ANALYSIS 1

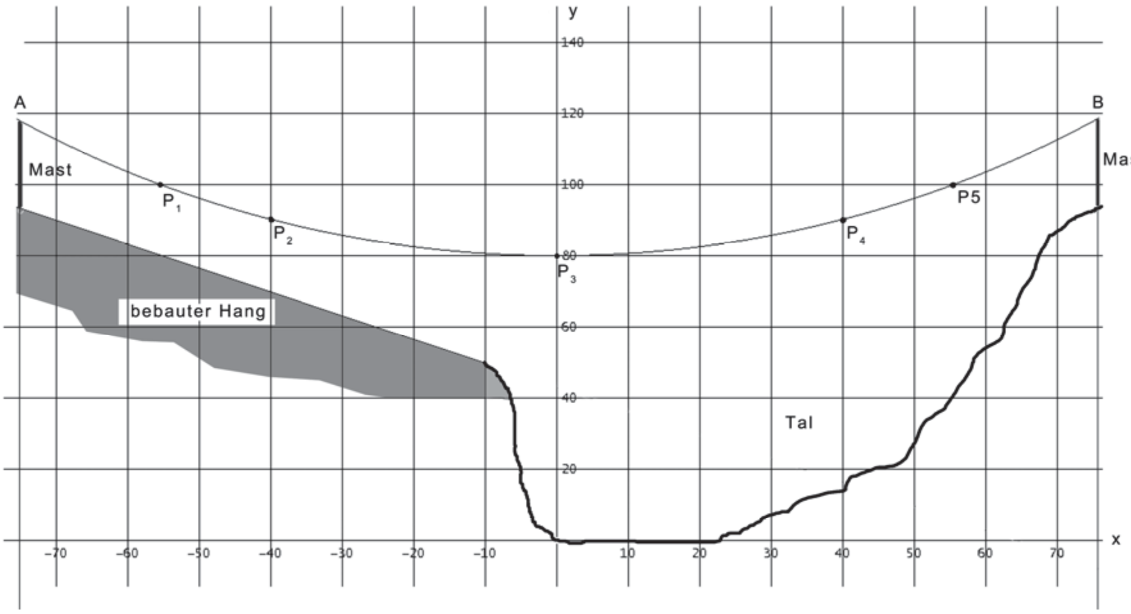
I.1 Kettenlinie

Bei vielen technischen Problemen treten Kombinationen von Exponentialfunktionen auf. Eine von ihnen, die einen besonderen Namen trägt, soll hier näher betrachtet werden.

Cosinus hyperbolicus: $\cosh(x) := \frac{1}{2} \cdot \left(e^x + e^{-x}\right)$

a) Untersuchen Sie die Funktion cosh auf Nullstellen, Symmetrien und Asymptoten. Skizzieren Sie den Graphen in ein Koordinatensystem mit $-3 \leq x \leq 3$. **10 P**

Über einem Tal ist eine elektrische Leitung zwischen zwei Masten jeweils in 117,8 m Höhe aufgehängt (Punkte A und B). Die Masten sind 150 m voneinander entfernt. Die Leitung befindet sich in der Mitte auf einer Höhe von 80 m. Siehe Skizze.



In den folgenden beiden Aufgabenteilen wird der Verlauf der elektrischen Leitung mit unterschiedlichen Funktionen modelliert werden. Die einzelnen Modellierungen werden zum Teil miteinander verglichen.

b) Die elektrische Leitung soll durch eine Funktion *k* der Form $k(x) = a \cdot \cosh(b \cdot x)$ mit $a, b > 0$ beschrieben werden.

- Begründen Sie, dass *a* dabei die Höhe des tiefsten Seilpunktes über der Grundebene ist.
- Untersuchen Sie, wie sich die Funktionswerte ändern, wenn sich bei festgehaltenem *a* der Parameter *b* vergrößert.
- Weisen Sie nach, dass die Funktion *kett* mit $kett(x) = 80 \cdot \cosh(0{,}0125 \cdot x)$ in etwa durch die Punkte *A*, *B* und P_3 verläuft. **15 P**

c) • Berechnen Sie mithilfe der Regression eine ganzrationale Funktion p von möglichst niedrigem Grad, die den Verlauf der Leitung annähernd beschreibt **und** sodass gleichzeitig die Differenz von $p(x)$ und $kett(x)$ nicht mehr als einen halben Meter beträgt.

• Die Bezeichnung Cosinus hyperbolicus legt den Gedanken nahe, für die Beschreibung einer durchhängenden Leitung eine Funktion q mit der Gleichung $q(x) = r \cdot \cos(s \cdot x) + t$ zu verwenden.
Bestimmen Sie die Parameter r, s und t ohne Hilfe der Regression so, dass q den Verlauf der elektrischen Leitung möglichst gut beschreibt.

• Vergleichen Sie die gefundenen Näherungsfunktionen p und q jeweils bezüglich der Annäherung an die Funktion *kett*.
Hinweis: Sollten Sie für p oder q kein Ergebnis herausbekommen haben, so können Sie die Ersatzfunktionen mit den Gleichungen $p(x) = 6 \cdot 10^{-8} x^4 + 6{,}3 \cdot 10^{-3} x^2 + 80$ bzw.
$q(x) = -38 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{150} \cdot x\right) + 117{,}8$ verwenden. **25 P**

Weiterführende Untersuchungen führen zu dem Ergebnis, dass die Funktionen der Form $k(x) = a \cdot \cosh(b \cdot x)$ mit $a, b > 0$ am besten für die Beschreibung von hängenden Leitungen geeignet sind. Sie heißen auch Kettenlinienfunktionen. Im Folgenden wird deshalb nur noch die Funktion *kett* mit $kett(x) = 80 \cdot \cosh(0{,}0125 \cdot x)$ verwendet werden.

d) • Bestimmen Sie für die Funktion *kett* den Winkel zwischen Leitung und dem Mast an einem Befestigungspunkt.

• Untersuchen Sie allgemein, wie sich bei $y = k(x) = a \cdot \cosh(b \cdot x)$ die Parameter a und b sowie der eben berechnete Winkel ändern, wenn man die Leitung straffer spannt. **15 P**

e) Unter der Leitung befindet sich ein bebauter Hang, dessen Bebauung im Intervall $[-75; -10]$ nach oben durch die Gerade h mit $h(x) = -0{,}67 \cdot x + 43$ begrenzt wird (siehe Skizze auf der ersten Seite).

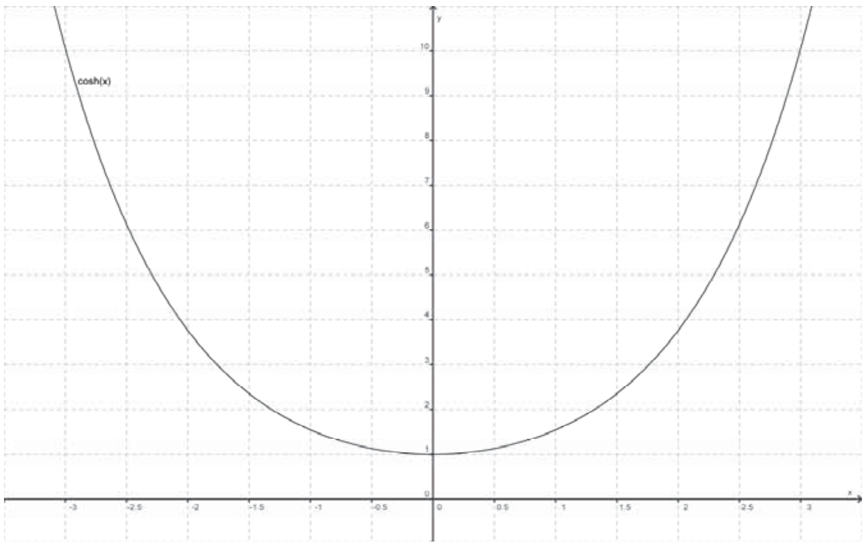
• Begründen Sie, dass der Abstand zwischen der Leitung und der Begrenzungslinie h dort am geringsten ist, wo die Steigungen von *kett* und h übereinstimmen.

• Weisen Sie nach, dass zwischen der Leitung und der Begrenzungslinie h der Bebauung stets ein Sicherheitsabstand von mindestens 15 m gewahrt ist. **20 P**

f) • Bestimmen Sie eine Schätzung für die Länge der Leitung, indem Sie anstelle der Funktion nur geradlinige Strecken zwischen den Punkte $A, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ und B verwenden.

• Für eine im Intervall [c; d] stetig differenzierbare Funktion f berechnet sich die (Bogen-)Länge l des Graphen von f über [c; d] durch $l = \int_c^d \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$.
Berechnen Sie die Länge der Leitung zwischen A und B mit der Formel und vergleichen Sie diese mit Ihrem Ergebnis von ersten Spiegelpunkt. **15 P**

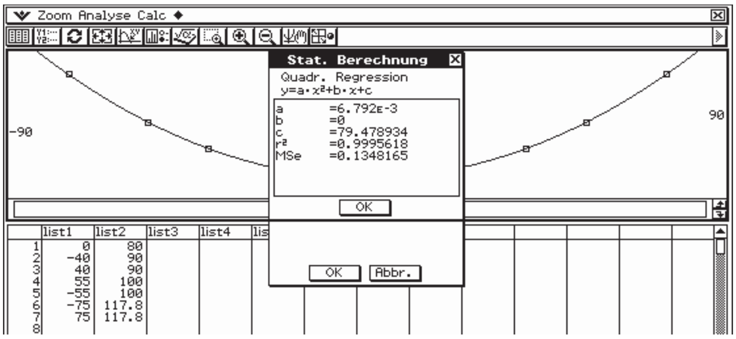
Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	<u>Cosinus hyperbolicus:</u> Keine Nullstelle, da der Term in der Klammer als Summe zweier positiver Zahlen immer positiv ist. Da $\cosh(-x) = 0{,}5 \cdot (e^{-x} + e^{x}) = \cosh(x)$, ist der Cosinus hyperbolicus eine gerade Funktion und sein Graph damit zur *y*-Achse spiegelsymmetrisch. Mit $x \to \infty$ geht $e^{-x} \to 0$, und damit gilt $\cosh(x) \to 0{,}5 \cdot e^{x}$. Aufgrund der Geradheit des cosh ist dies auch die Asymptote für $x \to -\infty$. <u>Graph der Funktion:</u> 	5	5	
b)	• Mit der Beachtung der Symmetrie der Kettenlinie und der Tatsache, dass das Seil in der Mitte am tiefsten hängt: $k(0) = a \cdot \cosh(b \cdot 0) = a \cdot 0{,}5 \cdot (2e^{0}) = a \cdot 0{,}5 \cdot 2 = a$. Dies ist das gewünschte Resultat. • Wenn bei festgehaltenem *a* der Parameter *b* vergrößert wird, so ändert sich bei $x = 0$ nichts. Der Tiefpunkt der Funktion bleibt also erhalten. Für größere *x*-Werte vergrößern sich der Betrag der Argumente in der Exponentialfunktion. Da e^{x} im Wesentlichen den Funktionswert bestimmt, weil e^{-x} für große *x*-Werte sehr klein ist, wird auch der Funktionswert größer: Der Graph wird bei gleichem Minimum nach beiden Seiten steiler; er erreicht bei festgehaltenem *x* größere Höhen. • Mit dem gegebenen Bodenabstand in der Mitte ergibt sich sofort $a = 80$. Einsetzen liefert: $80 \cdot 0{,}5 \cdot \left(e^{0{,}0125 \cdot 75} + e^{-0{,}0125 \cdot 75}\right) \approx 117{,}808$. Da vorausgesetzt war, dass es sich um eine Funktion der Form $k(x) = a \cdot \cosh(b \cdot x)$ mit $a, b > 0$ handelt, ist damit alles gezeigt.		15	

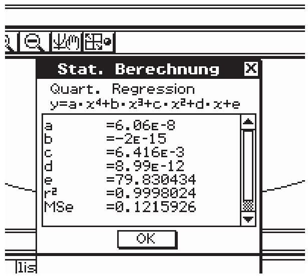
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III

c)

- Aus Symmetriegründen kommen nur ganzrationale Funktionen von geradzahligem Grad in Frage. Unter Verwendung der eingezeichneten Punkte wird z. B. mit dem ClassPad eine quadratische Funktion gefunden:



Es ist z. B. an *c* zu erkennen, dass bei der gefundenen quadratischen Funktion für *x*=0 die Abweichung 80 m-79,479 m = 0,521 m größer als 0,5 m ist.



Wird $p(x) = 6\cdot 10^{-8}x^4 + 6,4\cdot 10^{-3}x^2 + 79,83$ als Näherungsfunktion gewählt, dann liegt die Abweichung im fraglichen Intervall überall unter 0,2 m.
Das kann man z. B. durch „plotten" der Differenzfunktion von $p(x)$ und $kett(x)$ sehen.

- Der Graph der Funktion q mit $q(x) = r\cdot\cos(s\cdot x) + t$ soll durch den Punkt (0 ; 80) laufen, außerdem sollen bei $x = -75$ bzw. bei $x = 75$ Wendepunkte liegen. Daraus ergeben sich die folgenden Gleichungen:

(0.1) $q(0) = r\cdot\cos(s\cdot 0) + t = r + t = 80$

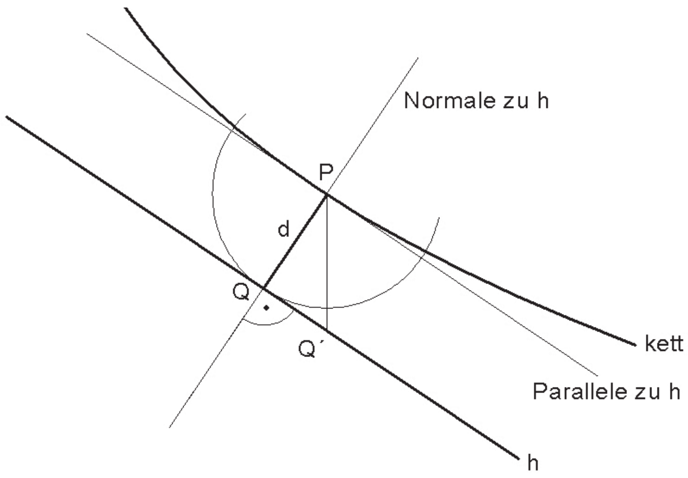
(0.2) $q''(75) = -r\cdot s^2\cdot\cos(s\cdot 75) = 0$

(0.3) $q(75) = r\cdot\cos(s\cdot 75) + t = 117,8$

Als Lösung erhält man die Parameter $r = -37,8$, $s = \dfrac{\pi}{150}$ und $t = 117,8$.

- Die größte Abweichung zwischen *kett* und *q* beträgt 2,79 m. Damit beschreibt *p* den Verlauf deutlich besser, da dort die Abweichung unterhalb von 0,2 m liegt. Das kann man z. B. durch „Plotten" der Differenzfunktion von $p(x)$ und $kett(x)$ sehen.

I	II	III
10	15	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>• Der Winkel ergibt sich aus der Steigung der Kettenlinie an der Stelle $x = 75$:
$k'(75) = 80 \cdot \sinh(0{,}0125 \cdot 75) \cdot 0{,}0125 \approx 1{,}08099$.
Damit ergibt sich das Winkelmaß zu $\alpha = 90° - \arctan(k'(75)) \approx 42{,}77°$.
• Wenn das Seil straffer gespannt wird, so hängt es in der Mitte höher. Also wächst der Parameter a.
da zugleich das Höhenwachstum zwischen Mitte und Türmen abnimmt, muss (mit dem Ergebnis von c) oder z. B. durch Nachrechnen an einem Beispiel) der Parameter b abnehmen.
Da das Seil „waagerechter“ in den Aufhängungspunkten ankommt, wird der Winkel größer, bleibt aber unter 90°.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>•


Der Graph von *kett* ist eine Linkskurve. Aus der Abbildung ergibt sich, dass der Abstand der Leitung von der Linie h mit $h(x) = -0{,}67 \cdot x + 43$ im Intervall [-75 ; -10] dort am geringsten ist, wo die Steigung von h und *kett* übereinstimmen.
• Dort muss also $kett'(x) = \sinh(0{,}0125 \cdot x) = -0{,}67$ sein. Daraus ergibt sich $x \approx -50{,}23$. Die Normale zu *kett* an dieser Stelle hat die Gleichung
$n(x) \approx \frac{1}{0{,}67} \cdot x + 171{,}27$.
h und n haben den Schnittpunkt H(-59,31 ; 82,74). Der Schnittpunkt der Kettenlinie mit n ist K(-50,23 ; 96,30). Nach Pythagoras ergibt sich als Abstand zwischen H und K $\sqrt{(96{,}30 - 82{,}74)^2 + (-50{,}23 + 59{,}31)^2} \approx 16{,}3$. Dieser Wert liegt oberhalb des geforderten Sicherheitsabstandes von 15 m.</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	• Die Länge der Leitung lässt sich nach dem Satz von Pythagoras und unter Ausnutzung der Symmetrie wie folgt berechnen: $l = 2 \cdot \left[\left\lvert \overline{AP_1} \right\rvert + \left\lvert \overline{P_1P_2} \right\rvert + \left\lvert \overline{P_2P_3} \right\rvert \right]$ $= 2 \cdot \left[\sqrt{(117,8-100)^2 + (-75+55)^2} + \sqrt{(100-90)^2 + (-55+40)^2} + \sqrt{(90-80)^2 + (-40-0)^2} \right]$ $\approx 2 \cdot [26,8 + 18,0 + 41,2] = 172,0$ Die Leitung ist nach dieser Näherung also ungefähr 172 m lang. • $l = \int_{-75}^{75} \sqrt{1 + \left(kett'_{80;0,0125}(x)\right)^2}\, dx = \int_{-75}^{75} \sqrt{1 + \left(\sinh\left(0,0125 \cdot x\right)\right)^2}\, dx$ $= \int_{-75}^{75} \cosh\left(0,0125 \cdot x\right) dx$ $= 2 \cdot 80 \cdot \sinh\left(0,0125 \cdot 75\right) \approx 172,96$ Demnach ist die Leitung ungefähr 173 m lang. Die Näherung kommt der tatsächlichen Länge schon recht nahe.	5		10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

ANALYSIS 2

I.2 Nutzhölzer

Ein Forstwirt plant Nutzhölzer anzubauen. Zur Auswahl stehen die Sorten mit den Namen **Fichtelbaum** und **Grünbuche**. Zu beiden Sorten gibt es Informationen, die auf langjährigen Studien beruhen. Zur Vereinfachung wird im Weiteren nur das Längenwachstum dieser Bäume betrachtet.

a) Für die Sorte **Fichtelbaum** liegt folgende Tabelle des Längenwachstums vor:

x	Jahre nach der Pflanzung	0	2	4	6	8	10
$F(x)$	Höhe in Dezimetern	4	18,5	37,0	42,9	43,8	44,0

- Berechnen Sie mithilfe einer quadratischen und einer logistischen Regression jeweils eine Funktion für die Höhe der Sorte Fichtelbaum in Abhängigkeit von der Wachstumszeit x nach der Pflanzung.
- Begründen Sie, warum hier die logistische Regression besser geeignet ist.

Für die **Grünbuche** findet der Forstwirt die Funktion G zur Ermittlung der Baumhöhe ab Pflanzung:

$$G: x \to a - b \cdot e^{-x}, a, b \in \mathbb{R} \text{ und } a, b > 0 \ .$$

Er möchte aus dieser Familie ebenfalls Setzlinge wählen, die mit einer Höhe von 4 Dezimetern gepflanzt werden. Erfahrungsgemäß sind diese Setzlinge nach 2 Jahren auf eine Höhe von 38,6 dm angewachsen.

- Bestimmen Sie die zugehörigen Werte für a und b und geben Sie den Funktionsterm für G an.
- Skizzieren Sie die Graphen von F und G in das beigefügte Koordinatensystem.

Hinweis: Sollten Sie die vorher gehenden Aufgaben nicht gelöst haben, verwenden Sie hier bitte F^* und G^* aus Aufgabenteil b).

- Vergleichen Sie das Wachstumsverhalten beider Sorten. Gehen Sie dabei sowohl auf die Höhenentwicklung, als auch auf die Wachstumsgeschwindigkeit ein. **40 P**

b) Arbeiten Sie in diesem Aufgabenteil bitte mit den vereinfachten (jedoch vom Aufgabenteil a) etwas abweichenden) Funktionen

$$F^*: \ x \to \frac{44}{10 \cdot e^{-x} + 1} \text{ und } G^*: \ x \to 45 - 47{,}3 \cdot e^{-x}$$

- Weisen Sie mithilfe dieser beiden Funktionen nach, dass $x_1 \approx 1{,}6 \ Jahre$ der einzige Zeitpunkt ist, bei dem beide Nutzhölzer gleich schnell wachsen.
- Weisen Sie nach, dass die beiden Nutzhölzer zum Zeitpunkt x_1 den größten Höhenunterschied aufweisen.
  Berechnen Sie diesen Höhenunterschied.
- Berechnen Sie für beide Nutzhölzer, wie hoch sie gemäß dem jeweiligen Modell höchstens wachsen können.
- Berechnen Sie jeweils die Wachstumsdauer, nach der jedes der beiden Nutzhölzer gemäß des Modells 75 % der Gesamthöhe erreicht hat. **30 P**

c) Im Aufgabenteil b) wurde ausgehend von Funktionen, die die Höhe eines Baumes beschreiben, Wachstumsgeschwindigkeiten betrachtet.
Verallgemeinert haben entsprechende **Wachstumsgeschwindigkeiten** das folgende Aussehen:

$$f_{b,c}: x \to \frac{c \cdot e^{x}}{(e^{x} + b)^2} \qquad b, c \in \mathbb{R}$$

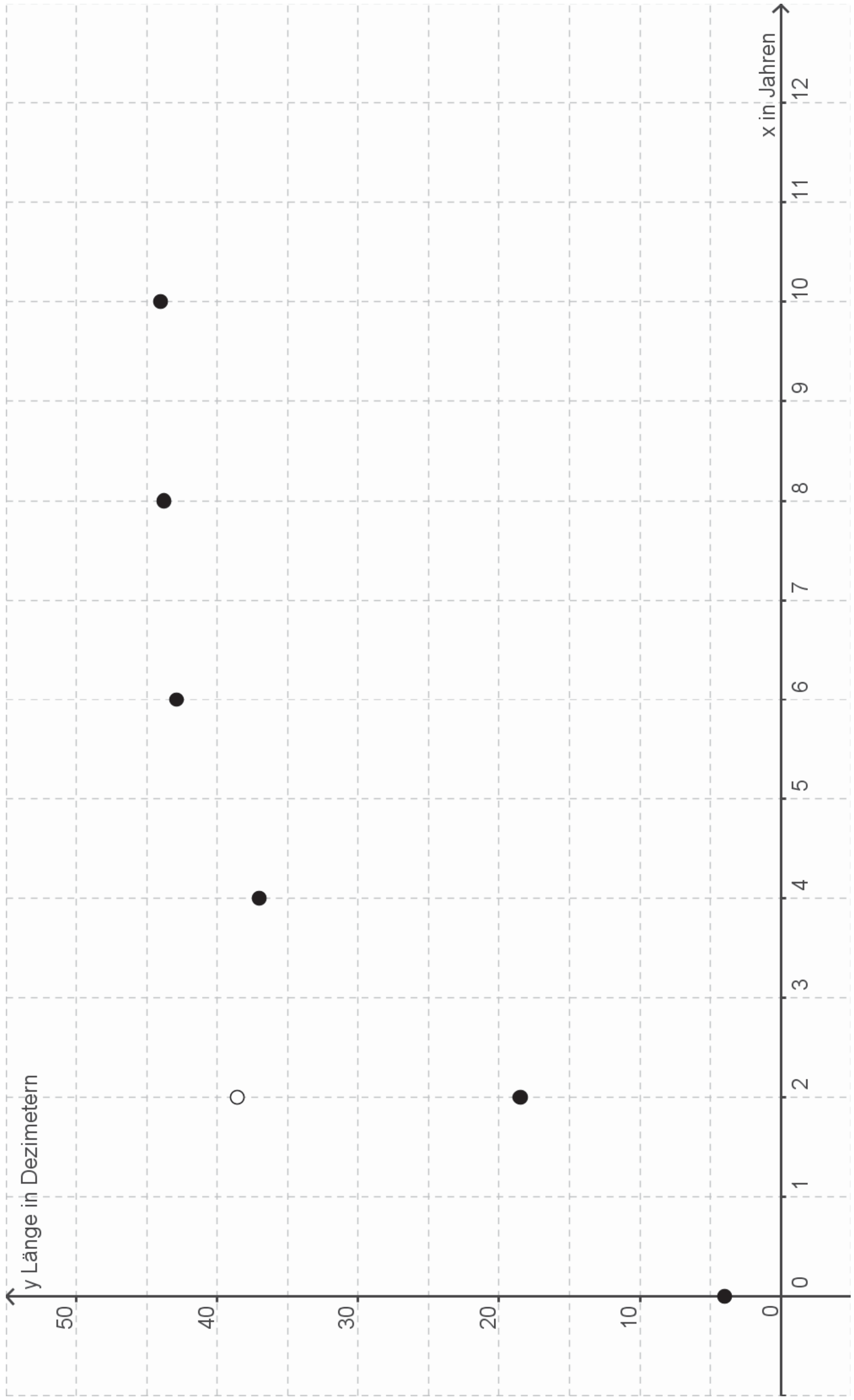
Diese Funktionen werden im Folgenden genauer betrachtet:

- Untersuchen Sie den Einfluss des Parameters *c* auf die Wachstumsgeschwindigkeit.
  Begründen Sie, warum im Sachkontext $c > 0$ gefordert werden muss.

In den folgenden Teilen soll der Einfluss von *b* erforscht werden. Gehen Sie hierfür von $\boldsymbol{c = 100}$ aus.

- Ermitteln Sie drei grundsätzlich unterschiedliche Verläufe der Graphen.
  Skizzieren Sie dafür jeweils ein Beispiel und geben Sie den jeweils gewählten Wert für *b* an.
  Untersuchen Sie nun, welchen Bedingung der Parameter *b* genügen muss, damit das Modell reale Vorgänge beschreiben kann.
  Vergleichen Sie die reale Vorgänge beschreibenden Wachstumsfunktionen mit Ihnen bekannten Wachstumsvorgängen
- Betrachten Sie auf Ihrem Bildschirm Graphen von $f_{b,\,100}$ mit ansteigenden Werten für *b*. Beginnen Sie bei $b = 10$.
  Interpretieren Sie - ausgehend vom unterschiedlichen Verlauf der Graphen - den Einfluss des Parameters *b* auf die **Baumhöhe**. **30 P**

Anlage zur Aufgabe „Nutzhölzer“



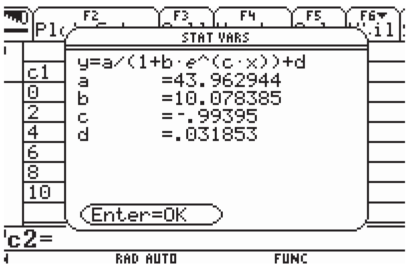
Erwartungshorizont:

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

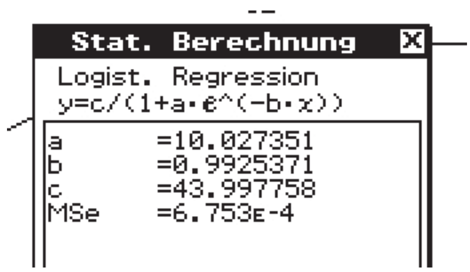
• Die quadratische Regression liefert: $F_{quad}(x) = -0.6334x^2 + 10,3605x + 3.125$

Die logistische Regression liefert
mit DERIVE $F_{log}(x) = \dfrac{9,45 \cdot 10^6 \cdot e^{0,9925x}}{2,15 \cdot 10^5 \cdot e^{0,9925x} + 2,15 \cdot 10^6}$

mit dem Ti



mit dem ClassPad



</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

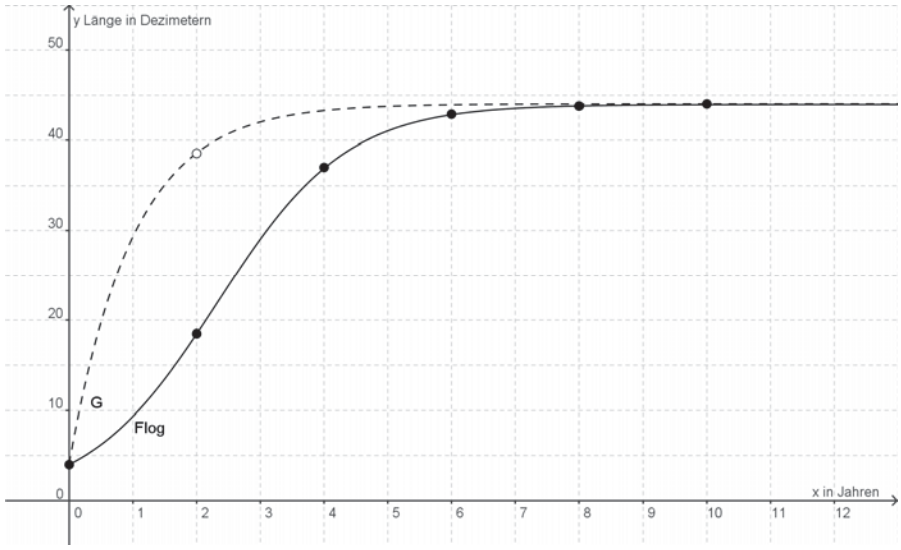
• Gemäß der quadratischen Regression müsste die Höhe des Baumes nach Erreichen eines Hochpunktes wieder abnehmen. Dies ist unrealistisch. Außerdem lässt sich aus den Tabellenwerten vermuten, dass die Höhe des Nutzholzes einen Sättigungswert erreicht. Also bietet sich eine logistische Regression an.

</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

• Aus den Bedingungen $G(0) = 4$ und $G(2) = 38,6$ ergeben sich die Gleichungen: $\begin{array}{ll} \text{I} & a - b = 4 \\ \text{II} & a - b \cdot e^{-2} = 38,6 \end{array}$.

Mit dem solve-Befehl folgt $a = 44,0155$ und $b = 40,0155$, also $G(x) = 40,0155 - 40,0155 \cdot e^{-x}$.

</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

Von den Schülerinnen und Schüler wird nur eine Skizze im vorbereiteten Koordinatenkreuz erwartet.

• Die Nutzhölzer haben bei Pflanzung dieselbe Höhe. Etwa in den ersten fünf Jahren erreicht Nutzholz *G* aber eine deutlich größere Höhe als Nutzholz *F*. Sorte **G** wächst also erheblich schneller als Sorte *F*. Sorte *G* wächst zu Anfang am schnellsten, Sorte *F* beim Wendepunkt (etwa nach zwei Jahren). Beide Wachstumsgeschwindigkeiten verringern sich deutlich etwa ab dem fünften Jahr. Beide Hölzer streben derselben Sättigungshöhe von etwa 44 Dezimetern zu.</td><td>5</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>• Die Wachstumsraten f^* und g^* werden durch die ersten Ableitungen von F^* und von G^* angegeben.
Über den Differenzierungsbefehl des CAS (bzw. Handrechnung bei G^*) ermittelt man: $f^*(x) = \dfrac{440\cdot e^x}{(e^x+10)^2}$ und $g^*(x) = -47{,}3\cdot e^{-x}$.
Für den Zeitpunkt gleicher Wachstumsgeschwindigkeit muss die Gleichung $f^*(x) = g^*(x)$ gelöst werden. Mithilfe des solve-Befehls erhält man die einzige Lösung $x_1 \approx 1{,}585$.
Nach ungefähr 1,6 Jahren wachsen beide Holzarten gleich schnell.</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

• Für den Höhenunterschied kann man eine Differenzfunktion $D = G^* - F^*$ definieren. Für den Zeitpunkt des Maximums von *D* muss $D'(x) = 0$ gelten. Da $D'(x) = g^*(x) - f^*(x)$ und $f^*(x) = g^*(x)$ für das x_1 aus dem vorigen Spiegelstrich, folgt dass auch nur für $x_1 \approx 1{,}6$ gilt $D'(x_1) = 0$.
Die Existenz eines Maximums ist aufgrund der angefertigten Grafik ersichtlich.
Nach etwas über anderthalb Jahren ist der Höhenunterschied der Hölzer also am größten.
Die Größe des Höhenunterschieds bestimmt man aus
$G^*(1{,}585) - F^*(1{,}585) \approx 35{,}31 - 14{,}43 = 20{,}88$.
Der größte Höhenunterschied beträgt rund 21 dm.

</td><td>5</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

• Die erreichbare Höhe der Bäume lässt sich über Grenzwerte für „x gegen unendlich" bestimmen:
Sorte *F*: $\lim\limits_{x\to\infty} F^*(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{44}{10\cdot e^{-x}+1} = 44 \quad (\text{da } \lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0)$
Die Sorte *F* wächst bis zu einer Höhe von 44 dm.
Sorte *G*: $\lim\limits_{x\to\infty} G^*(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (45 - 47{,}3\cdot e^{-x}) = 45 \quad (\text{da } \lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0)$
Die Sorte *G* wächst bis zu einer Höhe von 45 dm.

</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

• Sorte *F*:
Die Lösung der Gleichung $F^*(x) = 33$ ist gesucht. Der solve-Befehl liefert: $x = \ln(30) \approx 3{,}40$.
Nach etwa 3,4 Jahren hat der Baum 75 % seiner Gesamthöhe erreicht.
Sorte *G*:
Die Lösung der Gleichung $G^*(x) = 33{,}75$ ist gesucht. Der solve-Befehl liefert: $x = \ln(946) + 2\cdot\ln(\tfrac{1}{15}) \approx 1{,}44$. Dieser Baum hat 75 % seiner Gesamthöhe bereits nach rund anderthalb Jahren erreicht.

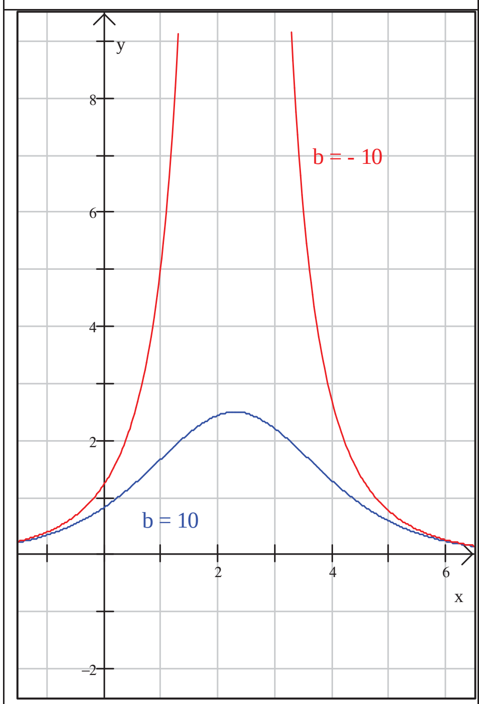
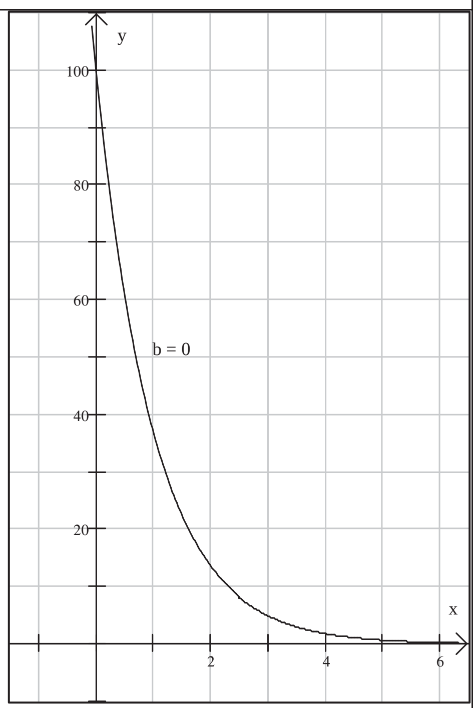
</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

• Die Wachstumsgeschwindigkeit vergrößert sich proportional zum Parameter *c*.
Für $c < 0$ wäre die Wachstumsgeschwindigkeit negativ, was ein Schrumpfen des Baumes bedeuten würde. Für $c = 0$ gäbe es gar kein Wachstum. Da Beides ist unrealistisch ist, muss $c > 0$ gefordert werden.

</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III

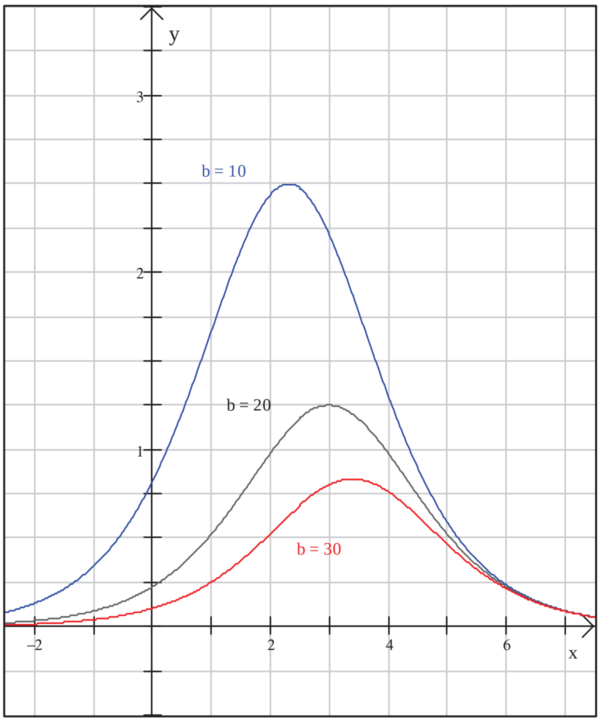
- Für $b < 0$, $b = 0$ und $b > 0$ entstehen grundsätzlich unterschiedliche Graphen.

Beispiel für $b < 0$ und $b > 0$	Beispiel für $b = 0$
	

Wird $b < 0$ gewählt, so entsteht eine Polstelle. Die Wachstumsgeschwindigkeit müsste demnach für eine bestimmte Zeit unendlich groß werden. Das ist nicht realistisch.

Für $b = 0$ ist die Wachstumsgeschwindigkeit zu Beginn am größten, nimmt dann ständig ab und nähert sich null. Diese Entwicklung ist möglich. Damit weist diese Funktion das gleiche Wachstumsverhalten wie ein beschränktes Wachstum auf.

Für b > 0 ist die Wachstumsgeschwindigkeit zu Anfang sehr klein, sie wächst dann bis zu einem maximalen Wert. Dann nimmt sie ähnlich wie bei b = 0 ab. Auch diese Entwicklung ist realistisch und hat das gleiche Wachstumsverhalten wie das logistische Wachstum. 15

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	• Die Schüler erzeugen eine entsprechende Grafik auf ihrem Bildschirm, die sie möglicherweise auch skizzieren. Dies ist aber nicht verlangt.  Je größer der Wert von b ist, umso kleiner ist die zugehörige maximale Baumhöhe, denn die Fläche unter dem Graphen der Wachstumsgeschwindigkeit nimmt mit steigendem Wert von b ab. Der Zeitraum des größten Wachstums liegt umso früher, je kleiner b ist. Also wird ein bestimmter Anteil der Gesamthöhe auch umso früher erreicht, je kleiner b ist.		5	5
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

LA/AG 1

II.1 Flugbahnen

Vom Tower eines Flughafens aus wird ein Flugzeug $F1$ beobachtet, welches sich in einem Beobachtungszeitraum von 2 Minuten, beginnend mit dem Zeitpunkt $t_0 = 0$ s, mit einer konstanten Geschwindigkeit auf einer gradlinigen Bahn bewegt. Alle Angaben sind in Kilometern.
Nehmen Sie außerdem an, dass die Erdoberfläche eine Ebene ist.
Die Aufgabenteile a), b) und c) beziehen sich auf den oben beschriebenen Beobachtungszeitraum.

a) Das Flugzeug $F1$ wird zunächst zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ s im Punkt $F1_1(-1\,|\,2\,|\,0,4)$ geortet. 15 Sekunden später wird es im Punkt $F1_1(0,5\,|\,1\,|\,0,7)$ geortet.

- Berechnen Sie eine Geradengleichung, die die Flugbahn von $F1$ beschreibt.
- Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Flugzeuges und geben Sie Ihr Ergebnis in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und in $\frac{\text{km}}{\text{min}}$ an.
- Berechnen Sie den Punkt, indem das Flugzeug $F1$ eine Flughöhe von 2,5 km erreicht hat.
- Bestimmen Sie den Winkel der Flugbahn gegenüber der Horizontalen. **20 P**

Ein zweites Flugzeug $F2$ bewegt sich im Beobachtungszeitraum ebenfalls auf einer gradlinigen Bahn.

b) Das Flugzeug $F2$ wird auch zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ s beobachtet. Es befindet sich im Punkt $F2_1(-3\,|\,-1\,|\,3,7)$ und fliegt mit der Geschwindigkeit von $5\frac{\text{km}}{\text{min}}$ in Richtung $\overrightarrow{f2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Erläutern sie ohne eine weitere Rechnung, warum die Funktion, die den Abstand der beiden Flugzeuge beschreibt, genau ein Minimum hat.
- Bestimmen sie im Beobachtungszeitraum die kleinste und die größte Entfernung der beiden Flugzeuge. Berechnen Sie die jeweiligen Abstände. **20 P**

c)
- Bestätigen Sie, dass die beiden Flugbahnen sich nicht schneiden.
- Es gibt einen Punkt auf der Flugbahn von $F1$, der genau senkrecht unter einem Punkt der Flugbahn von $F2$ liegt.
  Bestimmen Sie die beiden Punkte sowie deren Abstand.
- Entscheiden Sie, ob dieser Abstand mit dem Abstand der beiden Flugbahnen übereinstimmt. **20 P**

d) Nahe der Startbahn befindet sich im Punkt $R(-3\,|\,1,5\,|\,0)$ eine Radarstation mit einem halbkugelförmigen Überwachungsbereich von 90 km.
Ermitteln Sie unter der Annahme, dass sich das Flugzeug $F1$ auch außerhalb des Beobachtungszeitraumes gradlinig weiterbewegt, wie viele km das Flugzeug im Überwachungsbereich des Radars fliegt. **15 P**

e) Im Anschluss an den Beobachtungszeitraum von 2 Minuten fliegt das Flugzeug $F2$ nicht mehr gradlinig weiter. Es wird von zwei Radarstationen $R1$ und $R2$ erfasst. $R1$ befindet sich in dem Punkt $(-5|7|0)$ und $R2$ im Punkt $(12|-4|0)$.

Von $R1$ ist das Flugzeug $F2$ 47 km entfernt und von $R2$ ist das Flugzeug 35 km entfernt.

- Bestätigen Sie, dass alle infrage kommenden Punkte sich auf einem Halbkreis befinden.
- Bestimmen Sie den Radius und den Mittelpunkt des Halbkreises.
- Bestimmen Sie die Ebene, in der dieser Halbkreis liegt. **25 P**

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

- Die Geradengleichung ergibt sich aus $\overrightarrow{f1_1} + k(\overrightarrow{F1_1\,F1_2}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0,4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \\ 0,3 \end{pmatrix}$,

  wobei $\overrightarrow{f1_1}$ der zu $F1_1$ gehörende Vektor ist.
- Es wird nun die Länge der Strecke von $F1_1$ nach $F1_2$ bestimmt und mit 4 malgenommen. Das ist die Strecke, die das Flugzeug in einer Minute zurücklegt. Durch Multiplikation dieses Ergebnisses mit 60 erhält man die in einer Stunde zurückgelegte Strecke.

  $\left|\overrightarrow{F1_1\,F1_2}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \\ 0,3 \end{pmatrix}\right| = \frac{\sqrt{334}}{10} \approx 1,83$

  $\frac{\sqrt{334}}{10} \cdot 4 \approx 7,3$ und $\frac{\sqrt{334}}{10} \cdot 4 \cdot 60 \approx 438,62$

  Das Flugzeug $F1$ liegt mit einer Geschwindigkeit von ungefähr $7,3\ \frac{\text{km}}{\text{min}}$ bzw. ungefähr $439\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
- Für die x_3-Komponente der Flugbahn muss 2,5 ergeben $x_3 = 0,4 + k \cdot 0,3 = 2,5$. Z. B. mithilfe des solve-Befehls erhält man $k = 7$.
  Dieses Ergebnis wird in die Geradengleichung eingesetzt:

  $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0,4 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \\ 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,5 \\ 9 \\ 2,5 \end{pmatrix}$

  Daraus ergibt sich der gesuchte Punkt zu $(9,5\,|\,9\,|\,2,5)$.
- Es ist der Winkel zwischen dem Richtungsvektor der Flugbahn $\vec{f_1}$ und der Horizontalen zu bestimmen. In der entsprechenden Formelsammlung findet man die Formel $\sin(\alpha) = \frac{\left|\vec{n} \cdot \vec{f_1}\right|}{\left|\vec{n}\right| \cdot \left|\vec{f_1}\right|}$, wobei $\vec{n}$ der Richtungsvektor der Ebne ist.

  In diesem Fall ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, also folgt $\sin(\alpha) = \frac{3 \cdot \sqrt{334}}{334} \approx 0,16$, sodass z. B. mithilfe des solve-Befehls $\alpha \approx 9,4°$ folgt.

  Hinweis: Ebenso ist u. a. eine elementargeometrische Lösung über die Länge des Richtungsvektors und dessen x_3-Komponente möglich.

</td><td>15</td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
b)	• Die beiden Flugbahnen werden als Funktionen f_1 und f_2 in Abhängigkeit von der Zeit t aufgefasst. Der Abstand der beiden Flugzeuge zum Zeitpunkt t wird durch $\vert f_1(t) - f_2(t) \vert$ beschrieben. Nach Definition des Abstandes als Wurzel aus der Summe der Quadrate der Komponenten hat die Abstandsfunktion genau dann einen Extremwert, wenn der Radikand extremal wird. Da der Radikand eine quadratische Funktion in t ist, hat er nur ein Extremwert. Aufgrund des Kontextes der Aufgabe kann es nur ein Minimum sein, denn die Flugzeuge bewegen sich während ihres Fluges voneinander weg. Liegt die Extremstelle nicht im Beobachtungszeitraum, so gibt es ein eindeutig bestimmtes (Rand-) Minimum – einer der beiden Randwerte. *Hinweis: Auch ohne Erwähnung des Randminimums sollte volle Punktzahl gegeben werden. Um die Formulierung nicht zu kompliziert zu machen, wurde die Aufgabenstellung nicht präzisiert.*			
	• Setzt man in der Geradengleichung von $F1$ aus dem Aufgabenteil a) $k = 4$, so erhält man den Punkt $F1_3(5 \vert 6 \vert 1{,}6)$, an dem das Flugzeug nach einer Minute ist. Damit lässt sich die Geradengleichung auf die Form $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} + k(\overrightarrow{F1_1\, F1_3}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1{,}2 \end{pmatrix}$, wobei k in Minuten angegeben wird. Eine Geradengleichung für die Flugbahn des zweiten Flugzeugs ist $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3{,}7 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, wobei l (noch) nicht in Minuten angegeben wird. Dazu wird ein Richtungsvektor gesucht, der die gleiche Richtung wie der Ursprüngliche aufweist, aber die Länge 5 (km) hat. $\left\vert \overrightarrow{f2} \right\vert = \sqrt{41}$, also hat $\frac{5}{\sqrt{41}} \overrightarrow{f2} = \frac{5\sqrt{41}}{42} \overrightarrow{f2}$ die Länge 5 und man erhält $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3{,}7 \end{pmatrix} + l \frac{5}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Geradengleichung, wobei l in Minuten angegeben wird. Durch $f1(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1{,}6 \end{pmatrix}$ und $f2(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3{,}7 \end{pmatrix} + t \frac{5}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhält man zwei Funktionen, die jeweils den Ort der Flugzeuge zum Zeitpunkt t ausgeben, wobei t in Minuten angegeben wird. $ab(t) := \vert f1(t) - f2(t) \vert$ gibt den Abstand der beiden Flugzeuge zum Zeitpunkt t an. Zur Bestimmung des minimalen Abstandes wird die erste Ableitung davon gebildet und gleich null gesetzt. Man erhält als Nullstelle der ersten Ableitung $t \approx -0{,}2673$			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Das Minimum liegt außerhalb des Beobachtungszeitraumes, sodass die gesuchten Werte am Rand des Beobachtungszeitraumes liegen. Für $t = 0$ erhält man das Minimum mit $ab(0) \approx 4{,}9$ und für $t = 2$ erhält man ein Maximum mit $ab(2) \approx 11{,}3$: Der kleinste Abstand der beiden Flugzeuge beträgt etwas 4,9 km und größte Abstand im Beobachtungszeitraum beträgt etwa 11,3 km.		20	
c)	• Es ist $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3{,}7 \end{pmatrix} + l \frac{5}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu lösen. Diese Gleichung hat aber keine Lösung, sodass die beiden Flugbahnen sich nicht schneiden. • Wenn die beiden Punkte genau senkrecht übereinander liegen, so müssen die x_1- und die x_2-Komponente übereinstimmen. Es ist also das Gleichungssystem $\begin{matrix} -1+6k=-3+2l \\ 2+4k=-1+6l \end{matrix}$ zu lösen. Als Lösung erhält man $k=-\frac{3}{14}$ und $l=\frac{5}{14}$, sodass der Punkt P_1 auf der Flugbahn $F1$ die Koordinaten $\left(-\frac{16}{7} \mid \frac{8}{7} \mid \frac{1}{7}\right)$ und der Punkt P_2 auf der Flugbahn $F2$ die Koordinaten $\left(-\frac{16}{7} \mid \frac{8}{7} \mid \frac{142}{35}\right)$ hat. Der Abstand beträgt $\frac{142}{35} - \frac{1}{7} = \frac{137}{35} \approx 3{,}9$. Die beiden Punkte haben einen Abstand von ungefähr 3,9 km. • Es ist zu untersuchen, ob der Verbindungsvektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ senkrecht auf den Flugbahnen von $F1$ und $F2$ steht. Z. B. ist das Skalarprodukt $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1{,}6 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = -\frac{822}{175} \neq 0$, also stehen die beiden Vektoren nicht senkrecht aufeinander.	5	15	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
d)	Es ist er Schnittpunkt der Flugbahn mit der (Halb-)Kugel zu bestimmen: In die Kugelgleichung $(x_1-(-3))^2+(x_2-1{,}5)^2+(x_3-0)^2=90^2$ werden die Koordinaten der Flugbahn von $F1$ eingesetzt: $\left(\frac{3}{2}k-1+3\right)^2+\left((k+2)-1{,}5\right)^2+\left(\frac{3}{10}k\right)^2=90^2$. Mithilfe des solve-Befehls erhält man die beiden Lösungen $k\approx 48{,}16$ oder $k\approx -50{,}33$. Die negative Lösung kommt nicht in Frage, da der Punkt unter der Erdoberfläche liegt. Die positive Lösung eingesetzt ergibt ungefähr den Punkt $(71{,}2\,\vert\,50{,}2\,\vert\,14{,}8)$. Geht man von einer gradlinigen Flugbewegung aus, so ist der „Startpunkt“ zu bestimmen. In der Geradengleichung für die Flugbahn aus dem Aufgabenteil b) ist k so zu bestimmen, dass die x_3-Koordinate null wird. Z. B. mithilfe des solve-Befehls erhält man aus $0{,}4+k\cdot 1{,}2=0$ die Lösung $k=-\frac{1}{3}$. Dieses wird in f_1 eingesetzt und man erhält $\left(-3\,\vert\,\frac{2}{3}\,\vert\,0\right)$ als Startpunkt. Mithilfe der Betragsfunktion erhält man $\left\vert(71{,}2\,\vert\,50{,}2\,\vert\,14{,}8)-\left(-3\,\vert\,\frac{2}{3}\,\vert\,0\right)\right\vert\approx 90{,}45327673$. Das Flugzeug $F1$ fliegt also etwa 90,5 km im Überwachungsbereich des Radars.		15	
e)	• Das Flugzeug befindet sich irgendwo auf der (Halb-) Kugel um $R1$ mit dem Radius 47 und gleichzeitig irgendwo auf dem auf der (Halb-) Kugel um $R2$ mit dem Radius 35. Halbkugeln deshalb, weil die Erdoberfläche eine natürliche Grenze bildet. Das Schnittgebilde beider Kugeln ist nicht leer, da der Abstand beider Kugelmittelpunkte voneinander mit ungefähr 20,2 km geringer als der kleinste Kugelradius ist. Das Schnittgebilde zweier Kugeln ist normalerweise ein Kreis, aufgrund der Gegebenheiten ist es ein Halbkreis. • Die entsprechenden Kugelgleichungen sind: $k_1=(x_1+5)^2+(x_2-7)^2+(x_3-0)^2=47^2$ $k_2=(x_1-12)^2+(x_2+4)^2+(x_3-0)^2=35^2$. Löst man k_1-k_2, so erhält man: $x_1^2-7x_1+x_2^2-3x_2+x_3^2=1600$. Setzt man $x_3=0$, so bekommt man eine Bedingung für die beiden Punkte des Halbkreises auf der Erdoberfläche $x_1^2-7x_1+x_2^2-3x_2=1600$ (I) Aus k_1-k_2 folgt $34x_1-22x_2-86=984$. Umgeformt nach x_1 ergibt sich: $x_1=\frac{11x_2+535}{17}$. Dieses Ergebnis wird in (I) eingesetzt und man erhält nach einer entsprechenden Vereinfachung eine Gleichung nur in Abhängigkeit von x_2.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Diese Gleichung wird nach x_2 aufgelöst und man erhält die beiden Lösungen $x_{21} = \frac{119 \cdot \sqrt{8569}}{410} - \frac{117}{10}$ und $x_{22} = -\frac{119 \cdot \sqrt{8569}}{410} - \frac{117}{10}$ $x_{21} \approx 15{,}16755682$ und $x_{22} \approx -38.56755682$ Damit erhält man die beiden entsprechenden x_1-Koordinaten $x_{11} = \frac{239}{10} + \frac{\sqrt{8569}}{410}$ und $x_{12} = \frac{239}{10} - \frac{\sqrt{8569}}{410}$ $x_{11} \approx 41{,}28488971$ und $x_{12} \approx 6{,}515110289$ Insgesamt erhält man die beiden Punkte $H_1(41{,}28488971 \mid 15.16755682 \mid 0)$ und $H_2(6{,}515110289 \mid -38.56755682 \mid 0)$ Der Abstand beider Punkte berechnet man mittels der Abstandfunktion zu $64{,}00312492 \approx 64{,}0$, sodass der Radius des Halbreises etwa 32 km beträgt. Der Mittelpunkt des Halbkreises liegt in der Mitte beider Punkte, also bei $M(23{,}9 \mid -11{,}7 \mid 0)$. • Die Ebene bestimmt sich aus dem Mittelpunkt *M*, dem Richtungsvektor $\overrightarrow{MH_1}$ und dem Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, denn die Kugelmittelpunkte liegen beide auf der bene der Erdoberfläche. So ist der Halbkreis auch senkrecht zur Erdoberfläche. Insgesamt ergibt sich die Ebene zu $\begin{pmatrix} 23{,}9 \\ -11{,}7 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 17{,}4 \\ 26{,}9 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$		5	20
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

LA/AG 2

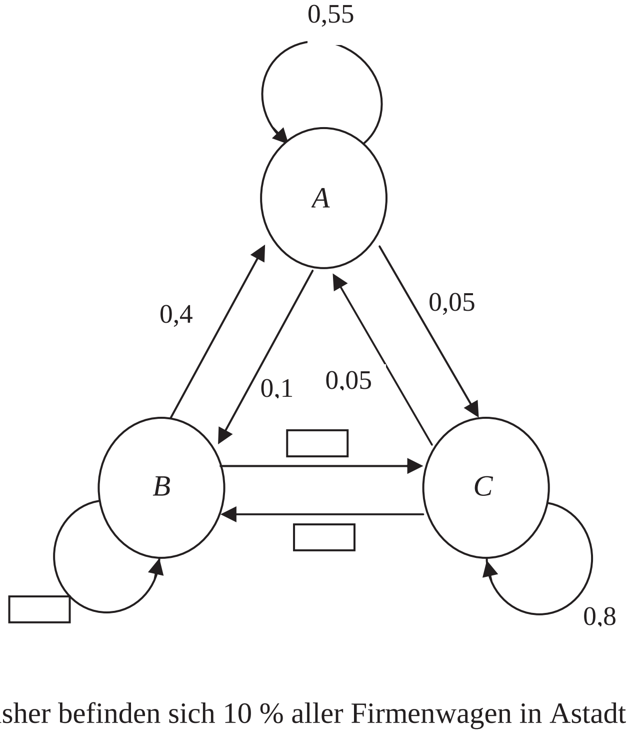
II.2 Mietwagenfirma

Die Mietwagenfirma „Klapperkiste" betreibt Filialen an den drei verschiedenen Standorten Astadt (*A*), Benest (*B*) und Cedorf (*C*). Bislang mussten die Wagen immer dort abgegeben werden, wo sie ausgeliehen wurden. Aus ökonomischen Gründen möchte die Firmenleitung die Rückgabe der ausgeliehenen Wagen an einer beliebigen Firmenfiliale zulassen.

Mithilfe einer repräsentativen Kundenumfrage möchte man klären, ob dieses Angebot angenommen werden würde. Die Befragungsergebnisse sind teilweise in dem Übergangsgraphen festgehalten.
Der Pfeil gibt für jede Filiale an, wie hoch der Anteil der Fahrzeuge dieser Filiale ist, die abends an ihrem Ausleih-Ort zurückgegeben bzw. an einen der beiden anderen Standorte wechseln würden.
(Vereinfachend wird angenommen, dass alle ausgeliehenen Wagen abends zurückgebracht werden.)

a) Zum Übergangsgraph gehört die Übergangsmatrix M .

- Ergänzen Sie die fehlenden Werte im Graphen mithilfe der Übergangsmatrix M .
- Beschreiben und interpretieren Sie die Bedeutung der fehlenden Werte im Kontext der Aufgabenstellung.
- Begründen Sie aus dem Kontext der Aufgabe, dass die Summe der Werte einer Spalte immer 1 ergeben muss. **15 P**



$$M = \begin{pmatrix} \frac{11}{20} & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} \\ \frac{2}{5} & \frac{7}{10} & \frac{3}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Bisher befinden sich 10 % aller Firmenwagen in Astadt (*A*), 60 % der Wagen in Benest (*B*) und die restlichen Autos in Cedorf (*C*). Die Firma besitzt insgesamt 4200 Leihwagen.

b) Geben Sie die Wagenverteilung $\overrightarrow{p_0} = \begin{pmatrix} p_A \\ p_B \\ p_C \end{pmatrix}$ für den Tag vor der möglichen Einführung des neuen Angebots an. **5 P**

c) Ermitteln Sie die Wagenverteilung $\overrightarrow{p_1}$, die nach dem Modell für den folgenden Tag zu erwarten wäre. **10 P**

d) Bestätigen Sie, dass nach den Umfrageergebnissen am Einführungstag mehr als ein Viertel der Wagen in einer anderen Filiale abgegeben werden würden. **10 P**

e) Eine Filiale wird geschlossen, wenn sich in ihr dauerhaft weniger als 300 Wagen befinden. Untersuchen und beurteilen Sie, ob es nach diesem Modell zur Schließung einer der Filialen kommt. (Probieren kann hilfreich sein, ist aber nicht ausreichend.) **15 P**

f) Die Firmenleitung erwartet nach Einführung der neuen Rückgabebedingungen eine gesteigerte Nachfrage der Leihwagen. Für diesen Fall plant sie, im kommenden Jahr weitere 300 Wagen zuzukaufen. Um eine optimale Ausnutzung der Stellflächen in den Filialen zu gewährleisten, untersucht man mithilfe des Modells, ob bei einer bestimmten Ausgangsverteilung bei gleichem Wechselverhalten der Kunden der Wagenbestand in den Filialen annähernd stabil bleiben würde.

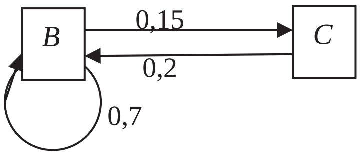
- Begründen Sie, dass dies erreicht werden kann.
- Ermitteln Sie einen geeigneten Startvektor $\overrightarrow{p_S}$.
- Vergleichen mit der Lösung aus Teil e) und interpretieren Sie Ihr Ergebnis. **20 P**

g) Am Abend nach der Einführung des neuen Rückgabemodells stellt man fest, dass sich in der Filiale A nur 400 der 4200 Firmenwagen befinden, während die Anzahl der in B abgestellten Wagen genau mit der vorher berechneten Anzahl im Aufgabenteil c) übereinstimmt. Man geht deshalb von einer leicht veränderten Wechselmatrix M_{neu} aus.

$$M_{neu} = \begin{pmatrix} [\ ] & 0{,}1 & 0{,}05 \\ 0{,}4 & 0{,}7 & 0{,}15 \\ [\ ] & 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

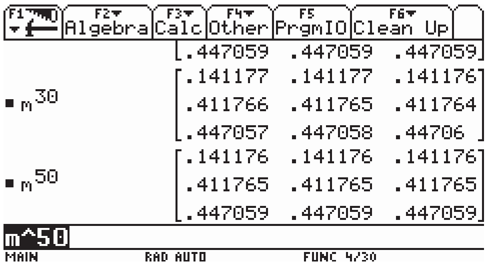
- Bestimmen Sie die fehlenden Matrixwerte.
- Bestätigen Sie mithilfe der Übergangsmatrix M_{neu} , dass sich die Anzahl der am ersten Abend erwarteten Wagen in Filiale B im Vergleich zum ersten Modell M nicht verändert.
- Untersuchen Sie, ob es nach diesem veränderten Modell zu einer Filialenschließung kommt. **25 P**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	 (Auszug des Graphen) 15 % der in *C* befindlichen Wagen wechseln nach *B* 20 % der in *B* befindlichen Wagen wechseln nach *C* 70 % der in *B* befindlichen Wagen bleiben bzw. kommen wieder nach *B* Die Spaltenkomponenten der Matrix beschreiben das Bleiben oder Wechseln der Wagen der jeweiligen Filiale. Da jeder Wagen abends in einer der Filialen steht, müssen alle Wagen (100%) „verteilt“ werden.	5	10	
b)	4200 Wagen werden anteilig auf die Filialen verteilt, damit ergibt sich: $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 420 \\ 2520 \\ 1260 \end{pmatrix}$	5		
c)	$\vec{p}_1 = M \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,1 & 0,05 \\ 0,4 & 0,7 & 0,15 \\ 0,05 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 420 \\ 2520 \\ 1260 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 546 \\ 2121 \\ 1533 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{A,1} \\ p_{B,1} \\ p_{C,1} \end{pmatrix}.$	10		
d)	Man berechnet z. B. den Anteil der Nichtwechsler $n_w = \frac{M[1,1]\cdot p_A + M[2,2]\cdot p_B + M[3,3]\cdot p_C}{4200} = \frac{3003}{4200} = 71,5\%$ Die Differenz zu 100% ergibt dann 28,5% als Anteil der Wechsler.		10	5

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>

Beim Bilden hoher Potenzen M^n für $n \approx 50$ erkennt man das sich die Matrixwerte kaum noch verändern, d. h., es stellt sich ein stabiler Zustand ein.



Durch Ausmultiplizieren ergibt sich als Autoverteilung $\vec{p}_{50} = M^{50} \cdot \vec{p}_0 \approx \begin{pmatrix} 593 \\ 1729 \\ 1878 \end{pmatrix}$.

Die Vermutung liegt also nahe, dass keine Filiale weniger als 300 Wagen beherbergen wird.
Bestätigt werden kann dies durch die Bestimmung der Eigenwerte mithilfe geeigneter CAS-Operationen oder als Lösung des charakteristischen Polynoms:

$M \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$. Als Eigenwerte ergeben sich $\lambda \in \{0,4104; 0,6396; 1\}$ alle drei (hier gerundeten) Eigenwerte sind reell. Einer ist gleich 1 die anderen sind betragsmäßig kleiner als 1, d. h. die Autoverteilung konvergiert gegen einen Wert ungleich null.

Ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist $\vec{v}_{eig} \approx \begin{pmatrix} 0,2263 \\ 0,6599 \\ 0,7165 \end{pmatrix}$ Ein dazu kollinearer Vektor mit der Komponentensumme 1 wäre ungefähr $\begin{pmatrix} 0,1412 \\ 0,4118 \\ 0,4471 \end{pmatrix}$, daraus ergeben sich dieselben prozentualen Anteile wie oben.

</td><td></td><td>10</td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>f)</td><td>Gelöst werden soll: $\vec{p}_S = M \cdot \vec{p}_S = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,1 & 0,05 \\ 0,4 & 0,7 & 0,15 \\ 0,05 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3158 \cdot t \\ 0,9210 \cdot t \\ t \end{pmatrix}$
Eine Lösung dieses Problems ist also möglich.
Da insgesamt 4500 Wagen verteilt werden sollen, ergibt sich mit $t \approx 2011,76$ eine Autoverteilung (gerundet auf ganze Wagen!) $\vec{p}_S \approx \begin{pmatrix} 635 \\ 1853 \\ 2012 \end{pmatrix}$.
Rechnet man diese Autoverteilung auf ihre prozentualen Anteile der Firmenwagen um, ergibt sich (natürlich, da sich die Matrix – also das Wechselverhalten der Kunden nicht verändert hat) derselbe Vektor wie in Aufgabe (e).</td><td></td><td>15</td><td>5</td></tr>
<tr><td>g)</td><td>Aus dem Ansatz: $M \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} a & 0,1 & 0,05 \\ 0,4 & 0,7 & 0,15 \\ 0,6-a & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 420 \\ 2520 \\ 1260 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ergeben sich die folgenden Werte: $a \approx 0,2024$, $y = 2121$ und $z = 1679$.
Die fehlenden Matrixkomponenten sind also $M_{1,1} \approx 0,2024$ bzw. $M_{3,1} \approx 0,3976$.
Da sich die mittlere Zeile der Matrix und der Startvektor nicht verändert haben, muss die Anzahl der in der Filiale B abgegebenen Wagen gleich dem in Teil (c) berechneten Wert sein.
Für große $n \approx 50$ verändern sich die Potenzen M^n kaum noch. Es ergibt sich $M_{neu}^{50} \cdot \vec{p}_0 \approx \begin{pmatrix} 341 \\ 1590 \\ 2269 \end{pmatrix}$. Auch hier kommt es nicht zur Firmenschließung, denn mit ungefähr 341 Wagen liegt die „schwächste“ Filiale A noch über der gesetzten Grenze.</td><td>5</td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>50</td><td>25</td></tr>
</table>

STOCHASTIK 1

III.1 „Handygefahren“

Um die Unfallgefahr zu verringern, ist in Deutschland die Benutzung eines Handys im Auto durch den Fahrer nur mit einer Freisprecheinrichtung erlaubt. Weil eine gut funktionierende Freisprecheinrichtung aber relativ teuer ist, telefonieren viele Fahrer trotzdem unerlaubt während der Fahrt mit dem Handy.

Im Folgenden soll stets unter „Ein Fahrer telefoniert“ verstanden werden: Dieser Fahrer telefoniert während der Fahrt mit seinem Handy, ohne eine Freisprechanlage zu verwenden (er begeht also eine Ordnungswidrigkeit).

Auf einer belebten Straße soll der Anteil p der Autofahrer untersucht werden, die zum Zeitpunkt einer Kontrolle telefonieren. Der Anteil p hängt von Ort und Zeitpunkt der Kontrolle ab. Dabei wird angenommen, dass die Fahrer sich in ihrem Telefonierverhalten gegenseitig nicht beeinflussen.

a) Berechnen Sie in Abhängigkeit von p die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
- A: Bei 10 vorbeifahrenden Autos telefonieren genau die Fahrer des 3. und des 5. Autos.
- B: Bei 10 vorbeifahrenden Autos telefonieren die Fahrer der ersten vier Autos nicht, aber trotzdem telefonieren genau zwei Fahrer. **10 P**

b)
- Berechnen Sie, wie groß der Anteil p der telefonierenden Fahrer an einer bestimmten Kontrollstelle mindestens sein muss, wenn unter 100 vorbeifahrenden Autos mit mehr als 95% Wahrscheinlichkeit mindestens eines von einem telefonierenden Fahrer gelenkt wird.
- Auf der Schlossallee wird an einem Mittwoch zwischen 15 Uhr und 16 Uhr eine Kontrolle durchgeführt. Während dieser Zeit gelte für den Anteil p jener Fahrer, die zu einem beliebigen Zeitpunkt während dieser Zeitspanne gerade telefonieren, $p = 3\%$.

  Bestimmen Sie die Anzahl der Autos, die mindestens kontrolliert werden müssen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 80 % mindestens einen telefonierenden Fahrer erwischt. **20 P**

c) Nun kontrolliert man auf einer Zufahrt zu einer beliebten Diskothek zwischen 21 Uhr und 23 Uhr. Hier ist die Telefonierwahrscheinlichkeit außergewöhnlich hoch, nämlich $p = 20\ \%$. Die Polizisten wetten untereinander, beim wievielten Auto sie erstmals einen Telefonierer erwischen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass dieses
- beim sechsten,
- beim zehnten,
- nach dem zehnten Auto passiert.

Einer der Polizisten behauptet, dass im Mittel beim fünften Auto der erste Telefonierer zu erwarten ist.
- Beschreiben Sie diese Behauptung mit Begriffen der Stochastik und begründen Sie diese:

  (1) entweder unter Verwendung der Formel $1+2q+3q^2+4q^3+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}=\frac{1}{(1-q)^2}$.

  (2) oder indem Sie erkennen, dass nach dem ersten Auto entweder der erste Telefonierer aufgetreten ist oder die erwartete Anzahl der Autos bis zum ersten Telefonierer sich gegenüber der Situation am Anfang um 1 erhöht hat. **25 P**

d) Nach einigen Unfällen, bei denen Autofahrer telefoniert hatten, will die örtliche Polizei in ihrer Stadt verstärkte Kontrollen durchführen, wenn der Anteil der telefonierenden Autofahrer mehr als 15 % beträgt. Dazu überprüft sie in der Stadt 1000 fahrende Autos.

Bestimmen Sie mithilfe Ihres Rechners oder der Normalverteilung die Anzahl der telefonierenden Fahrer, die die Kontrolle mindestens passieren müssen, um auf einem Signifikanzniveau von 5 % gute Argumente für verstärkte Kontrollen zu haben. **20 P**

e) Wenn bei einer Umfrage 20 % der Befragten angeben, beim Fahren zu telefonieren, so ergeben sich bei einer Kontrolle dennoch viel geringere Anteile. Dieses liegt daran, dass die Telefonierer nicht ständig telefonieren. Um zu einem differenzierteren Bild zu gelangen, ist es erforderlich, Klasseneinteilungen nach der durchschnittlichen (nach wie vor illegalen) Telefonierdauer pro Stunde vorzunehmen. In sehr starker Vereinfachung ergibt sich bei einer Befragung von Autofahrern das folgende Bild, das als repräsentativ gelten möge:

	Wenig	Normal	Viel	Dauernd
Durchschnittliche Telefonierzeit pro Stunde [in Minuten]	5	10	15	30
Anteil der Autofahrer	7 %	10 %	2 %	1%

Ein Autofahrer passiert eine Kontrolle.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er bei der Kontrolle erwischt wird, wenn man weiß, dass er ein Wenigtelefonierer ist.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er gerade telefoniert, wenn man gar nichts über ihn weiß.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er gerade telefoniert, wenn man weiß, dass er ein Telefonierer ist (die Frage also nach der Wahrscheinlichkeit, ob ein Telefonierer erwischt wird).
- Der Autofahrer telefoniert gerade bei der Kontrolle. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei ihm um einen Wenigtelefonierer handelt. **25 P**

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

- $P(A) = p^2 \cdot (1-p)^8$, da die Einzelereignisse unabhängig sind.
- Es gibt $\binom{6}{2}$ Möglichkeiten für die telefonierenden Fahrer. Daher gilt:
$P(B) = \binom{6}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^8 = 15 \cdot p^2 \cdot (1-p)^8$ bzw.
$P(B) = (1-p)^4 \cdot B(6,p,2)$.

</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

- Es ist die Gleichung $(1-p)^{100} = 0{,}05$ zu lösen, also $p \approx 0{,}0295 \approx 3\,\%$
Der Anteil der telefonierenden Fahrer muss über 3% liegen.

Man kann den Lösungsweg auch formaler beschreiben:
Ist X die Zufallsgröße „Anzahl der telefonierenden Fahrer“, so ist X binomialverteilt. Daher gilt:
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^{100} > 0{,}95 \Leftrightarrow (1-p)^{100} < 0{,}05 \Leftrightarrow$
$(1-p) < \sqrt[100]{0{,}05} \Leftrightarrow p > 1 - \sqrt[100]{0{,}05} \approx 0{,}0295$
Im ersten Fall muss der Anteil der telefonierenden Fahrer über 3% liegen.
- Es ist die Gleichung $0{,}97^n = 0{,}2$ $(0 < p < 1)$ zu lösen, also
$n = \dfrac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}97} \approx 52{,}8$
Es müssen also mindestens 53 Autos kontrolliert werden.

</td><td>5</td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

- $P(\text{"beim sechsten Auto"}) = 0{,}8^5 \cdot 0{,}2 \approx 6{,}55\%$,
- $P(\text{"beim zehnten Auto"}) = 0{,}8^9 \cdot 0{,}2 \approx 2{,}68\%$,
- $P(\text{"nach dem zehnten Auto"}) = 0{,}8^{10} \approx 10{,}74\%$,
- Es ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

k	***P*(*X* = *k*)**
1	$0{,}2$
2	$0{,}2 \cdot 0{,}8$
3	$0{,}2 \cdot 0{,}8^2$
4	$0{,}2 \cdot 0{,}8^3$
⋮	⋮

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>
Die Anzahl N der Kontrollen, bis die Polizisten zum ersten Mal einen Telefonierer erwischen, ist eine Zufallsvariable. Die Behauptung des Polizisten kann dann präzisiert werden zu $E(N) = 5$.

<u>Weg (1):</u>
$E(N) =$
$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^{k-1} = 0{,}2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 0{,}8^{k-1} = 0{,}2 \cdot \frac{1}{(1-0{,}8)^2} = 5$
Der Erwartungswert für die Anzahl der zu kontrollierenden Autos, bis man erstmals einen Telefonierer erwischt, beträgt also tatsächlich 5.

<u>Weg (2):</u> Es sei $e = E(N)$ der zu berechnende Erwartungswert. Die gemachte Beobachtung kann wie folgt in eine lineare Gleichung übersetzt werden: $e = 1 \cdot 0{,}2 + (1+e) \cdot 0{,}8$ mit der Lösung $e = 5$
</td><td>10</td><td>10</td><td>5</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>
Es sei X die Anzahl der Telefonierer, die die Kontrolle passieren.
Nullhypothese H_0: „Der Anteil der Telefonierer beträgt höchstens 15%“. Fehler 1. Art: H_0 wird verworfen, obwohl richtig. Die Wahrscheinlichkeit für diesen Fehler soll höchstens 5% betragen. Ist k die Anzahl der telefonierenden Fahrer, die man mindestens beobachten muss, so soll also gelten
$P(X \geq k \mid H_0) \leq 5\%$ und $P(X \geq k-1 \mid H_0) > 5\%$. Dies ist äquivalent zu:
$P(X \leq k-1 \mid H_0) \geq 95\%$ und $P(X \leq k-2 \mid H_0) < 95\%$.
Durch Ausprobieren erhält man :
$P(X \leq 168 \mid H_0) \approx 0{,}948 \leq 95\%$ und $P(X \leq 169 \mid H_0) \approx 0{,}956 \geq 95\%$.
Also ist $k = 170$.
Die Polizisten müssen im Rahmen der hier entwickelten Logik also mindestens 170 Telefonierer beobachten, um (bei Signifikanzniveau von 5 %) gute Argumente für verstärkte Kontrollen zu haben.
Über den Weg mit der Approximation durch die Normalverteilung löst man die Gleichung $\Phi\left(\frac{k-149{,}5}{\sqrt{127{,}5}}\right) = 0{,}95$. Es folgt: $\frac{k-149{,}5}{\sqrt{127{,}5}} = 1{,}645$
$\Leftrightarrow k \approx 169$.
</td><td></td><td>15</td><td>5</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	Es sei T das Ereignis: „Der Autofahrer telefoniert zum Zeitpunkt der Kontrolle“ W das Ereignis „Der Autofahrer ist Wenigtelefonierer“. $P(W) = 7\%$ N das Ereignis „Der Autofahrer ist Normaltelefonierer“. $P(N) = 10\%$ V das Ereignis „Der Autofahrer ist Vieltelefonierer“. $P(V) = 2\%$ D das Ereignis „Der Autofahrer ist Dauertelefonierer“. $P(D) = 1\%$ H das Ereignis „Der Autofahrer ist Telefonierer“. $P(H) = 20\%$ • Da der Autofahrer als Wenigtelefonierer durchschnittlich 5 Minuten pro Stunde telefoniert, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass er gerade zum Zeitpunkt der Kontrolle telefoniert: $P(T\mid W) = \frac{5}{60} = \frac{1}{12} \approx 8{,}33\%$. • Mit dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit oder mit Hilfe eines Baumdiagramms erhält man: $P(T) = P(W)\cdot P(T\mid W) + P(N)\cdot P(T\mid N) + P(V)\cdot P(T\mid V) + P(D)\cdot P(T\mid D)$ $= \frac{7}{100}\cdot\frac{1}{12} + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{50}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{100}\cdot\frac{1}{2} = \frac{13}{400} \approx 3{,}3\ \%$ Die Wahrscheinlichkeit, dass der Autofahrer gerade telefoniert, beträgt ungefähr 3 %. • Gesucht ist $P(T\|H)$. Es gilt: $P(T\|H) = \frac{P(T\cap H)}{P(H)} = \frac{P(T)}{P(H)} = \frac{\frac{13}{400}}{\frac{1}{5}} = \frac{13}{80} \approx 16\ \%.$ Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Telefonierer erwischt wird, beträgt also ca. 16 %. • Es ist $P(W\|T)$ zu bestimmen. Dies kann entweder mit dem Satz von Bayes geschehen oder unter Verwendung des vorvorigen Ergebnisses (, das gerade der „Bayes-Nenner“ ist): $P(W\mid T) = \frac{P(W)\cdot P(T\mid W)}{P(T)} = \frac{\frac{7}{100}\cdot\frac{1}{12}}{\frac{13}{400}} = \frac{7}{39} \approx 18\ \%$ Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei einer erwischten Person um einen Wenigtelefonierer handelt, liegt bei 18 % .		15	10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

STOCHASTIK 2

III.2 Lübecker Verkehrsbetriebe

Öffentliche Verkehrsbetriebe sind in der Regel hoch defizitär. Daran haben auch Schwarzfahrer ihren Anteil. So ist es erfreulich, dass der Anteil der Schwarzfahrer im Busverkehr der Lübecker Verkehrsbetriebe auf 8 % gesenkt werden konnte, weil alle Fahrgäste vorn beim Fahrer einsteigen müssen. Ein Kontrolleurteam kann pro Tag etwa 800 Fahrgäste überprüfen, die Personalien der entdeckten Schwarzfahrer aufnehmen und die Strafgebühr in Höhe von 40 € kassieren.

a) • Beschreiben Sie, unter welchen Umständen es sinnvoll ist, unter 800 kontrollierten Fahrgästen die Anzahl *X* der Fahrgäste ohne gültigen Fahrschein als binomialverteilt anzunehmen.
   • Geben Sie eine Situation an, in der diese Voraussetzungen für eine Binomialverteilung nicht erfüllt sind. **10 P**

In den Aufgabenteilen b) bis d) sei die in a) genannte Zufallsvariable *X* binomialverteilt mit $p = 0{,}08$.

b) • Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei von 50 Fahrgästen keinen Fahrschein besitzen.
   • Bestimmen Sie die Gruppengröße, ab der die Wahrscheinlichkeit, dass kein Schwarzfahrer dabei ist, unter 10 % sinkt. **20 P**

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 800 kontrollierten Fahrgästen höchstens 50 Schwarzfahrer befinden. Bestimmen Sie diese Wahrscheinlichkeit zusätzlich näherungsweise mithilfe der Annäherung durch die Normalverteilung und vergleichen Sie beide Ergebnisse. **15 P**

d) Es werden nun die zwei Personengruppen betrachtet: Fahrgäste ohne Fahrschein (*S*) und Fahrgäste mit gültigem Fahrschein (*F*). Dabei gilt nach wie vor die vor Schwarzfahrerquote von $p = 8$ %. Von den Schwarzfahrern sind 60 % unter 30 Jahren (Ereignis *U*) und von den Fahrgästen mit gültigem Fahrschein sind 50 % unter 30 Jahren.

   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass
   • ein unter 30-Jähriger ein Schwarzfahrer ist,
   • ein über 30-Jähriger ein Schwarzfahrer ist,
   • ein über 30-Jähriger kein Schwarzfahrer ist. **25 P**

e) Durch die Möglichkeit, einen Fahrschein mit dem Handy zu kaufen, soll der Anteil der Schwarzfahrer weiter gesenkt werden (fehlendes Kleingeld fällt als Grund zum Schwarzfahren weg). Dieses mit hohem Verwaltungsaufwand verbundene Angebot wird realisiert und von vielen Kunden gern angenommen. Es lohnt sich für die Stadtwerke Lübeck aber finanziell nur dann, wenn sich der Anteil der Schwarzfahrer dadurch auf unter 6 % reduziert. Dazu soll eine Untersuchung von 2000 Fahrgästen durchgeführt werden.
Verwenden Sie für alle drei Punkte dieses Aufgabenteils das übliche Signifikanzniveau 5%:

- Ein Mitarbeiter der Lübecker Verkehrsbetriebe möchte zeigen, dass das Angebot sich lohnt. Untersuchen Sie für einen geplanten Hypothesentest, wie viele Personen ohne Fahrschein bei der Kontrolle höchstens entdeckt werden dürfen, damit der Mitarbeiter begründet behaupten kann, dass sich das Angebot lohnt.
- Ein anderer, eher skeptischer Mitarbeiter ist überzeugt, dass das Handy-Angebot nicht einmal zu irgendeiner Senkung der Schwarzfahrerquote geführt hat. Beurteilen Sie, wie er die Daten auswerten würde.
- Tatsächlich werden 139 Schwarzfahrer bei der Kontrolle entdeckt. Eigentlich müssten nun beide Mitarbeiter frustriert auf einen neuen Test mit einer größeren Stichprobe drängen.
  Aber es ist in der Statistik nicht unüblich – wenn auch logisch nicht ganz korrekt, im Nachhinein das Testdesign zu ändern, um doch noch zu schwächeren signifikanten Aussagen zu kommen (dabei wird so getan, als ob man das Ergebnis noch nicht kennen würde).
  Beurteilen Sie, welche Aussagen die beiden Mitarbeiter – entsprechend ihrem Erkenntnisinteresse – noch begründet treffen könnten. **30 P**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Es wird nur zwischen zwei möglichen Ergebnissen unterschieden werden. Entweder hat ein Fahrgast einen gültigen Fahrschein oder nicht. Die Frage, ob ein Fahrgast einen gültigen Fahrschein hat, muss stochastisch unabhängig von dem Verhalten der (dem Wissen über die) anderen Fahrgäste sein. Unter dieser Voraussetzung ist es sinnvoll X ist als binomialverteilt anzunehmen. Eine Situation, in der diese Verteilung nicht gilt, ist z. B. das Auftreten von Fahrgästen in sozialen Gruppen, bei denen alle keinen Fahrschein haben.	10		
b)	$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \left(0{,}92^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92^{49}\right)$ $\approx 1 - 0{,}01547 - 0{,}06725 = 0{,}9173$. Gesucht wird die kleinste natürliche Zahl n, für die gilt: $0{,}92^n < 0{,}1$. Mithilfe des solve-Befehls folgt: $n > 27{,}6$. Bei einer Gruppe von 28 Personen ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Schwarzfahrer dabei ist, gerade noch unter 10%, bei kleineren Gruppen ist die Wahrscheinlichkeit größer.	10	10	
c)	Direkt mit dem Rechner erhält man $P(X \leq 50) \approx 0{,}0357$. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 800 kontrollierten Fahrgästen nicht mehr als 50 Schwarzfahrer befinden, beträgt weniger als 4%. Für die Approximation mit der Normalverteilung berechnet man: $\sigma = \sqrt{800 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92} = \sqrt{58{,}88} \approx 7{,}673$ (>3) $\quad \mu = np = 64$ Also $P\left(X \leq 50\right) \approx \Phi\left(\frac{50{,}5 - 64}{\sqrt{58{,}88}}\right) \approx \Phi(-1{,}7593) = 1 - \Phi(1{,}7593) \approx 1 - 0{,}961 = 0{,}039$ Die Ergebnisse stimmen annähernd überein.		15	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III

d) 1. Weg: Man übersetzt die Informationen in eine Vierfeldertafel:

	unter 30	über 29	
Schwarzfahrer	**4,8 %**	3,2 %	**8 %**
keine Schwarzfahrer	**46 %**	46 %	92 %
	50,8 %	49,2 %	100 %

Dabei sind die fett unterstrichenen Daten direkt aus den gegebenen Informationen abzuleiten. Daraus ergeben sich dann die anderen Werte in den Feldern.

Es sei U das Ereignis „unter 30 zu sein“ (der Gesamtanteil der unter 30 Jährigen) und S das Ereignis “Schwarzfahrer zu sein“ (der Gesamtanteil der Schwarzfahrer). Mit der Vierfeldertafel kann man die drei Fragen sofort beantworten:

$P(S\,|\,U) = \dfrac{0{,}048}{0{,}508} \approx 9{,}4\%$; $\qquad P(S\,|\,\overline{U}) = \dfrac{0{,}032}{0{,}492} \approx 6{,}5\%$

$P(S\,|\,\overline{U}) = \dfrac{0{,}46}{0{,}492} \approx 93{,}5\%$

2. Weg: Folgende Daten sind bekannt:
$P(S) = 0{,}08$, $P(U\,|\,S) = 60\ \%$, $P(U\,|\,\overline{S}) = 50\ \%$

Mit dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit oder einem Baumdiagramm erhält man:
$P(U) = P(S)\cdot P(U\,|\,S) + P(\overline{S})\cdot P(U\,|\,\overline{S}) = 0{,}08\cdot 0{,}6 + 0{,}92\cdot 0{,}5 = 0{,}508$.

Damit ergeben sich die gesuchten Wahrscheinlichkeiten zu

- $P(S\,|\,U) = \dfrac{P(S)\cdot P(U\,|\,S)}{P(U)} = \dfrac{0{,}08\cdot 0{,}6}{0{,}508} = \dfrac{0{,}048}{0{,}508} \approx 9{,}4\%$
- $P(S\,|\,\overline{U}) = \dfrac{P(S)\cdot P(\overline{U}\,|\,S)}{P(\overline{U})} = \dfrac{P(S)\cdot(1-P(U\,|\,S))}{1-P(U)}$
  $= \dfrac{0{,}08\cdot 0{,}4}{0{,}492} = \dfrac{0{,}032}{0{,}492} \approx 6{,}5\%$

  oder auch

  $P(S\,|\,\overline{U}) = 1 - P(\overline{S}\,|\,\overline{U}) = 1 - \dfrac{P(\overline{S})\cdot P(\overline{U}\,|\,\overline{S})}{P(\overline{U})} = 1 - \dfrac{P(\overline{S})\cdot(1-P(U\,|\,\overline{S}))}{1-P(U)}$
  $= 1 - \dfrac{0{,}92\cdot 0{,}5}{0{,}492} = 1 - \dfrac{0{,}46}{0{,}492} \approx 6{,}5\%$
- $P(\overline{S}\,|\,\overline{U}) = 1 - P(S\,|\,\overline{U}) \approx \dfrac{0{,}46}{0{,}492} \approx 93{,}5\ \%$

I	II	III
	25	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III

e) Der <u>erste Mitarbeiter</u> will begründen, dass p unter 0,06 gesunken ist, er wird deshalb versuchen, $H_0 : p \geq 0{,}06$ zu verwerfen durch einen einseitigen Test:
X sei die Anzahl der Schwarzfahrer unter den 2000 zu kontrollierenden Fahrgästen. Kleine Werte von X sprechen gegen die Nullhypothese, deshalb suchen wir den größten Wert von k, für den gilt: $P(X \leq k \mid H_0) \leq 5\,\%$. Wir betrachten die 2000-0,06-Binomialverteilung, mit deren Hilfe wir diese bedingte Wahrscheinlichkeit nach oben abschätzen können:
Durch Ausprobieren erhält man :
$P\left(X \leq 102 \mid H_0\right) \approx 0{,}047 \leq 5\%$ und $P\left(X \leq 103 \mid H_0\right) \approx 0{,}058 \geq 5\%$.

Wenn $X \leq 102$ könnte der erste Mitarbeiter von Signifikanz (auf dem 5%-Niveau) sprechen, deshalb die Nullhypothese ablehnen und damit begründet behaupten, dass der Schwarzfahreranteil auf unter 6 % gesunken sei.
Alternativ können wir die Binomialverteilung durch eine passende Normalverteilung approximieren, denn es gilt $\mu = np = 2000 \cdot 0{,}06 = 120$

$\sigma = \sqrt{112{,}8} \approx 10{,}62$. Weil $\sigma > 3$ ist, ist die Laplace-Bedingung erfüllt:

$$P(X \leq k) = P\left(\frac{X - \mu + 0{,}5}{\sigma} \leq \frac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma}\right) \approx \Phi\left(\frac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma}\right)$$

Wir suchen also den größten Wert von $k \in \mathbb{N}$, für den $\frac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma} \leq -1{,}64$, das ist k = 102.

Der <u>zweite Mitarbeiter</u> will zeigen, dass das Handy nicht einmal zu irgendeiner Senkung der Schwarzfahrerquote geführt hat, er müsste versuchen, $H_0 : p < 0{,}08$ in einen ebenfalls einseitigen Test zu verwerfen:

Große Werte von X sprechen gegen die Nullhypothese, deshalb suchen wir den kleinsten Wert von k für den gilt: $P(X > k \mid H_0) \leq 5\,\%$.
Wir betrachten die 2000-0,08-Binomialverteilung, mit deren Hilfe wir diese bedingte Wahrscheinlichkeit nach oben abschätzen können.
Wieder durch Ausprobieren erhält man :
$P\left(X > 180 \mid H_0\right) = 1 - P\left(X \leq 180 \mid H_0\right) \approx 0{,}047 \leq 5\%$ und
$P\left(X > 179 \mid H_0\right) = 1 - P\left(X \leq 179 \mid H_0\right) \approx 0{,}056 \geq 5\%$.

Falls $X > 180$, könnte der zweite Mitarbeiter von Signifikanz (auf dem 5%-Niveau) sprechen, deshalb die Nullhypothese ablehnen und damit begründet behaupten, dass der Schwarzfahreranteil nicht einmal unter 8 % gesunken sei.

Falls $102 < X \leq 180$ – also insbesondere bei den tatsächlich ermittelten 139 Schwarzfahrern – hätte keiner der beiden Kontrahenten ein signifikantes Ergebnis, und das Testergebnis ließe keine aus den Daten begründeten neuen Schlüsse zu.

Alternativ ist wieder der Weg über die Annäherung mit der Normalverteilung möglich:

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Es gilt $\mu = np = 2000 \cdot 0{,}08 = 160$ und $\sigma = \sqrt{147{,}2} \approx 12{,}13$. Weil auch hier $\sigma > 3$ (Laplace-Bedingung), können wir wieder die Binomialverteilung durch eine passende Normalverteilung approximieren: $P(X > k) = 1 - P\left(\frac{X - \mu + 0{,}5}{\sigma} \leq \frac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma}\right)$. Wir suchen den kleinsten Wert von $k \in \mathbb{N}$, für den $1 - \Phi\left(\frac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma}\right) \leq 5\,\%$, d.h. den kleinsten Wert von *k*, für den $\Phi\left(\frac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma}\right) \geq 95\,\%$, also $\frac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma} \geq 1{,}64$, das ist $k = 180$. Beide könnten aber ihre Behauptungen abschwächen: Der erste, indem er behauptet, dass immerhin die Quote der Schwarzfahrer überhaupt gesunken sei und der andere, indem er behauptet, dass die Schwarzfahrerquote zumindest nicht kleiner als 0,06 sei. Es müssen dazu alle Argumentationen und Berechnungen wiederholt werden nur mit vertauschten Rollen von *p = 0,06* und *p = 0,08. (Praktisch heißt das lediglich, dass noch zweimal in der Tabelle nachgesehen werden muss, und dass zwei Ungleichungen nochmals umgestellt werden müssen).* Man erhält: Falls $X \leq 140$ könnte nun der erste Mitarbeiter von Signifikanz (auf dem 5%-Niveau) sprechen, deshalb die Nullhypothese ablehnen und damit begründet behaupten, dass der Schwarzfahreranteil auf unter 8 % gesunken sei. Falls $X > 137$, könnte der zweite Mitarbeiter von Signifikanz (auf dem 5%-Niveau) sprechen, deshalb die Nullhypothese ablehnen und damit begründet behaupten, dass der Schwarzfahreranteil aber nicht unter 6 % gesunken sei. Das tatsächlich eingetretene Untersuchungsergebnis $X = 139$ bestätigt in diesem Sinne beide Mitarbeiter, und man kann mit guten Gründen annehmen, dass der tatsächliche Anteil an Schwarzfahrern tatsächlich irgendwo zwischen 6 % und 8 % liegt.		15	15
	Insgesamt 100 BWE	20	65	15