ ist, also anzeigt, dass keine Erkrankung vorliegt. Sie beträgt 99,0 %

a) Bei 300 Proben von nachgewiesenermaßen kranken Tieren wird der Test nochmals auf seine Zuverlässigkeit hin überprüft. In allen 300 Fällen ist das Testergebnis positiv.

Dieses Ergebnis bedeutet nicht, dass der Wert für die Sensitivität nun 100 % sein muss. Bestätigen Sie dazu, dass bei der angenommenen Sensitivität von 99,99 % die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten dieses Ergebnisses größer als 95 % ist.

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass der Test eine Sensitivität von 99,99 % aufweist.

b) Berechnen Sie (näherungsweise) die zu erwartende Anzahl der positiven Testergebnisse bei 3 Millionen zu testenden Schlachttieren ab.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein positiv getestetes Tier wirklich erkrankt ist.

c) Da ein positiver Test nur begrenzt aussagekräftig ist, wird in diesen Fällen der Test wiederholt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein zweifach positiv getestetes Tier wirklich erkrankt ist, falls die beiden Ergebnisse der Tests sowohl bei gesunden als auch bei kranken Tieren voneinander stochastisch unabhängig sind.

Untersuchen Sie die Frage, ob diese Unabhängigkeitsaussage sinnvoll ist.

Da bei vielen Tests erfreulicherweise das Ergebnis negativ ist, wird ein Verfahren vorgeschlagen, die Kosten dadurch zu senken, dass das Testmaterial von mehreren Tieren vermengt und dieses Gemisch auf Prionen überprüft wird. Ist der Befund positiv, wird jedes Tier noch einmal einzeln getestet.
Nehmen Sie dabei an:

- die Wahrscheinlichkeit für ein positives Testergebnis beträgt nach wie vor 99,99%, falls das Testmaterial von mindestens einem erkrankten Tier in dem Gemisch ist (B-Sensitivität), und
- die Wahrscheinlichkeit für ein negatives Testergebnis beträgt nach wie vor 99 %, falls kein Testmaterial von erkrankten Tieren in dem Gemisch ist, (B-Spezifität).

Bezeichnen Sie die Kosten pro Test mit K.

d) Die Funktion f beschreibt die Kostenersparnis pro Test bzw. Tier, wenn die Proben von n Tieren vermengt werden.

$$f(n) = K \cdot \left(1 - \frac{1}{n} - \left(1 - 0{,}99995^n\right) \cdot 0{,}9999 - 0{,}99995^n \cdot 0{,}01\right)$$

Zeigen Sie die Gültigkeit dieses Funktionsterms.

Bestimmen Sie die Kostenersparnis pro Tier für den Schlachthof, wenn jeweils das Testmaterial von drei Tieren vermengt wird.

Vergleichen Sie damit die Kostenersparnis, wenn das Testmaterial von zehn Tieren vermengt wird.

e) Zeigen Sie, dass f auch in der folgenden Form dargestellt werden kann:

$$f(n) = K \cdot \left[0{,}0001 + 0{,}9899 \cdot 0{,}99995^n - \frac{1}{n} \right].$$

Weisen Sie nach, dass die Kostenersparnis bei der Vermengung von 143 Proben maximal ist. Begründen Sie, dass hier das einzige Maximum vorliegt.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Es gilt: $0{,}9999^{300} \approx 0{,}97 \geq 0{,}95$.</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines positiven Testes wird mit der Anzahl der durchgeführten Tests multipliziert liefert die zu erwartende Anzahl an positiven Tests (T_+). Die möglichen Gesundheitszustände eines Tieres werden mit G für gesund und K für krank abgekürzt.
$P(T_+) = P(T_+ \mid K) \cdot P(K) + P(T_+ \mid G) \cdot P(G) =$
$= 0{,}00005 \cdot 0{,}9999 + 0{,}99995 \cdot 0{,}01 \approx 0{,}010049 \approx 0{,}01$.
$E \approx 30.000$.
Bei 3 Millionen untersuchten Tieren kann man etwa mit 30 000 positiven Testergebnissen rechnen.
Die Anwendung des Satzes von Bayes zeigt die begrenzte Aussagekraft positiver Testergebnisse, denn die Wahrscheinlichkeit, dass ein positiv getestetes Tier wirklich erkrankt ist, beträgt nur 0,5%:
$P(K \mid T_+) = \frac{P(K) \cdot P(T_+ \mid K)}{P(T_+)}$
$= \frac{0{,}00005 \cdot 0{,}9999}{0{,}01} \approx 0{,}005$.</td><td>15</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$2T_+$ sei die Abkürzung für einen zweifach positiven Test. Man kann das Geschehen als dreistufiges Experiment betrachten. Zwei Pfade führen zu einem zweifach positiven Test. Zu bestimmen ist dann eine bedingte Wahrscheinlichkeit.
$P(K \mid 2T_+) = \frac{P(K) \cdot P(2T_+ \mid K)}{P(2T_+)} = \frac{P(K) \cdot P(2T_+ \mid K)}{P(K) \cdot P(2T_+ \mid K) + P(G) \cdot P(2T_+ \mid G)}$
$= \frac{0{,}00005 \cdot 0{,}9999^2}{0{,}00005 \cdot 0{,}9999^2 + 0{,}99995 \cdot 0{,}01^2} \approx 0{,}333$
Ein zweifach positiv getestetes Tier ist mit einer Wahrscheinlichkeit von immerhin etwa 33,3% erkrankt.
Die hier gemachten Unabhängigkeitsannahmen gehen davon aus, dass Fehlergebnisse nur durch “lokale kurzzeitige“ Laborfehler entstehen. Wenn die Ursache aber in spezifisch-ungewöhnlichen Reaktionen des Patienten liegen, oder allgemeiner in Fehlern, die sich beim zweiten Test wiederholen müssen, dann ist die Unabhängigkeitsannahme und damit das berechnete Ergebnis unsinnig.</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>Die Kosten für n einzeln getestete Tiere belaufen sich auf $n \cdot K$ .Von diesen Kosten sind die Kosten für das neue Verfahren abzuziehen. Die Kosten des neuen Verfahrens setzen sich zusammen aus drei Teilen. Wenn n Proben vermengt, treten einmal die Kosten auf. Wird die Probe positiv getestet, treten n zusätzliche Kosteneinheiten auf.
Eine „unsaubere“ Probe liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von $(1 - 0{,}99995^n)$ vor, sie wird aber nur mit der Sensitivität (0,9999) als eine solche erkannt.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Probe „sauber“ ist, beträgt $0{,}99995^n$.
Eine saubere Probe wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,01 irrtümlich als positiv eingestuft.
Die Kostendifferenz muss durch die Anzahl n der Tiere geteilt werden, um die Kostenersparnis pro Tier zu erhalten:
$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{n} \cdot \left(n \cdot K - (K + n \cdot K \cdot (1 - 0{,}99995^n) \cdot 0{,}9999 + n \cdot K \cdot 0{,}99995^n \cdot 0{,}01\right) \\ &= \frac{1}{n} \cdot K \cdot \left(n - 1 - n \cdot (1 - 0{,}99995^n) \cdot 0{,}9999 - n \cdot 0{,}99995^n \cdot 0{,}01\right) \\ &= K \cdot \left(1 - \frac{1}{n} - (1 - 0{,}99995^n) \cdot 0{,}9999 - 0{,}99995^n \cdot 0{,}01\right). \end{aligned}$$
$f(3) \approx 0{,}6565K$; $f(10) \approx 0{,}8895K > f(3)$. Die Kostenersparnis ist bei der Vermengung des Testmaterials von 10 Tieren größer als bei 3 Tieren.</td><td></td><td>20</td><td>10</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Die Umformungen werden hier nicht vorgeführt.
Einsetzen liefert:
$f(142) \approx 0{,}9759542K; f(143) \approx 0{,}9759543K; f(144) \approx 0{,}9759537K.$
Eine andere Möglichkeit wäre die Suche nach dem Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung. Eine Bestimmung der Nullstelle der ersten Ableitung ist nur numerisch möglich. $f'(x) = K \cdot \left[0{,}9899 \cdot \ln(0{,}99995) \cdot 0{,}99995^x + \frac{1}{x^2}\right].$
Die erste Ableitung hat für x > 0 jedoch nur eine Nullstelle, da die Graphen von f_1 mit $f_1(x) = -0{,}9899 \cdot \ln(0{,}99995) \cdot 0{,}99995^x$ und f_2 mit $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$ nur einen Punkt gemeinsam haben.</td><td></td><td></td><td>15</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>50</td><td>25</td></tr>
</table>