Analysis 1

I.1 Neubesiedlung von Biotopen

Eine Forschergruppe beobachtet in den Tropen die Neubesiedlung von Seen durch bisher in diesen Seen nicht vorhandene Krebsarten (z. B. bei einer Überschwemmung).

a) Ein Team von Biologen hat für ein Forschungsprojekt den Aaba-See ausgewählt, einen See in tropischer Lage mit nahezu gleichen Witterungsbedingungen über das ganze Jahr.
Die Forscher setzen 13 000 Ruderflusskrebse aus. Diese Krebse vermehren sich besonders schnell.

Anhand von Stichproben schätzen die Biologen den jeweiligen Bestand in Monatsabständen. In der Tabelle sind die Daten für einen Beobachtungszeitraum von 7 Monaten angegeben:

Monate	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl der Ruderflusskrebse in Tausend	13	37,4	62,3	78,7	89,9	96,9	100,8	102,5

- Berechnen Sie mithilfe kubischer und logistischer Regression zwei mathematische Modelle (Näherungsfunktionen) zur Beschreibung dieses Krebsbestands.
Hinweis: Wenn Sie hier keine geeigneten Funktionen gefunden haben, so können Sie schon jetzt mit den unten gegebenen Funktionen g und h weiterarbeiten. **10 P**

- Skizzieren Sie die Graphen beider Modelle für $0 \le x \le 24$ in das beigefügte Koordinatensystem. **5 P**

- Entscheiden Sie, welches der beiden Modelle Sie für die Beschreibung des Krebsbestandes am geeignetsten halten. Untersuchen Sie dazu Vorzüge und Nachteile dieser Modelle - einerseits im Beobachtungszeitraum und andererseits auf lange Sicht. **10 P**

Einige Rechner würden im weiteren Verlauf der Aufgabe Probleme mit den gefundenen Funktionen beim Lösen von Gleichungen haben. Arbeiten Sie bitte daher nur noch mit den folgenden leicht vereinfachten Funktionen g und h weiter. Sie sind wie folgt definiert:

$$g(x) = 0{,}1x^3 - 3{,}1x^2 + 30x + 12 \quad \text{und} \quad h(x) = \frac{100e^x}{e^x + 5}$$

x in Monaten und die Funktionswerte in tausend Krebsen

- Bestimmen Sie für beide Modelle die jeweiligen Zeitpunkte innerhalb des Beobachtungszeitraums, bei denen die Wachstumsrate am größten ist. Berechnen Sie diese Wachstumsraten und beschreiben Sie die Ergebnisse in Worten. **20 P**

Für die **Änderungsrate** von Krebsbeständen liegen den Biologen mathematische Modelle vor.
Die Änderungsrate für die Anzahl von Ruderflusskrebsen genügt näherungsweise einer Funktion f_k mit

$$f_k(x) = 90\,000 \cdot \frac{e^{k \cdot x}}{(1+e^{k \cdot x})^2}, \quad k > 0 \text{ und } x \geq 0,\ x \text{ in Monaten} .$$

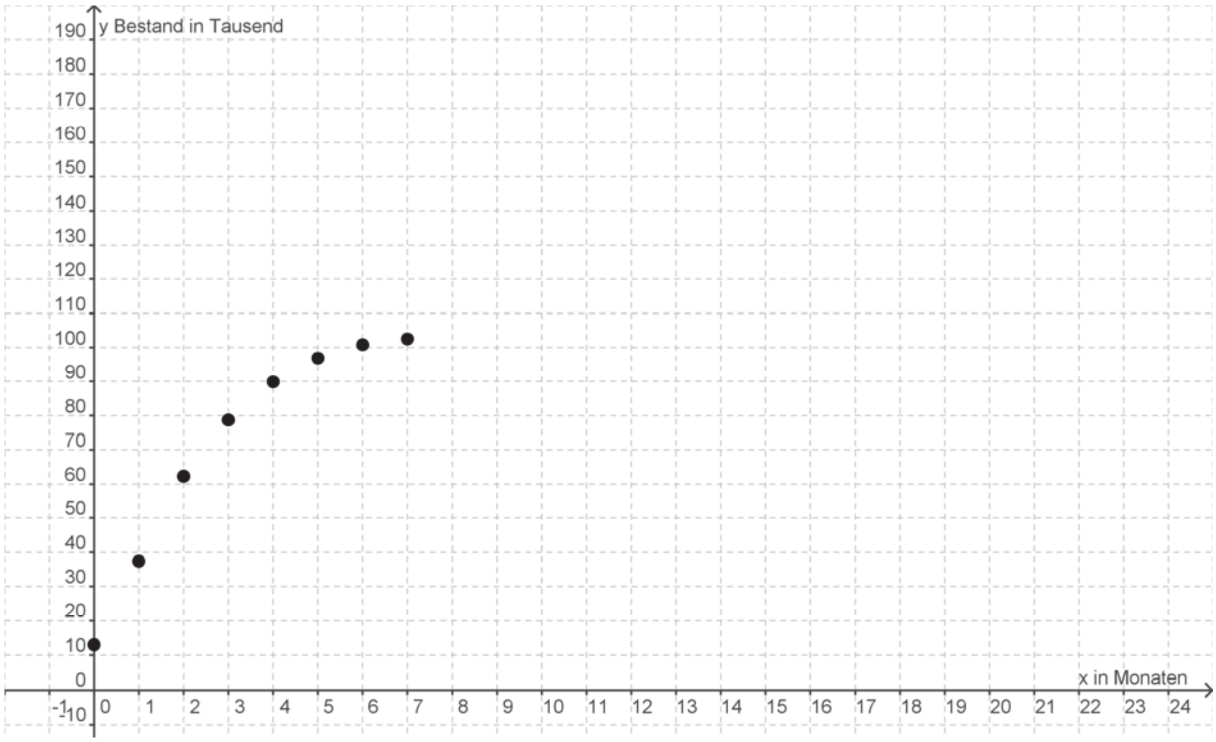
Hinweis: Beachten Sie bitte, dass bei diesen Funktionen die Funktionswerte nicht in tausend Krebsen sondern in Krebsen angegeben sind.

b)
- Betrachten Sie zunächst den Graphen von f_k für $k = 1$ in den ersten 10 Monaten auf Ihrem Bildschirm und skizzieren Sie den Graphen auf Ihrem Bearbeitungsblatt.
  Interpretieren Sie den Verlauf des Graphen von f_1 in Bezug auf den Krebsbestand. **15 P**
- Variieren Sie nun auf dem Bildschirm den Parameter k von 0,5 bis 2.
  Interpretieren Sie den unterschiedlichen Verlauf der Graphen von f_k in Bezug auf den Krebsbestand. **15 P**

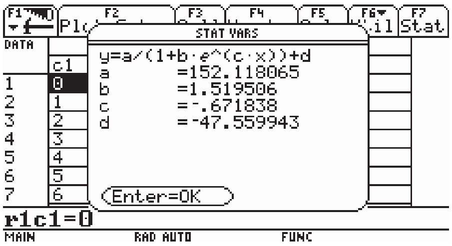
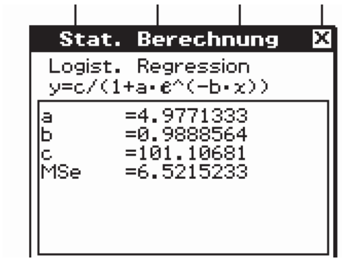
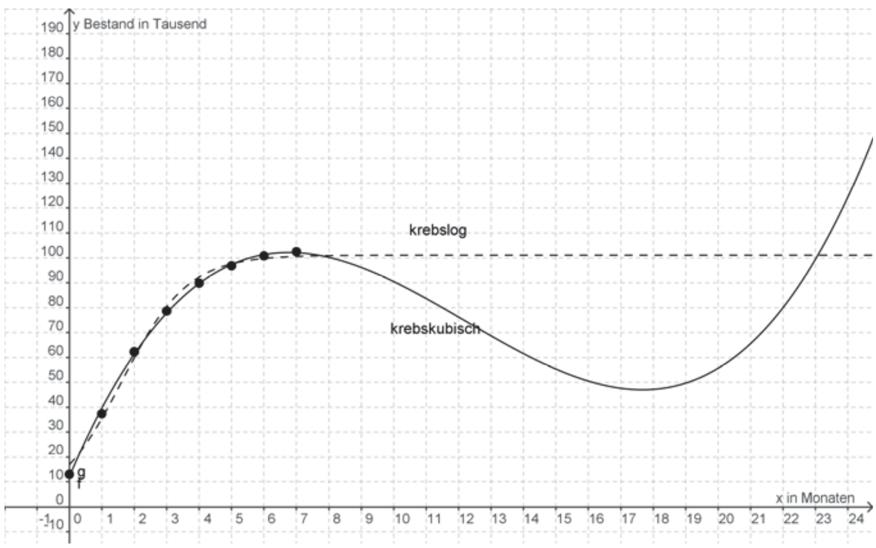
c) Ein Forscherteam arbeitet am tropischen Cuki-See, der keine Ruderflusskrebse aufweist. Nach einer außergewöhnlichen Überschwemmung entdeckt das Team plötzlich diese Krebsart. Drei Monate nach dem ersten Auftauchen der Ruderflusskrebse im Cuki-See schätzen die Forscher aufgrund einiger Stichprobenmessungen den Krebsbestand auf ca. 40 000 Krebse.

- Bestätigen Sie, dass die Forscher für k den Wert $k = 1{,}026$ wählen müssen, sofern der Wert auf drei Nachkommastellen genau angesetzt werden soll. Gehen Sie dabei von der Bestandsfunktion B_k mit $B_k(x) = \int_0^x f_k(z)\,dz$ aus. **10 P**
- Berechnen Sie den Bestand der Ruderflusskrebse gemäß diesem Modell nach dem ersten Viertelmonat. **5 P**
- Bestimmen Sie den Krebsbestand gemäß diesem Modell nach langer Zeit. Berechnen Sie dazu den Ausdruck der Bestandsfunktion explizit (d. h. mithilfe einer Stammfunktion ohne Integralzeichen) und interpretieren Sie den Term.
  Hinweis: Das Ablesen in einer Grafik sowie das Berechnen von Werten mit dem Computer-Algebra-System reichen hier nicht aus. **10 P**

Anlage zur Aufgabe „Neubesiedlung von Biotopen“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	• Die kubische Regression liefert: $krebskubisch(x) = 0{,}085101x^3 - 3{,}11915x^2 + 30{,}5206x + 12{,}1106$. Die logistische Regression über Derive liefert: $krebs\log(x) = \dfrac{4{,}06497 \cdot 10^{7} \cdot e^{0{,}988856\ x}}{4{,}02048 \cdot 10^{5} \cdot e^{0{,}988856 \cdot x} + 2{,}00104 \cdot 10^{6}}$. Mit den Ti Rechnern ergibt sich  Mit dem ClassPad ergibt sich 	10		
	• 	5		
	• Beide Funktionen sind zur Beschreibung des Krebsbestands im Beobachtungszeitraum $[0,7]$ gut geeignet. Der Graph von krebskubisch passt im Beobachtungsbereich $[0,7]$ genauer zu den Messpunkten als der Graph von krebslog. (Dies ist aber nur in einer Derive-Grafik deutlich zu erkennen.) Für große x-Werte nähert sich der Graph von krebslog einer Sättigungsgrenze an, der Graph von krebskubisch fällt zunächst, was sinnvoll sein kann. Nach einem Tiefpunkt bei etwa $x = 18$ wächst der Bestand nach diesem Modell aber ins Unendliche. Das ist nicht realistisch. krebslog muss also favorisiert werden.		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III

- Maximum der Wachstumsrate

  Das kubische Modell:

  Aus $g''(x)=0$ erhält man mithilfe des solve-Befehls $x=\frac{31}{3}$. Der Wendepunkt liegt also nicht im Beobachtungszeitraum. Wegen $g''(0)=-6{,}2$ ist der Graph im Beobachtungszeitraum rechtsgekrümmt und der stärkste Anstieg während des Beobachtungszeitraums liegt bei g als Randmaximum zum Zeitpunkt $t=0$ vor.
  Nach diesem Modell ist die Wachstumsrate zu Beginn am höchsten: Sie beträgt 30.000 Krebse pro Monat.

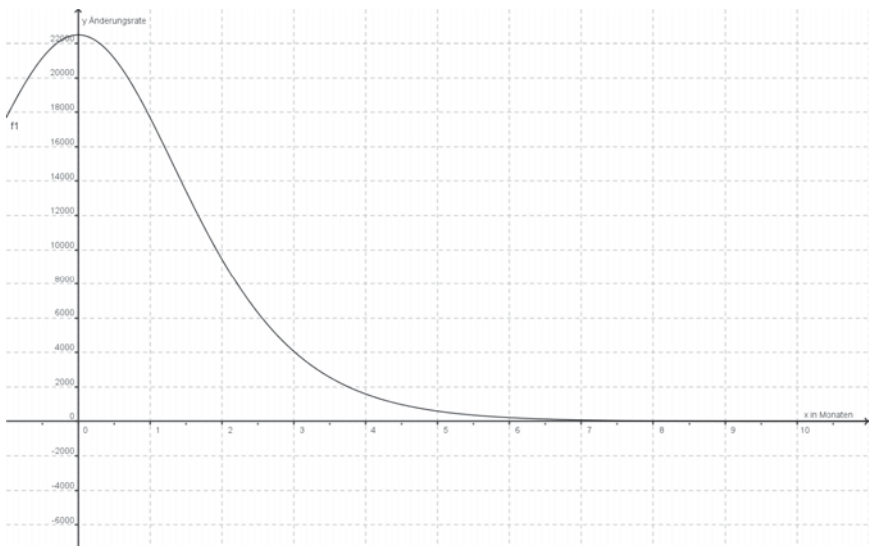
  Das logistische Modell:
  Die größte Wachstumsrate liegt bei der Funktion h im Wendepunkt vor:
  $h''(x)=0$ liefert über den solve-Befehl $x=\ln(5)\approx 1{,}609$ oder $x=\infty$. Für den Beobachtungszeitraum ist nur $x=\ln(5)$ relevant.
  Es gilt $h'(\ln(5))=25$.
  Die größte Wachstumsrate tritt für dieses Modell also nach gut anderthalb Monaten ein. Sie beträgt 25 000 Krebse pro Monat.

  Hinweis: Auch andere Lösungswege wie z. B. durch Ablesen vom Graphen oder aus einer Tabelle sind mit einer sinnvollen Genauigkeit möglich.

Bewertung: II: 10, III: 10

b)

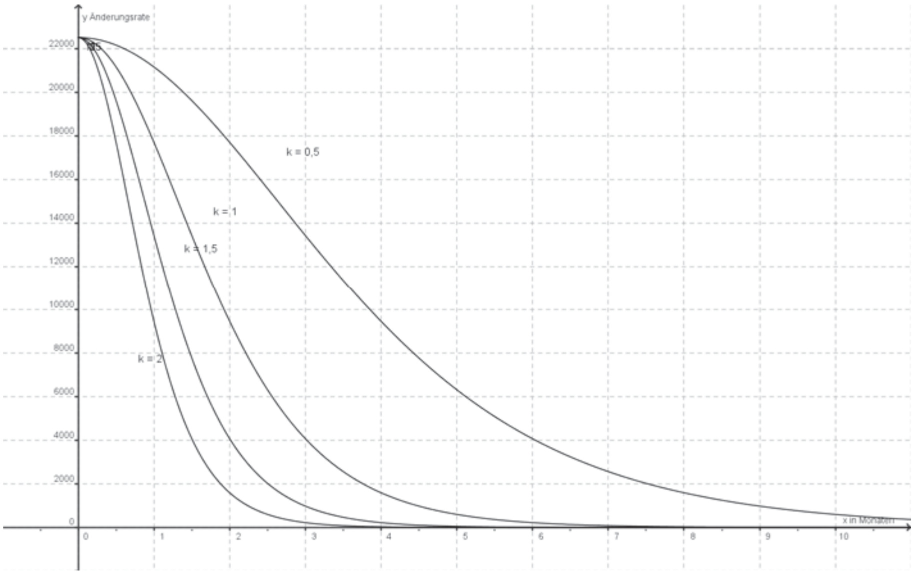
- Skizze für $k=1$.



  Der Bestand der Ruderflusskrebse wächst zu Beginn am stärksten. Der Bestand wächst ständig weiter, das Wachstum wird jedoch immer schwächer. Für große x-Werte nähert sich der Bestand einer Sättigungsgrenze.

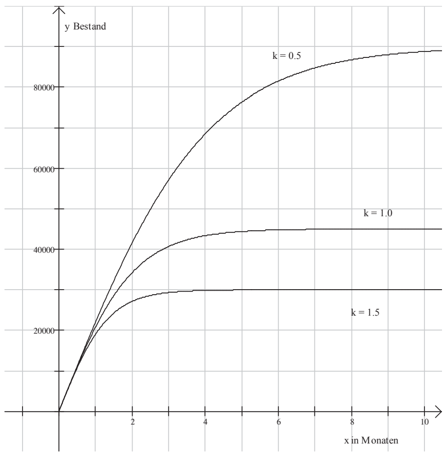
Bewertung: II: 15

- Die Schüler erzeugen ein Bild für k zwischen 0,5 und 2 auf ihrem CAS. Eine Skizze auf dem Papier ist möglich, wird aber nicht verlangt.

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>


Für alle k wächst der Bestand ständig, und zwar zu Beginn am stärksten und für alle k gleich stark. Je größer k ist, umso steiler fällt der Graph der Änderungsrate für kleine x-Werte und umso schneller nähert er sich bei wachsendem x der x-Achse. Je größer k ist, umso schneller wird also das Wachstum gedämpft.
Für alle k ist die Bestandskurve rechtsgekrümmt. Für alle k nähert sich die Bestandskurve einer Horizontalen, der Sättigungsgrenze. Je größer k ist, umso schneller nähert sich die Bestandskurve der Sättigungsgrenze. Je größer k, umso kleiner die Sättigungsgrenze, da der Flächeninhalt unter dem Graphen der Änderungsrate abnimmt.

Dieser Sachverhalt wird in der von den Schülerinnen und Schülern nicht verlangten Skizze dargestellt:



</td><td></td><td>10</td><td>5</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>• B_k kann als Integral definiert oder als expliziter Funktionsterm bestimmt werden.
<u>Weg 1</u>:
Die Fragestellung kann über die Lösung der Gleichung mithilfe des solve-Befehls bearbeitet werden.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung,
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

Es ergibt sich $k \approx \pm 1{,}02592$. Da $k > 0$ vorausgesetzt war, ergibt sich $k \approx 1{,}02592$ und auf drei Stellen gerundet also $k \approx 1{,}026$.

<u>Weg 2</u>:
Die Fragestellung kann über eine Wertetabelle gelöst werden:

<table>
<tr><th>k</th><th>$B_k(3)$</th></tr>
<tr><td>1,025</td><td>40.025,8</td></tr>
<tr><td>1,026</td><td>39.997,9</td></tr>
<tr><td>1,027</td><td>39.970,0</td></tr>
</table>

Für $k = 1{,}026$ wird der Bestand von 40 000 also am genauesten erreicht.

</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

- Der Bestand am Ende des ersten Viertelmonats ergibt sich aus $B_{1,026}(0{,}25) = 5594{,}36$.

  Der Bestand beträgt nach diesem Modell 5 594 Krebse. Nach dem ersten Viertelmonat sind also etwa 5 600 Ruderflusskrebse im Cuki-See.

</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

- Der Ausdruck für die Bestandsfunktion ergibt sich durch Berechnung des Integrals mit dem CAS und durch Einsetzen von $k = 1{,}026$ zum Beispiel in der Form. $B_{1,026}(x) = \dfrac{2\,500\,000 \cdot (e^{1,026 \cdot x} - 1)}{57 \cdot (e^{1,026 \cdot x} + 1)}$.

  Der Krebsbestand nach langer Zeit wird über den Grenzwert der Bestandsfunktion für x „gegen unendlich“ bestimmt:

  $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2\,500\,000 \cdot (e^{1,026 \cdot x} - 1)}{57 \cdot (e^{1,026 \cdot x} + 1)}\right).$$

  Da $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{1,026 \cdot x} - 1) = \lim\limits_{x\to\infty}(e^{1,026 \cdot x} + 1)$ folgt:

  $$\lim_{x\to\infty} B_{1,026}(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{2500000}{57} \cdot 1 = \frac{2500000}{57} \approx 43860.$$

  Nach langer Zeit wird der Krebsbestand gemäß diesem Modell etwa 43 860 Krebse betragen.

</td><td></td><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>60</td><td>20</td></tr>
</table>

Analysis 2

I.2 Zitronenpresse

Eine Zitronenpresse besteht aus der eigentlichen Presse als Deckel und einem Auffanggefäß. Beides wird in der nebenstehenden Abbildung gezeigt.

Die Zitronenpresse ist insgesamt etwa 9 cm hoch; Deckel und Auffanggefäß haben einen Durchmesser von 12 cm.

Als Modellgrundlage für die Form des Deckels wird im Folgenden von der Rotation des Graphen einer Funktion $f_{a;b}$ mit

$$f_{a;b}(x) = ax^4 + bx^2 + 4 \quad (\text{mit } a \neq 0)$$

um die y-Achse ausgegangen.

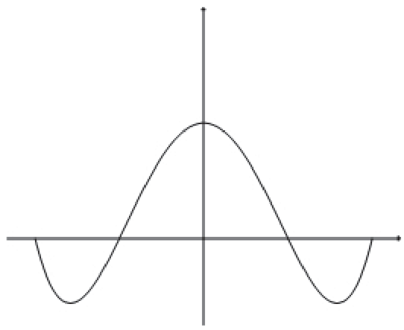
Die Einheit im Koordinatensystem entspricht 1 cm.

a) Bestätigen Sie zunächst, dass jeder Funktionsgraph dieser Funktionenschar einen Extrempunkt auf der y-Achse besitzt, und geben Sie die Koordinaten dieses Punktes an. **5 P**

b) Für $a = 3$ und $-5 \leq b \leq 5$ gibt es drei prinzipiell unterschiedliche Verläufe der Graphen. Skizzieren Sie dafür jeweils ein Beispiel und geben Sie den gewählten Wert für b an. Beschreiben Sie die Unterschiede. **10 P**

c) Bestimmen Sie eine Bedingung für a und b, sodass genau drei Extrempunkte vorliegen.

Bestimmen Sie nunmehr im Hinblick auf eine brauchbare Modellierung der Zitronenpresse eine weitere Bedingung dafür, dass der Extrempunkt auf der y-Achse ein Hochpunkt ist und außerdem genau zwei Tiefpunkte vorliegen. **10 P**



d) Berechnen Sie nun a und b so, dass $x = 3$ und $x = 6$ Nullstellen von $f_{a;b}$ sind; damit soll der Durchmesser der Zitronenpresse sinnvoll berücksichtigt werden. **5 P**

Verwenden Sie für die weiteren Berechnungen:

$$f(x) = \frac{1}{81}x^4 - \frac{5}{9}x^2 + 4 .$$

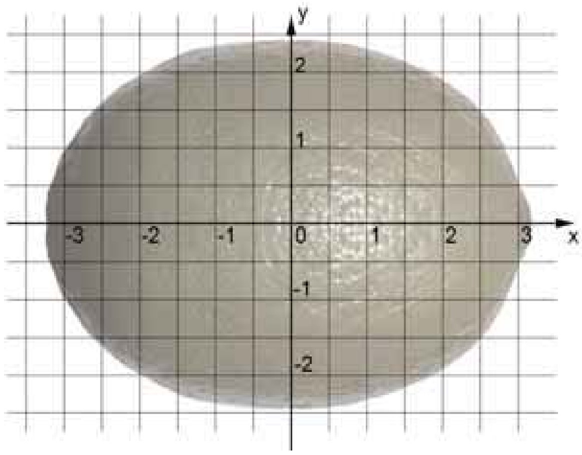
e) Ermitteln Sie die Extrempunkte von f im Intervall $[-6;6]$. **15 P**

f) Das Auffanggefäß hat die Form eines Kegelstumpfes mit der Wandstärke 0,2 cm. Seine innere Mantelfläche wird durch die Rotation der Geraden t um die y-Achse gebildet; t ist dabei die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(6\,|\,0)$. Seine äußere Mantelfläche entsteht durch die Rotation einer entsprechenden Parallelen p zu t um die y-Achse. Der obere Rand des Auffanggefäßes liegt bei $y = 0$, der innere Boden bei $y = -5$.

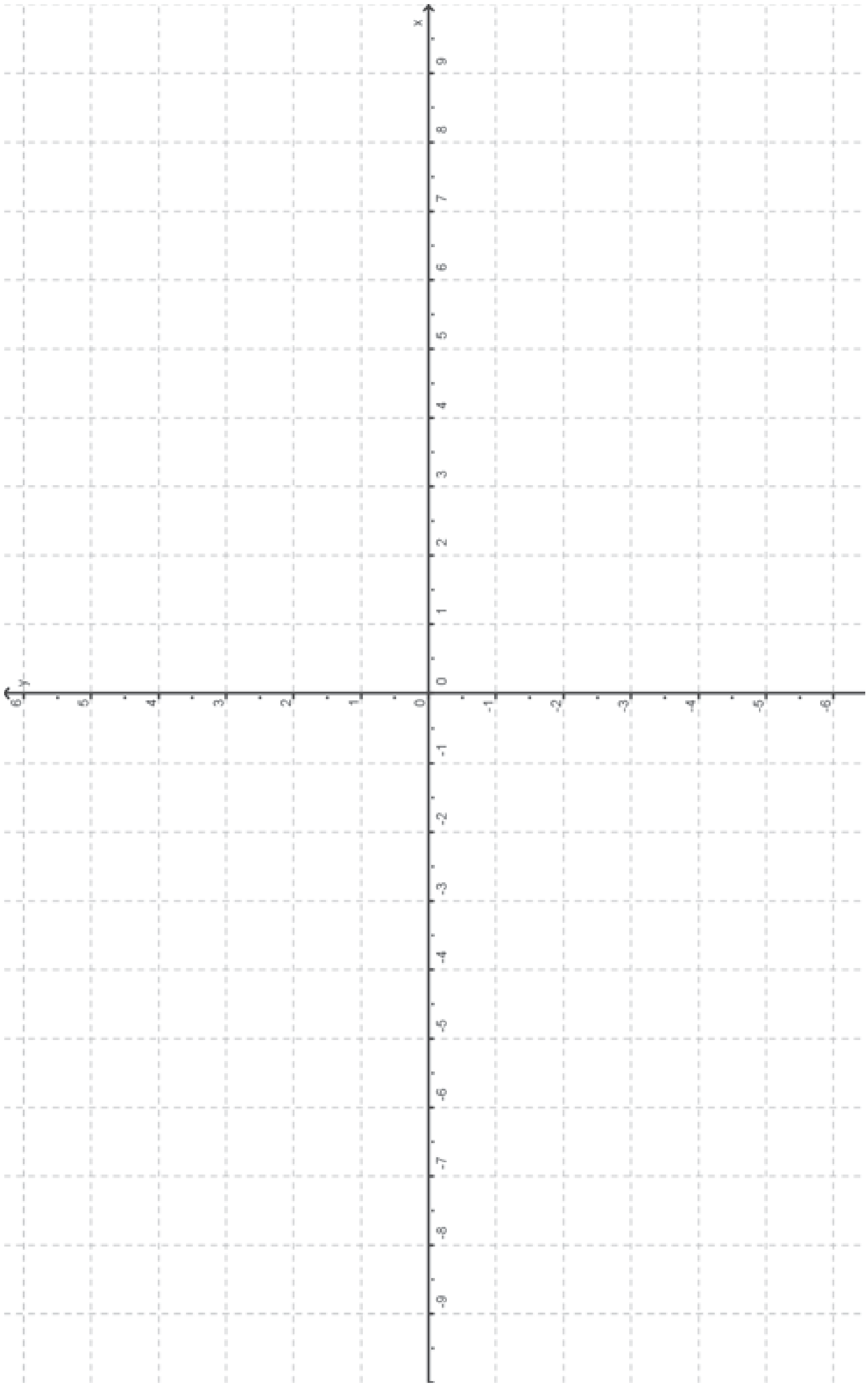
- Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangente t und ihrer Parallelen p. Bestimmen Sie außerdem den inneren Radius r der Bodenfläche des Auffanggefäßes.
  Hinweis: Falls Sie keine Gleichung für die Tangente bzw. deren Parallelen bestimmt haben, so verwenden Sie im Weiteren $t(x) = 4x - 25$ und $p(x) = 4x - 26$. *Dieses sind **nicht** die richtigen Lösungen.* **25 P**
- Berechnen Sie den Materialbedarf für die Herstellung des Auffanggefäßes. **10 P**

g) Mit der Zitronenpresse soll nun eine Zitrone ausgepresst werden.

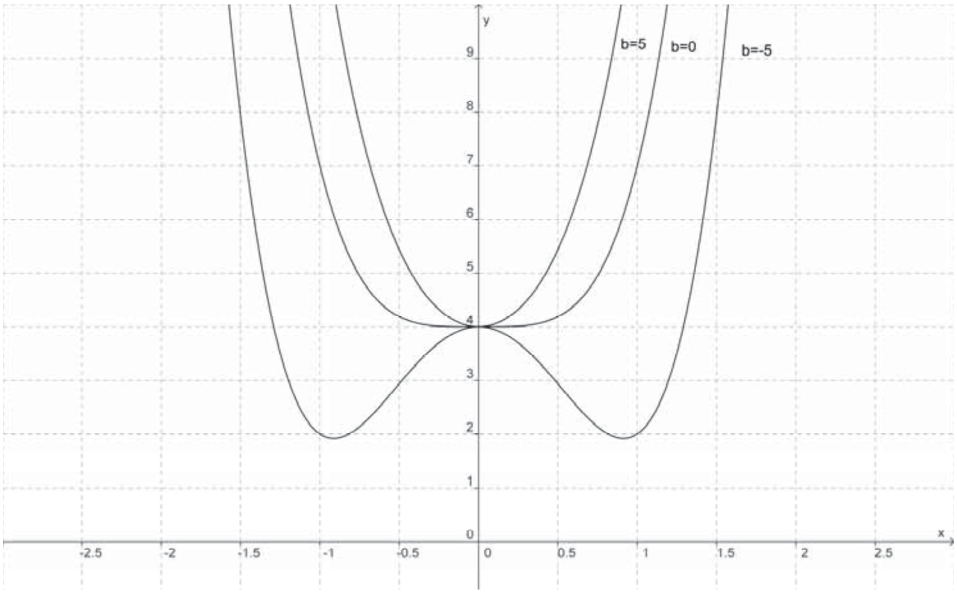
- Kennzeichnen Sie bei der abgebildeten Zitrone etwa zehn Punkte und bestimmen Sie damit eine geeignete Randfunktion. **10 P**
- Bestimmen Sie das Volumen näherungsweise mithilfe Ihrer gefundenen Randfunktion. **10 P**



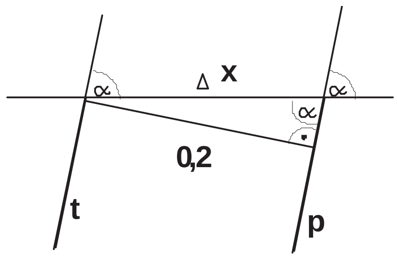
Anlage zur Aufgabe „Zitronenpresse“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Aus der Achsensymmetrie des Graphen folgt, dass jeder Graph auf der *y*-Achse einen Extrempunkt hat, und zwar (0|4).	5		
b)	 Für z. B. $b = -5$ hat die Funktion drei Extrempunkte. Für $b = 5$ und für $b = 0$ haben die Funktion jeweils nur einen Extrempunkt. Aber für $b = 0$ ist es eine dreifache Extremstelle.	5	5	
c)	Ableitungen: $f_{a;b}'(x) = 4ax^3 + 2bx = x \cdot \left(4ax^2 + 2b\right)$ $f_{a;b}''(x) = 12ax^2 + 2b$. Notwendige Bedingung für das Vorliegen weiterer Extremstellen: $4ax^2 + 2b = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{b}{2a}$. $b \neq 0$ und $\frac{b}{2a} < 0$. Das bedeutet, dass *b* und *a* unterschiedliche Vorzeichen haben müssen. Soll es sich bei den Extrempunkten um Tiefpunkte handeln, so muss für die zweite Ableitung gelten: $f_{a;b}''\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right) = 12a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + 2b = -4b > 0$. Daraus folgt somit: $b < 0$.		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	Die beiden Bedingungen liefern das folgende Gleichungssystem: $\begin{aligned}81a+9b+4&=0\\1296a+36b+4&=0\end{aligned}.$ Multiplikation der ersten Gleichung mit -4 und anschließende Addition liefert $972a-12=0\Leftrightarrow a=\frac{1}{81}.$ Durch Einsetzen von a erhält man: $9b+5=0\Leftrightarrow b=-\frac{5}{9}$ und damit $f(x)=\frac{1}{81}x^4-\frac{5}{9}x^2+4.$	5		
e)	<u>Extrempunkte:</u> $f'(x)=\frac{4}{81}x^3-\frac{10}{9}x=$ $\Leftrightarrow x=0\ \vee\ \frac{4}{81}x^2=\frac{10}{9}$ $\Leftrightarrow x=0\ \vee\ x^2=\frac{90}{4}$ $\Leftrightarrow x=0\ \vee\ x=\pm\frac{3}{2}\sqrt{10}$ Dass 0 Maximalstelle ist, ist bereits bekannt. $f''(x)=\frac{4}{27}x^2-\frac{10}{9}.$ $f''\left(\pm\frac{3}{2}\sqrt{10}\right)=\frac{20}{9}>0,$ also handelt es sich bei $x=\pm\frac{3}{2}\sqrt{10}$ um Minimalstellen. $f(\pm\frac{3}{2}\sqrt{10})=-\frac{9}{4}.$ Damit sind $T_1\left(\frac{3}{2}\sqrt{10}\,\middle\vert\,-\frac{9}{4}\right)$ und $T_2\left(-\frac{3}{2}\sqrt{10}\,\middle\vert\,-\frac{9}{4}\right)$ die Tiefpunkte und $H\left(0\mid 4\right)$ der Hochpunkt des Graphen.	5	10	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>f)</td><td>
Die Tangentengleichung hat die Form:
$t(x) = f'(6)\cdot(x-6) + f(6)$
$\quad = 4(x-6)+0$
$\quad = 4x-24.$
Den Radius r_1 bestimmt man mit der Gleichung: $t(r_1) = 4r_1 - 24 = -5$. Es folgt:
$r_1 = \frac{19}{4} = 4{,}75$.
Der innere Radius beträgt also 4,75 cm.
Der Steigungswinkel α von t bzw. p ergibt sich aus tan α = 4, d. h. $\alpha = \arctan 4 \approx 75{,}96°$.
Die Verschiebung Δx zwischen p und t in x-Richtung ist $\Delta x = \frac{0{,}2}{\sin\alpha} \approx 0{,}206.$


Damit folgt die Gleichung für die Parallele p zu t:
$p(x) \approx 4\cdot(x-0{,}206) - 24 = 4x - 24{,}824$.
</td><td></td><td>10</td><td>15</td></tr>
<tr><td></td><td>
<u>Bestimmung des Materialbedarfs für das Auffanggefäß:</u>
Das zu bestimmende Volumen V für den Materialbedarf erhält man durch Subtraktion des inneren Kegelstumpfvolumens V_1 vom äußeren Kegelstumpfvolumen V_2: Die Volumina der Kegelstümpfe erhält man entweder mit der Formel aus der Formelsammlung oder indem man sich den Kegelstumpf als Differenz zweier Kegel vorstellt.
$V_1 = \frac{1}{3}\pi\cdot 5\left(4{,}75^2 + 6^2 + 4{,}75\cdot 6\right) \approx 455{,}858$.
Für V_2 benötigt man noch den äußeren Radius.
Der Radius r_2 ergibt sich aus der Gleichung $p(r_2) \approx 4r_2 - 24{,}824 = -5{,}2$.
Mithilfe des solve-Befehls erhält man $r_2 \approx 4{,}91$.
$V_2 = \frac{1}{3}\pi\cdot 5{,}2\left(4{,}91^2 + 6{,}206^2 + 4{,}91\cdot 6{,}206\right) \approx 506{,}937$.
$V = V_2 - V_1 \approx 506{,}937 - 455{,}858 \approx 51{,}079$.
Der Materialbedarf beträgt ungefähr 51,1 cm³.
</td><td>5</td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>g)</td><td>
Aus der Zeichnung sind z. B. die folgenden Werte abzulesen:

<table>
<tr><td>x</td><td>–3,2</td><td>–3</td><td>–2</td><td>–1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>2,5</td><td>3</td><td>3,2</td></tr>
<tr><td>y</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>2,3</td><td>2,4</td><td>2,3</td><td>1,8</td><td>1,5</td><td>0,5</td><td>0</td></tr>
</table>

Z. B. durch Regression mit einer ganz rationalen Funktion vierten Grades lässt sich daraus die genäherte Randfunktion r mit

$$r(x) = -0{,}021601 \cdot x^4 + 0{,}001056x^3 + 0{,}004139x^2 - 0{,}043727 \cdot x + 2{,}327400$$

bestimmen.

Das ungefähre Volumen der Zitrone berechnet sich damit als Rotationsvolumen:

$$V = \pi \cdot \int_{-3{,}2}^{3{,}2} r(x)^2 \, dx \approx 78{,}849.$$

Die Zitrone hat also ein Volumen von ca. 79 cm^3.
</td><td></td><td>10

5</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>55</td><td>20</td></tr>
</table>

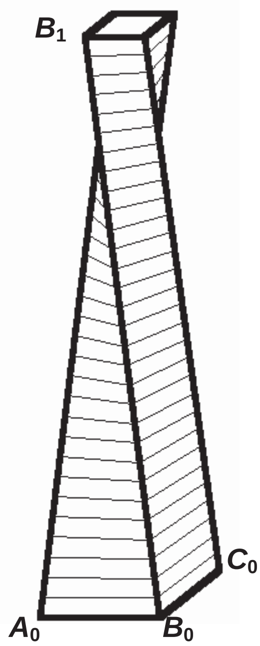
LA/AG 1

II.1 Quadrille

Der **Turning Torso** ist ein Hochhaus in der schwedischen Stadt Malmö. Der 57 Etagen hohe Wolkenkratzer erreicht eine Höhe von 190 Metern und ist damit der höchste Wolkenkratzer Skandinaviens und das zweithöchste Wohngebäude in Europa. Er wurde im Sommer 2005 eingeweiht und gilt seither als ein Wahrzeichen der Stadt.

Die einzelnen Stockwerke sind gegeneinander verdreht und haben alle eine gleich große, im Wesentlichen quadratische Grundfläche.

Der „Turning Torso" regte einen anderen Architekten an, das rechts unten skizzierte Hochhaus **„Quadrille"** zu entwerfen, auf das sich alle Aufgabenteile beziehen.



Das Hochhaus „Quadrille" hat eine quadratische horizontale Grundfläche der Seitenlänge 20 m und schließt in 120 m Höhe ab mit einer dazu parallelen kleineren (im Gegensatz zu Malmö) quadratischen Dachfläche mit der Seitenlänge von nur 10 m.

Die Mittelpunkte von Dach- und Bodenfläche sind lotrecht übereinander und liegen in dieser Aufgabe auf der z-Achse.

Die Dachfläche ist gegenüber der Bodenfläche von oben gesehen um 90° nach rechts gedreht.

Das Hochhaus hat 30 Stockwerke gleicher Höhe mit jeweils waagerechtem Boden und waagerechter Decke.

Alle Hauskanten sind gerade Strecken (dies auch im Gegensatz zu Malmö).

Aus Symmetriegründen folgt, dass alle vier von oben nach unten verlaufenden Gebäudekanten gleich lang sind und dass alle Stockwerke (alle horizontalen Schnittflächen) Quadrate sind.

a) Geben Sie für ein geeignetes Koordinatensystem (Einheit entspricht 1 m), in dem der Eckpunkt A_0 (siehe Abbildung) die Koordinaten (10 | –10 | 0) hat, die Koordinaten der anderen 7 Eckpunkte des Hochhauses an. **10 P**

Wenn Ihnen das nicht gelingt, verwenden sie für die weiteren Aufgabenteile die folgenden 8 Punkte:

$$A_0(10\,|10\,|\,0)\ ,\ B_0(-10\,|10\,|\,0)\ ,\ C_0(-10\,|-10\,|\,0)\ ,\ D_0(10\,|-10\,|\,0)$$
$$A_1(5\,|-5\,|\,120)\ ,\ B_1(5\,|\,5\,|\,120)\ ,\ C_1(-5\,|\,5\,|\,120)\ ,\ D_1(-5\,|-5\,|\,120)$$

Die Stockwerke werden – wie üblich – von unten nach oben gezählt, und es gelte hier die Verabredung, dass das Erdgeschoss die Nummer 1 trägt, also als <u>erstes</u> Stockwerk bezeichnet wird.

b) – Berechnen Sie die Längen der von oben nach unten verlaufenden Hauskanten.

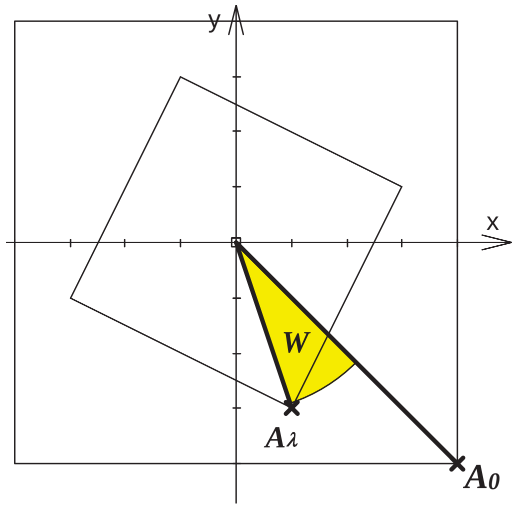
– Bestätigen Sie, dass in der Höhe h der zugehörige Punkt A_λ auf der Kante $\overline{A_0A_1}$ die Koordinaten $\left(10-\frac{h}{8} \mid -10+\frac{h}{24} \mid h\right)$ hat.

– Berechnen Sie die Koordinaten der vier Eckpunkte der Bodenfläche in 40 m Höhe, also in Höhe der Bodenfläche des 11. Stockwerkes. **10 P**

c) Es werden in diesem Aufgabenteil die Winkel untersucht, um die – von oben gesehen – die Bodenflächen der einzelnen Stockwerke gegenüber der Bodenfläche des Erdgeschosses nach rechts verdreht sind.
(Die z-Koordinaten brauchen also nicht betrachtet zu werden!)

Der Winkel W, um den eine Bodenfläche in der Höhe h gegenüber der Bodenfläche des Erdgeschosses von oben gesehen nach rechts verdreht ist, lässt sich durch folgende Funktionsgleichung beschreiben:

$$W(h) = \arctan\left(\frac{3(80-h)}{h-240}\right) + 45°.$$



– Erstellen Sie eine Tabelle, in der für die Stockwerke 1, 5, 10, ...20, 25 und 30 diese Drehwinkel dargestellt sind.

– Geben Sie den Winkel W an, um den die Bodenfläche des 16. Stockwerks in 60 m Höhe gegenüber der des Grundgeschosses (1. Stock) gedreht ist.

– Bestimmen Sie das Stockwerk, bei dem W = 45°, bei dem also die Bodenfläche gegenüber der Bodenfläche des Grundgeschosses um 45° gedreht ist.

– Begründen Sie die obige Formel mithilfe der nebenstehenden Skizze. **25 P**

d) Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt der Bodenfläche in der Höhe h – gemessen in m² – gilt:
$F(h) = \frac{5}{144}\left(h^2 - 192h + 11520\right)$ und dass das 25. Stockwerk (h = 96 m) die geringste Bodenfläche hat. **10 P**

e) Die Miete p pro Quadratmeter steigt – wegen der immer schöneren Aussicht – mit der Höhe der einzelnen Stockwerke über dem Boden. Im Erdgeschoss – also bei der Höhe 0 m – kostet der Quadratmeter 10 € Miete, im 30. Stockwerk – also in 116 m Bodenhöhe – hat sich die Miete pro Quadratmeter auf 20 € verdoppelt.

$p = p(h)$ lässt sich in Anhängigkeit von der Höhe h als ein ganz rationale Funktion 3. Grades mit den Zusatzbedingungen $p'(0) = p'(116) = 0$ angeben.

- Bestimmen Sie die den Funktionsterm von p und begründen Sie, dass p in dem hier relevanten Bereich von h streng monoton wächst. Interpretieren Sie diese Aussage.

  Zur Kontrolle: $p(h) = -\frac{5}{390224}\left(h^3 - 174h^2 - 780448\right)$.

- Bestimmen Sie das Stockwerk mit der geringsten Miete und das Stockwerk mit der höchsten Miete (dabei sollen Fahrstuhlschächte, Treppenhäuser etc. als Teil der Mietfläche mitgerechnet werden). **25 P**

f) Die Seitenflächen des Hochhauses werden durch die Schar der waagerechten Verbindungsstrecken zwischen den entsprechenden von oben nach unten verlaufenden Hauskanten gebildet. Begründen Sie,

- dass zwei benachbarte von oben nach unten verlaufende Hauskanten windschief sind,
- dass die Punkte P und Q als Endpunkte der kürzesten Verbindungsstrecke zwischen zwei benachbarten Hauskanten nicht auf gleicher Höhe liegen,

  zur Kontrolle: Die Punkte haben die Koordinaten $\left(-\frac{1132}{581} \middle| -\frac{3496}{581} \middle| \frac{55536}{581}\right)$ bzw. $\left(\frac{3476}{581} \middle| -\frac{1192}{581} \middle| \frac{56016}{581}\right)$,
- dass der Mittelpunkt von P und Q genau in Höhe der minimalen Bodenfläche liegt,
- dass der Mittelpunkt von P und Q <u>nicht</u> auf der zugehörigen Seitenfläche liegt, dass die Seitenflächen des Hauses also gekrümmt sein müssen. **20 P**

Erwartungshorizont

Die in a) vorgegebene Alternative wird als <u>*Ersatzlösung*</u> *bezeichnet und im Folgenden bei Abweichungen erwähnt.*

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung,
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Wir wählen die x-y-Ebene als Erdgeschossebene, dann kann man für die Eckpunkte des Erdgeschossbodens z. B. folgende Punkte wählen:
$A_0(10\,|-10\,|\,0)$, $B_0(10\,|10\,|\,0)$, $C_0(-10\,|\,10\,|\,0)$, $D_0(-10\,|-10\,|\,0)$.
Als Eckpunkte des Daches kann man wählen:
$A_1(-5\,|-5\,|\,120)$, $B_1(5\,|-5\,|\,120)$, $C_1(5\,|\,5\,|\,120)$, $D_1(-5\,|\,5\,|\,120)$.
Dabei wurden die von oben nach unten verlaufenden Hauskanten jeweils durch zwei Punkte mit dem gleichen Buchstaben als Bezeichner gekennzeichnet.</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>– Es genügt, eine der vier gleich langen Kantenlängen zu berechnen:
$\left|\overrightarrow{A_0A_1}\right| = \sqrt{(-5-10)^2+(-5+10)^2+(120-0)^2}$
$= \sqrt{225+25+14400} = \sqrt{14650} = 121{,}037...$
Jede von oben nach unten verlaufende Hochhauskante ist etwa 121 m lang.
– Die vier von oben nach unten verlaufenden Kanten haben die Parameterformen:
$\vec{a_\lambda} = \vec{a_0} + \lambda\cdot\left(\vec{a_1}-\vec{a_0}\right)$ mit $0 \le \lambda \le 1$, $\vec{b_\lambda} = \vec{b_0} + \lambda\cdot\left(\vec{b_1}-\vec{b_0}\right)$ mit $0 \le \lambda \le 1$,
$\vec{c_\lambda} = \vec{c_0} + \lambda\cdot\left(\vec{c_1}-\vec{c_0}\right)$ mit $0 \le \lambda \le 1$, $\vec{d_\lambda} = \vec{d_0} + \lambda\cdot\left(\vec{d_1}-\vec{d_0}\right)$ mit $0 \le \lambda \le 1$.
Betrachtet man beispielsweise die Kante $\overline{A_0A_1}$, so erhält man diese in Koordinatenform: $(-15\lambda+10\,|\,5\lambda-10\,|\,120\lambda)$. In der Höhe h ist die z-Komponente gleich h und damit $\lambda = \frac{h}{120}$.
Einsetzen ergibt: $\left(10-\frac{h}{8}\,|-10+\frac{h}{24}\,|\,h\right)$, was zu zeigen ist.
– Da die Bodenfläche des 11. Stockwerkes bei h = 40 liegt, erhält man auf der Kante $\overline{A_0A_1}$ den Punkt $\left(5\,|-\frac{25}{3}\,|\,40\right)$ bzw. $\left(5\,|-8{,}\overline{3}\,|\,40\right)$.
Auf die gleiche Weise oder durch Ausnutzen der Symmetrie erhält man die Koordinaten aller vier Fußbodeneckpunkte des 11. Stockwerks:
$A_{\frac{1}{3}}\left(5\,|-8{,}\overline{3}\,|\,40\right)$, $B_{\frac{1}{3}}\left(8{,}\overline{3}\,|\,5\,|\,40\right)$,
$C_{\frac{1}{3}}\left(-5\,|\,8{,}\overline{3}\,|\,40\right)$, $D_{\frac{1}{3}}\left(-8{,}\overline{3}\,|-5\,|\,40\right)$.</td><td>5</td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III

Ersatzlösung:

$$A_{\frac{1}{3}}\left(\ 8,\overline{3}\mid 5\mid 40\right)\ ,\ B_{\frac{1}{3}}\left(-5\mid\ 8,\overline{3}\mid 40\right),$$

$$C_{\frac{1}{3}}\left(-8,\overline{3}\mid -5\mid\ 40\right)\ ,\ D_{\frac{1}{3}}\left(\ 5\mid -8,\overline{3}\mid 40\right).$$

<u>Bemerkung:</u> Diese Werte können entweder durch Einsetzen in alle vier Parameterdarstellungen oder durch Einsetzen in nur eine der vier Parameterdarstellungen und Ausnutzen der Symmetrie gewonnen werden.

c) Der Stockwerknummer n entspricht die Bodenhöhe $4(n-1)$.
Eine Auswertung der gegebenen Funktionsgleichung ergibt folgende Tabelle:

n	1	5	10	15	20	25	30
h [m]	0	16	36	56	76	96	116
$W(h)$	0°	4,4°	12,1°	23,6°	40,8°	63,4°	86,0°

Der halben Höhe 60 m entspricht das 16. Stockwerk mit dem Drehwinkel 26,6°.
In 80 m Höhe, also im 21. Stockwerk wird der Drehwinkel von 45° realisiert.

<u>Begründung der Funktionsgleichung</u>: (vgl. Skizze rechts von der Aufgabe)

Die Verbindungslinie von z. B. A_0 zum Ursprung schließt mit der y-Achse einen Winkel von 45° ein. Der eingezeichnete Punkt A_λ hat die Form (vgl. b):

$$\left(10-\frac{h}{8}\mid -10+\frac{h}{24}\mid h\right).$$

Für den Winkel α, den der zugehörige Ortsvektor mit der y-Achse bildet, gilt

$$tan\,\alpha=\frac{10-\frac{h}{8}}{-10+\frac{h}{24}}=\frac{\frac{80-h}{8}}{\frac{-240+h}{24}}=\frac{3(80-h)}{-240+h}.$$

(<u>*Bemerkung:*</u> *Es empfiehlt sich den Winkel zur <u>y-Achse</u>* und nicht - wie oft üblich - zur *x-Achse zu betrachten, um die Definitionslücke des Tangens bei $h = 80$ zu vermeiden)* .

Dieser Term für $tan\,\alpha$ hat eine Nullstelle bei $h = 80$, dort ist also $\alpha = 0°$.
(was noch einmal bestätigt, dass In 80 m Höhe der Drehwinkel von $W(80)=45°$ realisiert wird).

Um α (als Funktion von *h)* zu bestimmen, muss man übergehen zum Arcus-Tangens. Dieser ist ebenso wie der Tangens negativ links von $h = 80$ und positiv rechts von $h = 80$. Dies entspricht auch der geometrischen Gegebenheit, dass man - um den gesuchten Drehwinkel $W(\alpha)$ zu bekommen – links von $h = 80$ das Winkelmaß von α von 45° abziehen und rechts von $h = 80$ zu 45° addieren muss. Es gilt also $W(h)=arc\,tan\left(\frac{3(80-h)}{h-240}\right)+45°$, w.z.b.w.

I	II	III
10	5	10

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Der Flächeninhalt $F(h)$ einer Bodenfläche als Funktion von h ist das Quadrat des Abstandes von zwei zugehörigen benachbarten Bodenecken. Solche zwei Ecken haben z. B. die Koordinaten $a_0 + \frac{h}{120} \cdot \left(\overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_0}\right) = \left(10 - \frac{h}{8} \mid -10 + \frac{h}{24} \mid h\right)$ und $\overrightarrow{b_0} + \frac{h}{120} \cdot \left(\overrightarrow{b_1} - \overrightarrow{b_0}\right) = \left(10 - \frac{h}{24} \mid 10 - \frac{h}{8} \mid h\right)$. *Ersatzlösung:* $\left(10 - \frac{h}{24} \mid 10 - \frac{h}{8} \mid h\right)$ *und* $\left(-10 + \frac{h}{8} \mid 10 - \frac{h}{24} \mid h\right)$. Ein Geschoss hat eine quadratische Grundfläche. Der Betrag des Differenzvektors gibt die Seitenlänge an. Zur Bestimmung des Flächeninhalts muss diese also quadriert werden. Differenzvektor: $\left(\frac{h}{12} \mid -\frac{h}{6} + 20 \mid 0\right)$. Quadrat: $F(h) = \frac{5}{144} \cdot \left(h^2 - 192h + 11520\right)$. Die quadratische Funktion F hat ihr Minimum bei $h = 96$, also hat das 25. Stockwerk in der Höhe von 96 m die minimale Bodenfläche. <u>*Alternative:*</u> Es genügt, das Quadrat des Abstandes von $\left(10 - \frac{h}{8} \mid -10 + \frac{h}{24} \mid h\right)$ von der z-Achse zu betrachten (halbe Diagonale im entsprechenden Bodenquadrat) und (wenn man will, zu verdoppeln), denn $2F(h) = \left(10 - \frac{h}{8}\right)^2 + \left(-10 + \frac{h}{24}\right)^2$. So erhält man auch den Term für $F(h)$ bzw. $\frac{F(h)}{2}$.		10	
e)	Die gesuchte ganzrationale Funktion p kann durch eine Steckbriefaufgabe gelöst werden: Als Ansatz wählt man $p(h) = a \cdot h^3 + b \cdot h^2 + c \cdot h + d$ Als Lösung des linearen Gleichungssystems $p(0) = 10 \wedge p(116) = 20 \wedge p'(0) = 0 \wedge p'(116) = 0$ erhält man mithilfe des solve-Befehls $a = -\frac{5}{39024}$, $b = \frac{15}{6728}$, $c = 0$ und $d = 10$, sodass der Funktionsterm die folgende Gestalt hat: $p(h) = -\frac{5}{390224} h^3 + \frac{15}{6728} h^2 + 10$. Eine zweite Möglichkeit besteht durch Integration von p'. Es muss ja gelten: $p'(h) = a \cdot h \cdot (h - 116)$. Also $p(h) = \int a \cdot h \cdot (h - 116)\, dh = \frac{a}{3} h^3 - 58 \cdot a \cdot h^2 + C$. Aus $p(0) = 10$ folgt $C = 10$. Aus $p(116) = 20$ folgt danach $a = -\frac{15}{390244}$,			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

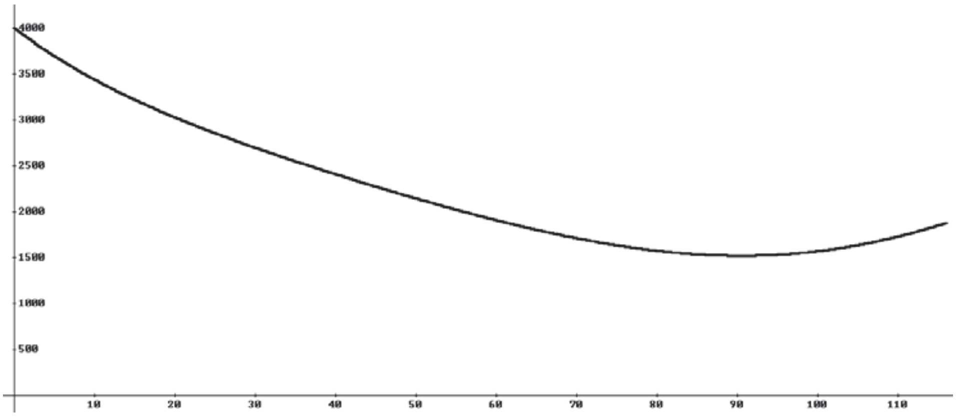
also $p(h) = -\frac{5}{390224}h^3 + \frac{15}{6728}h^2 + 10 = -\frac{5}{390224}\left(h^3 - 174h^2 - 780448\right)$.

Im Inneren des relevanten Intervalls von $h = 0$ bis $h = 116$ ist die Ableitung p' positiv (zwischen den Nullstellen einer nach unten geöffneten Parabel), also ist p streng monoton wachsend, der Mietpreis pro Quadratmeter steigt also mit der durch die Höhe bedingten immer schöneren Aussicht.

Für die Miete eines ganzen Stockwerkes in der Höhe h gilt dann (vgl. d)):

$$Mi(h) = F(h)\cdot p(h) = \left(\frac{5}{144}\left(h^2 - 192h + 11520\right)\right)\cdot\left(-\frac{5}{390224}h^3 + \frac{15}{6728}h^2 + 10\right)$$
$$= -\frac{25}{56192256}h^5 + \frac{1525}{9365376}h^4 - \frac{975}{48778}h^3 + \frac{7025}{60552}h^2 - \frac{200}{3}h + 4000\,.$$

Durch Plotten dieser Funktion erkennt man, dass sie ein absolutes Minimum bei etwa $h = 90$ besitzt, also zwischen dem 23. und 24. Stockwerk ($h = 88$ und $h = 92$):



Setzt man diese beiden Werte ein, erhält man:
$Mi(88) \approx 1524$ und $Mi(92) \approx 1522$.

Im 24. Stockwerk ist die Miete also am geringsten.

Man kann den Funktionsterm von *Mi* natürlich auch ableiten und numerisch die relevante Nullstelle dieser Ableitung bestimmen: $h_{Min} \approx 90{,}48$. Die obige Überprüfung muss dann aber trotzdem erfolgen.

Man könnte auch rein empirisch vorgehen und in einer Wertetabelle z. B. die Stockwerke 21 bis 26 untersuchen:

n	21	22	23	**24**	25	26
h [m]	80	84	88	**92**	96	100
Mi(h) [€]	1574	1542	1524	**1522**	1537	1569

Bemerkung: Dieses methodische Abweichen von der üblichen Minimax-Bestimmung ist typisch bei Verwendung von CAS-Rechnern in angewandten Aufgabenstellungen und sollte so oder ähnlich auch als richtig gewertet werden. — II: 25

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

f)

– Man zeigt, dass die beiden von den Hauskanten $\overline{A_0A_1}$ und $\overline{B_0B_1}$ gebildeten Geraden keinen Punkt gemeinsam haben (parallel sind sie offensichtlich nicht).

Zu lösen wäre: $\vec{a_0}+\lambda\cdot\left(\vec{a_1}-\vec{a_0}\right)=\vec{b_0}+\mu\cdot\left(\vec{b_1}-\vec{b_0}\right)$ mit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$,

also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 10-15\lambda &= 10-5\mu \\ -10+5\lambda &= 10-15\mu \\ 120\lambda &= 120\mu. \end{aligned}$$

Ersatzlösung:

$$\begin{aligned} 10-5\lambda &= -10+15\mu \\ 10-15\lambda &= 10-5\mu \\ 120\lambda &= 120\mu \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ergibt $\lambda=\mu$ und die erste Gleichung zeigt dann sofort, dass das Gleichungssystem nicht lösbar ist.

Die beiden Geraden (Kanten) sind also windschief.

<u>*Alternative Lösung:*</u> Die Windschiefe ist auch dadurch einzusehen, dass andernfalls aus Symmetriegründen je zwei benachbarte Kanten einen gemeinsamen Punkt hätten und dass alle diese vier Punkte in gleicher Höhe sein müssten. Dann fielen diese vier Punkte aber in einem Punkt auf der z-Achse zusammen, in einer Spitze also, und der Turm wäre ein(e) gewöhnliche(r) quadratische(r) Pyramide(-nstumpf). Das widerspricht aber der Lage der oberen vier Eckpunkte.

Auch die in d) erkannte Existenz einer minimalen Bodenfläche könnte hier als Begründung herangeführt werden.

(III: 5)

– Die Bestimmung der Punkte P und Q kann entweder über Orthogonalitätsbetrachtungen oder über die Minimierung der Abstandsfunktion (mit zwei Variablen, also über partielle Ableitungen) erfolgen. Hier wird der erste Weg dargestellt:

$\overrightarrow{PQ}$ muss (z. B.) orthogonal zu $\overrightarrow{A_1A_0}$ und orthogonal zu $\overrightarrow{B_1B_0}$ sein:

$$\left(\left(\vec{b_0}+\mu\left(\vec{b_1}-\vec{b_0}\right)\right)-\left(\vec{a_0}+\lambda\cdot\left(\vec{a_1}-\vec{a_0}\right)\right)\right)\cdot\left(\vec{a_1}-\vec{a_0}\right)=0$$

$$\left(\left(\vec{b_0}+\mu\left(\vec{b_1}-\vec{b_0}\right)\right)-\left(\vec{a_0}+\lambda\cdot\left(\vec{a_1}-\vec{a_0}\right)\right)\right)\cdot\left(\vec{b_1}-\vec{b_0}\right)=0 \quad , \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} 293\lambda-288\mu &= 2 \\ 288\lambda-293\mu &= -6 \quad , \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

mit den Lösungen

$\lambda=\dfrac{2314}{2905}=0{,}7965...$ und $\mu=\dfrac{2334}{2905}=0{,}803...$ und den zugehörigen Punkten

$P\left(-\dfrac{1132}{581}\,\middle|\,-\dfrac{3496}{581}\,\middle|\,\dfrac{55536}{581}\right)\approx\left(-1{,}948365\;|\;-6{,}017212\;|\;95{,}586919\right)$ und

$Q\left(\dfrac{3476}{581}\,\middle|\,-\dfrac{1192}{581}\,\middle|\,\dfrac{56016}{581}\right)\approx\left(5{,}982788\;|\;-2{,}051635\;|\;96{,}413081\right)$.

(II: 5)

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III

Ersatzlösung:

$$P\left(\frac{3496}{581}\,\Big|\,-\frac{1132}{581}\,\Big|\,\frac{55536}{581}\right)\approx\left(6{,}017212\,|-1{,}948365\,|\,95{,}586919\right) \text{ und}$$

$$Q\left(\frac{1192}{581}\,\Big|\,\frac{3476}{581}\,\Big|\,\frac{56016}{581}\right)\approx\left(2{,}051635\,|\,5{,}982788\,|\,96{,}413081\right).$$

Die Punkte liegen knapp unterhalb bzw. oberhalb der minimalen Bodenfläche.

- Der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{PQ}$ hat die Koordinaten
  $$\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{p}+\vec{q}\right)=\left(\frac{1172}{581}\,\Big|-\frac{2344}{581}\,\Big|\,96\right)\approx\left(2{,}017212\,|-4{,}034423\,|\,96\right),$$
  liegt also exakt auf der Höhe der minimalen Bodenfläche.
- Wenn dieser Punkt auf der Seitenfläche läge, müsste er auf der entsprechenden Fußbodenkante liegen, also auf der Strecke $\overline{A_{\frac{96}{120}}B_{\frac{96}{120}}}$.
  Es gilt: $A_{\frac{96}{120}}\left(-2\,|-6\,|\,96\right)$ und $B_{\frac{96}{120}}\left(6\,|-2\,|\,96\right)$.
  Ersatzlösung: $A_{\frac{96}{120}}\left(6\,|-2\,|\,96\right)$ und $B_{\frac{96}{120}}\left(2\,|\,6\,|\,96\right)$.

I	II	III
	5	

Es müsste also gelten:

$$\vec{m}=\overrightarrow{a_{\frac{96}{120}}}+\lambda\cdot\left(\overrightarrow{b_{\frac{96}{120}}}-\overrightarrow{a_{\frac{96}{120}}}\right), \text{ also } \begin{pmatrix}\frac{1172}{581}\\-\frac{2344}{581}\\96\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-6\\96\end{pmatrix}+\lambda\cdot\left(\begin{pmatrix}6\\-2\\96\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\-6\\96\end{pmatrix}\right).$$

Dies führt auf die beiden Gleichungen

$$8\lambda-2=\frac{1172}{581} \text{ und } 4\lambda-6=-\frac{2344}{581},$$

die offensichtlich nicht gleichzeitig erfüllt werden können.

Der Punkt M liegt also nicht auf der entsprechenden Seitenfläche. Wäre die Seitenfläche eben, dann müsste der Punkt M auf ihr liegen. Dies ist aber nicht der Fall.

Dass die Seitenflächen nicht eben sind, folgt auch aus der Windschiefe der jeweils zugehörigen zwei von oben nach unten verlaufenden Kanten. Denn diese liegen ja in der Seitenfläche und könnten nicht windschief sein, wenn die Seitenfläche eben wäre.

I	II	III
		5

		I	II	III
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

LA /AG 2

II.2 Insektenpopulation

In den Tropen legen die Weibchen einer bestimmten Insektenpopulation jedes Jahr kurz vor Beginn der Regenzeit ihre Eier und sterben bald darauf. Durchschnittlich kommen dabei auf jedes ausgewachsene Insekt etwa 90 Eier, aus denen wenig später Larven schlüpfen. Der Larvenbestand nimmt von Jahr zu Jahr durch Witterungseinflüsse, aber auch durch den Verzehr durch andere Tiere, ab. Im dritten Jahr verpuppen sich die Larven, und aus einem Teil der Puppen entwickeln sich im folgenden Jahr Insekten, die wieder kurz vor Beginn der Regenzeit für den Fortbestand sorgen. Die jährliche Entwicklung dieser Insektenpopulation wird durch die nebensehende Populationsmatrix A beschrieben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 90 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}$$

a) Betrachten Sie zunächst die Populationsmatrix A.

- Stellen Sie das durch A beschriebene Modell mit einem Übergangsgraphen dar.
- Beschreiben Sie die biologische Bedeutung der von Null abweichenden Komponenten der Matrix A. **15 P**

b) Im Weiteren wird die Entwicklung der Insektenpopulation genauer untersucht.

- Berechnen Sie die ersten 10 Potenzen der Populationsmatrix A.
- Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Hinblick auf die Insektenpopulation. **10 P**

Gehen Sie in den folgenden Aufgabenteilen c), d) und e) davon aus, dass sich die Insekten entsprechend dem obigen Modell, d. h. mithilfe der Populationsmatrix A entwickeln.

c) In einem Naturreservat hat man zum Beginn der Untersuchung pro ha Waldfläche den folgenden Bestandsvektor $\overrightarrow{p_0}$ ermittelt:

Alter	Name	Anzahl
0 bis 1 Jahre	Larven 1	9000
1 bis 2 Jahre	Larven 2	3000
2 bis 3 Jahre	Puppen	900
3 bis 4 Jahre	ausgewachsene Insekten	700

- Berechnen Sie den zu erwartenden Bestandsvektor $\overrightarrow{p_1}$ der Insektenpopulationen im Jahr nach dem Beginn der Untersuchung.
- Bestimmen Sie den Bestandsvektor $\overrightarrow{p_{-1}}$ der Insektenpopulation im Jahr vor Beginn der Untersuchung. **15 P**

d) Man spricht von einer Insektenschwemme, wenn mehr als 2000 ausgewachsene Insekten pro ha Waldfläche, bzw. von einem Unterbestand, wenn weniger als 100 ausgewachsene Insekten pro ha Waldfläche vorkommen.
Entscheiden Sie, ob und gegebenenfalls wann es bei langfristig ungestörter Entwicklung der Population

- zu einer Insektenschwemme oder
- zu einem Unterbestand

kommt. **10 P**

e) In einem benachbarten Gebiet ermitteln die Wissenschaftler seit Jahren eine annähernd konstante Anzahl ausgewachsener Insekten pro ha Baumbestand.

- Begründen Sie durch geeignete Rechnung, dass mithilfe der Populationsmatrix A das Auftreten einer stabilen Population erklärt werden kann.
- Ermitteln Sie eine passende Startpopulation für den Fall, dass 250 ausgewachsene Insekten pro ha Baumbestand gezählt wurden. **10 P**

f) Durch Umweltverschmutzung sinkt bei sonst gleich bleibenden Überlebensraten die Anzahl der von den Weibchen gelegten Eier auf durchschnittlich 60 Stück pro ausgewachsenem Insekt. Ermitteln Sie, wie sich diese Veränderung auf die langfristige Entwicklung der Insektenpopulation auswirkt. **10 P**

g) Die untersuchte Insektenpopulation gilt als stark gefährdet, wenn in ihrem Verbreitungsgebiet pro ha Baumbestand dauerhaft weniger als 15 Insekten gezählt werden. Betrachten Sie für diesen Aufgabenteil den Bestandsvektor $\overrightarrow{p_0}$ aus dem Aufgabenteil c) und die Populationsmatrix aus dem Aufgabenteil f)

- Innerhalb eines jeden Zyklus gibt es eine maximale Insektenanzahl.
  Ermitteln Sie eine geeignete Funktion, die diese maximalen Insektenanzahlen beschreibt.
- Bestimmen Sie das erste Jahr, ab welchem die Insektenpopulation in diesem Gebiet zu den gefährdeten Arten gehört. **10 P**

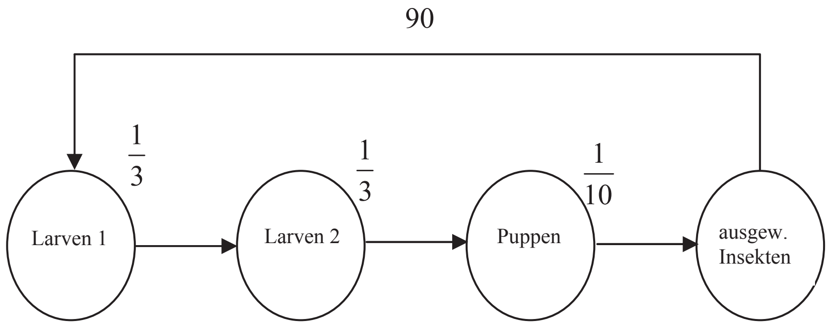
h) Sie haben in den Aufgabenteilen f) und g) festgestellt, dass die durchschnittliche Anzahl der Eier pro ausgewachsenem Insekt bei gleich bleibender Überlebensrate der Larven einen großen Einfluss für die Gesamtentwicklung der Population dieser Insektenart hat.
Ermitteln Sie einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Eier pro ausgewachsenem Insekt und der langfristigen Populationsentwicklung.
Begründen Sie Ihr Ergebnis mithilfe des Modells. **10 P**

i) Die Forscher erkennen, dass die neuen Umweltbedingungen zu weiteren Entwicklungsveränderungen geführt haben. Dieses wird in der Matrix A_{neu} dargestellt.

$$A_{neu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 45 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}$$

- Interpretieren Sie die im Vergleich zur Matrix A veränderten Werte in A_{neu} im Kontext der Aufgabenstellung.
- Es gibt Vektoren, die in diesem neuen Modell aufgrund des Sachkontextes nicht als Bestandsvektoren vorkommen können. Begründen Sie dies, indem Sie z. B. Vorjahresbestände betrachten. **10 P**

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>


Biologische Bedeutung der Koeffizienten:

$a_{13} = 90$ ist die Vermehrungsrate /Geburtenrate

$a_{21} = \frac{1}{3}$ ist die Überlebensrate der Larven im 1. Jahr (Larven 1 / Eier)

$a_{32} = \frac{1}{3}$ ist die Überlebensrate der Larven im 2. Jahr (Larven 2)

$a_{33} = \frac{1}{10}$ ist die Überlebensrate der verpuppten Larven im 3. Jahr (Puppen)
</td><td>10</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Berechnung von A^n mit $n = 1, 2, 3, \ldots, 10$.

Die Matrix A^4 ist identisch mit der Einheitsmatrix E. Also gilt:

$A = A^5$ und $A^2 = A^6 \ldots$ usw.

Für die Entwicklung der Population bedeutet das, dass sich in einem Zyklus von vier Jahren wieder die Ausgangspopulation einstellt.</td><td>5</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Bestimmung von $\vec{p}_1$:
$$\vec{p}_1 = A \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 90 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9000 \\ 3000 \\ 900 \\ 700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63000 \\ 3000 \\ 1000 \\ 90 \end{pmatrix}$$
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Bestimmung von $\vec{p}_{-1}$: Z. B. aus dem Ansatz $\vec{p}_0 = A \cdot \vec{p}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 90 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9000 \\ 3000 \\ 900 \\ 700 \end{pmatrix}$ erhält man z. B. mithilfe des solve-Befehls $x_1 = 9000,\ x_2 = 2700,\ x_3 = 7000,\ x_4 = 100$ *und* $\vec{p}_{-1} = \begin{pmatrix} 9000 \\ 2700 \\ 7000 \\ 100 \end{pmatrix}$. Ein weiterer Ansatz ergibt sich z. B. mithilfe der inversen Matrix: $\vec{p}_{-1} = A^{-1} \cdot \vec{p}_0$ oder aus der Zykluseigenschaft.	10	5	
d)	Die Lösung erhält man durch Rückgriff auf b) oder durch Bestimmung der der Vektoren $\vec{p}_1$ bis $\vec{p}_3$ danach wiederholen sich die Ergebnisse. $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 9000 \\ 3000 \\ 900 \\ 700 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 63000 \\ 3000 \\ 1000 \\ 90 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 8100 \\ 21000 \\ 1000 \\ 100 \end{pmatrix}$ und $\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 9000 \\ 2700 \\ 7000 \\ 100 \end{pmatrix}$, Es tritt keine Insektenschwemme auf, da nie mehr als 700 (ausgewachsene) Insekten auftreten. Ein Unterbestand tritt im 1. Jahr nach Untersuchungsbeginn auf, also auch im 5. Jahr usw. Bei einer ungestörten Entwicklung treten alle 4 Jahre Unterbestände auf, d. h. in den Jahren $1 + 4 \cdot n,\quad n \in \mathbb{N}^0$.		10	
e)	Die Aufgabenstellung führt zum folgenden LGS: $A \cdot \vec{p}_x = \vec{p}_x$, d. h. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 90 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$. Die Lösung z. B. mit dem solve-Befehl ergibt eine parameterabhängige Lösung. Die könnte z. B. folgendermaßen aussehen: $x_1 = 90x_4,\ x_2 = 30x_4,\ x_3 = 10x_4,\ x_4 \in \mathbb{N}^*$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Mit diesem Modell ist also eine stabile Population möglich. Setzt man in $\vec{p}_x = \begin{pmatrix} 90x_4 \\ 30x_4 \\ 10x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$ die x_4-Komponente gleich 250, so erhält man $\vec{p}_x = \begin{pmatrix} 22500 \\ 7500 \\ 2500 \\ 250 \end{pmatrix}$ Dieses ist die gesuchte Startpopulation für einen stabilen Zustand mit 250 Insekten.			10
f)	Mit den neuen Bedingungen erhält man die neue Populationsmatrix $A_U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 60 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}$ Nun werden wieder (wie im Aufgabenteil b)) die Potenzen der Populationsmatrix untersucht. Berechnungen ergeben, dass $A_U{}^4 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Die Matrix $A_U{}^4$ ist identisch mit der um $\frac{2}{3}$ „vervielfachten“ Einheitsmatrix *E*. Die Insektenpopulation wird nach jeweils vier Jahren auf $\frac{2}{3}$ des Bestandes ihres vorherigen Bestanden sinken. Sie stirbt langfristig aus. Auch eine Betrachtung mithilfe des Anfangsbestandes $\vec{p}_0$ ist möglich.		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
g)	Die Insektenanzahlen für die Matrix A sind für die ersten Jahre (beginnend mit dem Jahr Null: 700, 90, 100, 100, 700, 90, ….. Die entsprechenden Insektenanzahlen für die Matrix A_U sind, auf ganze Tiere gerundet: 700, 90, 100, 100, 466, 60, 66, 66, 311, ….. Da $A_U^{\,4} = \frac{2}{3}E$ ergeben sich die maximalen Insektenanzahlen in den Jahren 0, 4, 8, …, also für $t = 4 \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}_0$ Betrachtet man die „Hochzahlen" des 4-Jahres-Zyklus, so ergibt sich, dass die Werte auf jeweils $\frac{2}{3}$ des Vorwertes sinken. Damit ergibt sich die Funktionsgleichung $f(t) = 700 \cdot \left(\frac{60}{90}\right)^t = 700 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t$, mit $t = 4 \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}_0$ Gelöst werden muss $f(t) \le 15$. Z. B. Mithilfe des solve-Befehls oder einer Wertetabelle erhält man $t \ge 9{,}47808$. Im 10. Zyklus, also nach $4 \cdot 10 = 40$ Jahren ist maximale Anzahl der Insekten erstmalig unter 15 gefallen. Man muss aber beachten, dass schon in den Jahren vorher die Maximalzahl eines Zyklus nicht erreicht wird, denn $90 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \approx 2{,}34$. Also sind schon alle Werte in diesem Zyklus unter 15 Stück pro ha, sodass schon ab dem 37. Jahr die Insektenanzahl dauerhaft unter 15 Insekten pro ha liegt.		5	5
h)	Setzt man anstelle der Ei-Anzahlen eine Variable x ein und betrachtet den 4-Jahreszyklus, so ergibt sich der „Vermehrungsfaktor" $\frac{x}{90}$. Für $0 < x < 90$ kommt es also zur Abnahme der Population, also langfristig zu einem Aussterben. Für $x = 90$ gibt es eine periodische, aber stabile Entwicklung der Population, für $x > 90$ wächst die Population (zumindest nach dem Modell) ins Unendliche. Begründet werden kann dies mithilfe der Matrixpotenzen: $A_x^{\,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} \frac{x}{90} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{90} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x}{90} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x}{90} \end{pmatrix} = \frac{x}{90} \cdot E$, also			

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lösungsskizze</td><td colspan="3">Zuordnung, Bewertung</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td></td><td>$$A_x^{4z}=\begin{pmatrix}0&0&0&x\\ \frac{1}{3}&0&0&0\\ 0&\frac{1}{3}&0&0\\ 0&0&\frac{1}{10}&0\end{pmatrix}^{4z}=\left(\begin{pmatrix}\frac{x}{90}&0&0&0\\ 0&\frac{x}{90}&0&0\\ 0&0&\frac{x}{90}&0\\ 0&0&0&\frac{x}{90}\end{pmatrix}\right)^{z}=\left(\frac{x}{90}\right)^{z}\cdot E$$</td><td></td><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td>i)</td><td>Interpretation:
• Die durchschnittliche Eiablage ist von 90 auf 45 Eier pro Käfer gesunken.
• Ein Teil, genauer $\frac{1}{12}$ der Larven auf Stufe 1 geht bereits nach dem ersten Jahr ins Puppenstadium über, $\frac{1}{4}$ der Larven auf Stufe 1 geht in die Larvenstufe 2 über. Da $\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$, bleibt die Überlebensrate der Larven auf Stufe 1 gleich.
• Die restliche Entwicklung verläuft normal.
Die Ermittlung von $\vec{p}_{(a_0)-1}$ aus einer beliebigen Anfangspopulation $\vec{p}_{a_0}$ führt zu dem Ansatz $\vec{p}_{a_0}=A_{neu}\cdot\vec{p}_{(a_0)-1}$:
$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&45\\ \frac{1}{4}&0&0&0\\ \frac{1}{12}&\frac{1}{3}&0&0\\ 0&0&\frac{1}{10}&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}45x_4\\ \frac{1}{4}x_1\\ \frac{1}{12}x_1+\frac{1}{3}x_2\\ \frac{1}{10}x_3\end{pmatrix}$$
Als Lösung ergibt sich:
$x_1=4a_2$, $x_2=3a_3-a_2$, $x_3=10a_4$, $x_4=\frac{1}{45}a_1$
mit $a_1,a_2,a_3,a_4>0\wedge x_1,x_2,x_3,x_4>0$.
Aus $x_2=3a_3-a_2$ ist unmittelbar zu erkennen, dass für die Fälle $a_2>3a_3$ die Nichtnegativitätsbedingung für die Anzahl der zweijährigen Larven nicht mehr gegeben ist. Also lässt sich für alle Vektoren, in denen die Anzahl der zweijährigen Larven mehr als dreimal so hoch ist wie die der Puppen, keine Vorjahrespopulation ermitteln, d. h., diese Vektoren treten in der Population als Bestandsvektoren nicht auf.</td><td></td><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>50</td><td>25</td></tr>
</table>

STOCHASTIK 1

III.1 Falschparker

Der Berliner Senat überlegt, ob er die Parkgebühren (1 € / h) erhöhen muss, damit die Einnahmeverluste durch Parken ohne gültigen Parkschein (so genanntes „Falschparken“) ausgeglichen werden können.
Nach Angabe des Senats beträgt der Anteil der Falschparker gemäß einer Studie aus dem Frühjahr ca. 15 %.
Die mittlere Parkdauer beträgt zwei Stunden.

a) Zwei Politessen überprüfen zunächst den Parkplatz „Kudamm-Karree“ mit 34 Autos, dann den Parkplatz „Wertheim Kurfürstendamm“ mit 48 Autos.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Politessen auf dem Parkplatz „Kudamm-Karree“ genau drei Falschparker aufschreiben.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Politessen auf beiden Parkplätzen zusammen mindestens vier Falschparker aufschreiben.
- Berechnen Sie, mit wie vielen Falschparkern die Politessen auf beiden Parkplätzen zusammen rechnen sollten.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Politessen beim Kudamm-Karree genau fünf und bei Wertheim genau sechs Falschparker finden. **25 P**

b) In der Senatsverwaltung wird überlegt und anschließend eine Stichprobe von 500 überprüften Autos ausgewertet.
- Berechnen Sie zunächst, wie viele parkende Autos hätten überprüft werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99 % mindestens einen Falschparker zu erwischen.
- Bestimmen Sie für diese Stichprobe den kleinstmöglichen Bereich, in dem die Zahl an Falschparkern mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % liegt. Dieser Bereich soll zusätzlich symmetrisch zum Erwartungswert liegen. **15 P**

c) Es gibt nicht überall und jederzeit Politessen. Deswegen kann man davon ausgehen, dass nur etwa 10% von allen Falschparkern durch Kontrollen von Politessen gefunden werden. Etwa die Hälfte der Falschparker parkt nur kurz und kehrt nach wenigen Minuten zum Wagen zurück. Diese wird verwarnt und muss 1 € Parkgebühr nachbezahlen. Die andere Hälfte muss ein Bußgeld von 15 € bezahlen.
- Zeigen Sie, dass ein Falschparker durch sein Verhalten für die Stadt Berlin im Mittel 1,15 € Mindereinnahmen verursacht.
- Bestimmen Sie den Betrag, auf den der Berliner Senat das Bußgeld erhöhen müsste, damit Falschparker keine Mindereinnahmen verursachen. **15 P**

Der Senat entschloss sich stattdessen zu einer drastischen Erhöhung der Parkgebühren. Im Gegensatz zum Senat befürchten die Medien, dass (deswegen) der Anteil der Falschparker deutlich angestiegen sein könnte.

d) Leiten Sie ein Testverfahren für eine Kontrolle von 2400 Fahrzeugen her, mit dem man die Befürchtung der Medien gegebenenfalls statistisch (auf dem 5 %-Niveau) begründen kann. **15 P**

Wenn man den Test aus d) sogar auf dem 1%-Niveau plante, so käme man zu dem Ergebnis, dass dann bei der Kontrolle mehr als 401 Falschparker gefunden werden müssten, um –statistisch begründet – behaupten zu können, dass sich der Anteil an Falschparkern erhöht hat. Auf diesen verschärften Test bezieht sich der folgende Aufgabenteil.

e) Der tatsächliche Falschparkeranteil nach der Gebührenerhöhung sei p_1 .

- Betrachten Sie nun die Wahrscheinlichkeit ß, dass der verschärfte Test kein signifikantes Ergebnis liefert (dass also nicht mehr als 401 Falschparker gefunden werden) als Funktion von p_1 ($\beta = \beta(p_1)$) in folgendem Definitionsintervall: $0{,}1 \le p_1 \le 0{,}2$.
  (Diese Funktion heißt Operationsstatistik des Tests).
  Geben Sie eine sinnvolle Wertetabelle mit 8 ausgewählten Werten an und zeichnen Sie den Graphen .
  Bemerkung: *Wenn Sie die Funktionswerte $\beta(p_1)$ nicht bestimmen können, so versuchen Sie wenigstens eine qualitative Skizze des Graphen anzufertigen.*

- Interpretieren Sie im Sachkontext die Funktionswerte $\beta(p_1)$ für p_1 größer als 15 % .

- Angenommen p_1 =17 % , und es werden weniger als 402 Falschparker gefunden, es liegt also kein signifikantes Ergebnis vor. Ist das überraschend? Kann sich in einem solchen Falle der Berliner Senat in seiner Ansicht bestätigt fühlen? Begründen Sie Ihre Antworten auf diese beiden Fragen. **30 P**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	• Die Anzahl der Falschparker unter den 34 kontrollierten Fahrzeugen ist $B_{34;0,15}$-verteilt: $\binom{34}{3} \cdot 0{,}15^3 \cdot 0{,}85^{31} \approx 13\%$. • Die Anzahl der Falschparker unter den 82 kontrollierten Fahrzeugen ist $B_{82;0,15}$-verteilt: P(„mind. 4 Falschparker“) = 1 – P(„höchstens 3 Falschparker“) = $1 - P(X \leq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) \approx$ $1 - 0{,}0000016 - 0{,}000024 - 0{,}000169 - 0{,}000794 \approx 0{,}999$. Die Wahrscheinlichkeit, mindestens 4 Falschparker zu ertappen, ist ca. 99,9%. • $E(X) = 82 \cdot 0{,}15 = 12{,}3$. Die Politessen müssen mit ca. 12 Falschparkern rechnen. • Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Politessen beim Kudamm-Karree genau 5 und bei Wertheim genau 6 Falschparker finden, beträgt $\binom{34}{5} \cdot 0{,}15^5 \cdot 0{,}85^{29} \cdot \binom{48}{6} \cdot 0{,}15^6 \cdot 0{,}85^{42} \approx 0{,}1897 \cdot 0{,}1517 \approx 0{,}0288 \approx 2{,}9\%$.	15	10	
b)	• Y: Anzahl der ertappten Falschparker bei n überprüften Autos; Y ist $B_{n;0,15}$-verteilt. P(mind. ein Falschparker) = $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0)$ $\geq 0{,}99$, also $P(Y = 0) \leq 0{,}01$, d. h. man müsste mindestens 29 Autos kontrollieren. • Kleinstmöglicher Bereich symmetrisch zum Erwartungswert: $n = 500$ und $p = 0{,}15 \Rightarrow \mu = 500 \cdot 0{,}15 = 75$. Durch Ausprobieren erhält man $P(X \leq 64) = 0{,}092272$ und $P(X \leq 65) = 0{,}115719$ sowie $P(X \geq 85) = 0{,}118118$ und $P(X \geq 86) = 0{,}095871$ Somit ist lautet das kleinstmögliche Intervall: [64; 86]. Hinweis: Gerätebedingt können hier geringfügig andere Ergebnisse auftreten. Alternativ kann man auch die Normalverteilung als Annäherung benutzen.: Es ist $\sigma = \sqrt{(500 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85)} \approx 7{,}984$. Dann gilt: $P(\lvert X - \mu \rvert \leq d) = 2 \cdot \Phi(\frac{d}{\sigma}) - 1 \geq 0{,}80 \Leftrightarrow \Phi(\frac{d}{\sigma}) \geq \frac{1{,}8}{2} = 0{,}9.$ Mithilfe eines CAS oder einer Tabelle für die Normalverteilung folgt: $\frac{d}{\sigma} \approx 1{,}282 \Rightarrow d \approx 10{,}42 \Rightarrow d \geq 11.$	5	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III

c) Es ist G die „Einnahmedifferenz“ die ein Falschparker gegenüber einem regelgerechten Verhalten verursacht.

	Falschparker nicht ertappt	Falschparker verwarnt	Falschparker ertappt
g_i (in €)	–2	0	13
$P(G = g_i)$	0,9	0,05	0,05

Erwartungswert $E(G) = (-2) \cdot 0{,}90 + 13 \cdot 0{,}05 = -1{,}15$, d. h., pro Falschparker macht die Stadt im Durchschnitt einen Verlust von 1,15 €.

Man müsste also eine Erhöhung des Bußgeldes beschließen, um mindestens ohne Verlust für die Stadt zu arbeiten.

Ist B das erhöhte Bußgeld, so gilt:

$E(G) = (-2) \cdot 0{,}90 + (B-2) \cdot 0{,}05 = 0 \Leftrightarrow B = 38$.

Damit kein Verlust entsteht, müsste das Bußgeld mindestens auf 38 € erhöht werden.

I	II	III
	10	5

d) Die Medien könnten ihre Behauptung statistisch belegen, wenn die Nullhypothese $H_0 : p \le 0{,}15$ verworfen werden könnte, d. h. wenn die Anzahl X der in der Stichprobe auftretenden Falschparker genügend groß ist. Wir bestimmen eine möglichst kleine Schranke K so, dass $P(\{X > K\} \mid H_0) \le 5\%$.

Zunächst können wir abschätzen: $P(\{X > K\} \mid H_0) \le P(\{X > K\} \mid p = 0{,}15)$.

Durch Ausprobieren erhält man
$P(X > 388) = 0{,}52758$ und $P(X > 389) = 0{,}047002$.

Also liegt bei mehr als 389 Falschparkern ein signifikantes Ergebnis vor. In diesem Falle könnten die Medien sich – statistisch begründet - bestätigt fühlen.

Alternativ kann man mit der Normalverteilung arbeiten:

Unter der Bedingung $p = 0{,}15$ ist $\dfrac{X - \mu + 0{,}5}{\sigma}$ in guter Näherung standard-normalverteilt mit

$\mu = 2400 \cdot 0{,}15 = 360$ und $\sigma = \sqrt{2400 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85} \approx 17{,}49$.

Der Tabelle entnimmt man für eine standard-normalverteilte Zufallsvariable N:
$P(N > 1{,}645) \approx 5\%$. Also

$$P\left(\frac{X - \mu + 0{,}5}{\sigma} > 1{,}645 \mid p = 0{,}15\right) \le 5\%$$

$$\Leftrightarrow P(X > \mu - 0{,}5 + 1{,}645 \cdot \sigma \mid p = 0{,}15) \le 5\%$$

$$\Leftrightarrow P(X > 388{,}3 \mid p = 0{,}15) \le 5\%$$

Die Nullhypothese kann also auf dem 5 %-Niveau verworfen werden, wenn in der Stichprobe mehr als 389 Falschparker angetroffen werden.

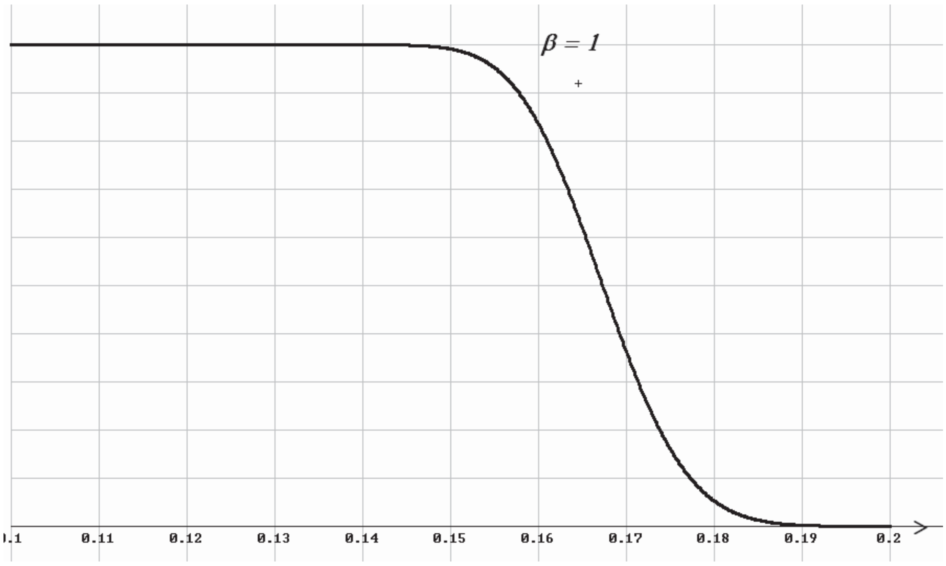
I	II	III
	15	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III

e)

- Es gilt, $P\left(\{X \le 401\} \mid p = p_1\right)$ zu bestimmen

p_1	0,1	0,14	0,15	0,155	0,16	0,17	0,18	0,2
$\beta(p_1)$	1	0,99992	0,99044	0,95083	0,83516	0,36393	0,05154	0,00002



- Funktionswerte $\beta(p_1)$ für p_1 größer als 15 % geben Wahrscheinlichkeiten für Fehler 2. Art an, falls $p = p_1$. Erst wenn p_1 größer als 19 % ist auch die Wahrscheinlichkeit, für den zugehörigen Fehler 2. Art so klein, dass fast immer ein signifikantes Ergebnis erzielt wird.
- Wenn $p_1 = 17$ %, wäre einerseits die Falschparkerquote deutlich gestiegen, andererseits ist $\beta(p_1)$ noch ca. 36 %, d. h. mit ziemlich hoher Wahrscheinlichkeit „entdeckt" der Test dieses Ergebnis nicht (kommt zu keinem signifikanten Ergebnis). Dies ist also nicht überraschend. Keine Signifikanz bedeutet aber nicht, dass ein statistisches Argument für eine unveränderte Falschparkerquote vorliegt. Der Berliner Senat sollte sich also nicht in seiner Ansicht bestätigt fühlen.

		I	II	III
e)			15	15
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

STOCHASTIK 2

III.2 Rund um den HSV

Der Hamburger SV trägt seine Heimspiele in der 57 000 Zuschauer fassenden Arena im Volkspark aus (siehe nebenstehende Abbildung).

Arena des HSV

a) In der ersten Reihe eines Sitzbereichs befinden sich 31 Plätze, von denen im letzten Saisonspiel 29 besetzt werden.
   - Berechnen Sie die Anzahl aller Möglichkeiten, wie sich die 29 (unterscheidbaren) Personen auf die 31 Plätze verteilen können.
   - Berechnen Sie die Anzahl aller Möglichkeiten, wie sich die freien Plätze verteilen könnten. **15 P**

b) Die Bundesligastatistik über viele Jahre weist aus, dass im Mittel etwa 3 Tore pro Spiel (Spieldauer: 90 Minuten) fallen.

Ein Zuschauer verlässt während der Spielzeit für 3 Minuten seinen Sitzplatz, um die Toilette aufzusuchen. Auf dem Weg überlegt er sich, ob er bis zu seiner Rückkehr ein Tor „verpasst" haben wird. Sie sollen deshalb gleich die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass ausgerechnet in diesen 3 Minuten mindestens ein Tor fällt. Bitte lesen Sie aber vorher den folgenden Hinweis:

Hinweis: Nehmen Sie an, dass der Erwartungswert μ der Anzahl T der in einem fest ausgewählten Zeitintervall fallenden Tore während eines Bundesligaspiels nur von der Länge dieses Zeitintervalls abhängig ist und zu dieser proportional ist.

Dann kann man für T die Poissonverteilung verwenden: $P(\{T=k\}) = \frac{1}{e^{\mu}} \cdot \frac{\mu^k}{k!}$.

- Bestimmen Sie das hier passende μ und ermitteln Sie nun damit die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass ausgerechnet in der Toilettenpause mindestens ein Tor fällt. Fertigen Sie hierzu eine Wertetabelle für sinnvolle Werte von k an.
- Untersuchen Sie auch, ob die Annahmen aus dem Hinweis realistisch sind. **15 P**

Ein Busunternehmen aus Flensburg bietet den Transport zum Stadion an. Es setzt dazu zwei Busse mit insgesamt 92 Plätzen ein. Man kann einen Busplatz telefonisch oder per Internet buchen, braucht aber erst beim Fahrtantritt zu zahlen. Der Andrang bei Fußballspielen ist erfahrungsgemäß groß, und das Angebot ist stets ausgebucht. Allerdings werden im Mittel nur 90 % der gebuchten Plätze tatsächlich wahrgenommen. Wegen des Nichtwahrnehmens von gebuchten Fahrten bietet das Unternehmen deshalb 101 Plätze – also mehr als vorhanden – zur Buchung an. Nehmen Sie an, dass die Anzahlen der nicht kommenden bzw. kommenden Bucher binomialverteilt sind.

Hinweis: Sie können alle Aufgabenteile mit Ihrem Computer bearbeiten, die Tabelle aus der Anlage verwenden oder auch näherungsweise mit der Normalverteilung rechnen.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei Fahrtantritt mehr als 92 Fahrgäste erscheinen, dass also mindestens eine Person mit gebuchten Plätzen abgewiesen werden muss. **10 P**

d) Bestimmen Sie die Maximalzahl der Buchungen, die das Unternehmen zulassen kann, sodass es mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % zu keinen Überbuchungen kommt. **15 P**

Das Busunternehmen will erreichen, dass der Anteil der Absagen sinkt. Deshalb ändert es seine Vertragsbedingungen dahin gehend, dass schon gleich bei der Buchung eine Anzahlung von 5 € zu zahlen ist, die bei Nichterscheinen nicht zurückgezahlt wird.

e) Während der nächsten 1000 Buchungen soll untersucht werden, ob die neue Regelung zu einer Senkung der Absagerquote führt.
Leiten Sie dazu eine Entscheidungsregel her. (Ermitteln Sie die Anzahl K von Absagen so, dass man gerade noch – statistisch begründet – behaupten kann, dass die Maßnahme erfolgreich war. Gehen Sie dabei von einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$ aus, d. h. die Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art soll höchstens 5 % sein). **15 P**

Für die Aufgabenteile f) und g) gehen Sie nun von folgenden Daten aus:

- Tatsächlich werden im Mittel nur noch **6 %** der gebuchten Plätze nicht in Anspruch genommen.
- Der Fahrpreis beträgt 20 €. Ein gebuchter Kunde, der nicht kommt, bringt dem Unternehmer also eine Einnahme von 5 € ein: Ein gebuchter Kunde, der mitfährt, bringt eine Einnahme von 20 €.

f) Berechnen Sie die erwarteten Einnahmen, wenn das Busunternehmen keine Überbuchungen zulässt. **10 P**

g) Das Unternehmen lässt nun immerhin 5 Überbuchungen zu, nimmt also immer 97 Buchungen an. Kunden, welche die gebuchte Fahrt wegen Überbuchung nicht antreten können, bekommen die Anzahlung zurückerstattet und verursachen zusätzliche Entschädigungskosten von 25 €.

- Ermitteln Sie – je nachdem wie viele Absagen anfallen – die maximal mögliche und die minimal mögliche Einnahme des Unternehmens für eine Fahrt zu einem HSV-Spiel.
- Um eine Bilanz aufzustellen, begründen Sie die folgenden Aussagen:
  - Das Unternehmen hat sichere Einnahmen E_1 von 485 €.
  - Stellen Sie sich vor, dass alle Bucher, die zur Fahrt erscheinen, zunächst die fehlenden 15 € bezahlen.
    Der Erwartungswert E_2 für diese Einnahmen beträgt dann 1367,70 €.
  - Erst kurz vor der Abfahrt erhalten diejenigen Kunden, die wegen Überbuchung nicht mitfahren können, ihre Fahrtkosten von 20 € zurück und außerdem 25 € Entschädigung. Der Erwartungswert dieser Auszahlungen beträgt:

$$K = 45€ \cdot \begin{pmatrix} 5 \cdot B(97;0,06\,;\,0) + 4 \cdot B(97;0,06\,;\,1) + 3 \cdot B(97;0,06\,;\,2) \\ +2 \cdot B(97;0,06\,;\,3) + 1 \cdot B(97;0,06\,;\,4) \end{pmatrix}$$

Dennoch lohnt es sich finanziell für das Unternehmen, die 5 Überbuchungen zuzulassen. **20 P**

Anlage 1 zur Aufgabe „Rund um den HSV“, Aufgabenteile c) und d)

Tabellenauszug für <u>akkumulierte</u> Binomialverteilungswerte

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$$

$p = 0{,}1$

		n											
		92	**93**	**94**	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**	**100**	**101**	**102**	**103**
	0	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0007	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
	2	0,0039	0,0036	0,0033	0,0030	0,0028	0,0025	0,0023	0,0021	0,0019	0,0018	0,0016	0,0015
	3	0,0145	0,0134	0,0125	0,0115	0,0107	0,0099	0,0092	0,0085	0,0078	0,0072	0,0067	0,0062
	4	0,0408	0,0382	0,0357	0,0334	0,0312	0,0291	0,0272	0,0254	0,0237	0,0221	0,0206	0,0192
k	**5**	0,0922	0,0870	0,0821	0,0775	0,0731	0,0689	0,0649	0,0612	0,0576	0,0542	0,0510	0,0479
	6	0,1750	0,1667	0,1587	0,1511	0,1437	0,1366	0,1299	0,1234	0,1172	0,1112	0,1055	0,1000
	7	0,2880	0,2767	0,2657	0,2550	0,2446	0,2345	0,2247	0,2152	0,2061	0,1972	0,1886	0,1803
	8	0,4214	0,4081	0,3949	0,3820	0,3693	0,3568	0,3446	0,3326	0,3209	0,3094	0,2982	0,2872
	9	0,5598	0,5459	0,5321	0,5184	0,5048	0,4912	0,4778	0,4645	0,4513	0,4382	0,4254	0,4126
	10	0,6874	0,6746	0,6617	0,6488	0,6358	0,6227	0,6095	0,5963	0,5832	0,5700	0,5568	0,5437
	11	0,7931	0,7825	0,7717	0,7607	0,7495	0,7381	0,7266	0,7149	0,7030	0,6910	0,6789	0,6667
	12	0,8723	0,8644	0,8562	0,8478	0,8391	0,8301	0,8209	0,8115	0,8018	0,7919	0,7819	0,7716
	13	0,9265	0,9211	0,9154	0,9095	0,9033	0,8969	0,8902	0,8833	0,8761	0,8687	0,8610	0,8531

Anlage 2 zur Aufgabe „Rund um den HSV“, Aufgabenteil g)

Tabellenauszug für Binomialverteilungswerte

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$p = 0{,}06$

		n								
		92	**93**	**94**	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**	**100**
	0	0,0034	0,0032	0,0030	0,0028	0,0026	0,0025	0,0023	0,0022	0,0021
	1	0,0198	0,0188	0,0179	0,0170	0,0161	0,0153	0,0145	0,0138	0,0131
	2	0,0575	0,0552	0,0530	0,0509	0,0489	0,0469	0,0450	0,0432	0,0414
	3	0,1101	0,1069	0,1038	0,1008	0,0978	0,0949	0,0920	0,0892	0,0864
	4	0,1564	0,1536	0,1508	0,1480	0,1451	0,1423	0,1394	0,1366	0,1338
k	**5**	0,1756	0,1745	0,1732	0,1719	0,1705	0,1689	0,1673	0,1657	0,1639
	6	0,1626	0,1634	0,1640	0,1646	0,1650	0,1653	0,1656	0,1657	0,1657
	7	0,1275	0,1296	0,1316	0,1336	0,1354	0,1372	0,1389	0,1405	0,1420
	8	0,0865	0,0889	0,0914	0,0938	0,0962	0,0985	0,1008	0,1031	0,1054
	9	0,0515	0,0536	0,0557	0,0579	0,0600	0,0622	0,0644	0,0666	0,0687
	10	0,0273	0,0287	0,0302	0,0318	0,0333	0,0349	0,0366	0,0382	0,0399
	11	0,0130	0,0138	0,0147	0,0157	0,0166	0,0176	0,0187	0,0197	0,0209
	12	0,0056	0,0060	0,0065	0,0070	0,0075	0,0081	0,0086	0,0092	0,0099
	13	0,0022	0,0024	0,0026	0,0029	0,0031	0,0034	0,0036	0,0039	0,0043

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Die zuerst ankommende Person hat 31 Plätze zur Auswahl, die zweite 30, usw. und die letzte noch 3. Aufstellen des Terms liefert:
$31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot ... \cdot 3 = \frac{31!}{2!} \approx 4{,}1 \cdot 10^{33}$.

(Es gibt ungefähr $4{,}1 \cdot 10^{33}$ Möglichkeiten für die Belegung.)

Da man den freien Plätzen nicht verschiedene Personen zuordnen kann, gibt es
$\binom{31}{2} = 465$ Möglichkeiten für die freien Plätze.</td><td>15</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Wenn man annimmt, dass in fest gewählten Spielzeitintervallen, die erwarteten Anzahlen an Toren proportional zur Läge der Intervalle ist, dann hat man aus der gegebenen Statistik für ein ganzes Spiel von 90 Minuten den Erwartungswert von 3 Toren, also für ein Zeitintervall von 3 Minuten den Erwartungswert von
$\mu = 3 \cdot \frac{3}{90} = 0{,}1$ (Toren).
Die angenommene Poissonverteilung für $\mu = 0{,}1$ ist teilweise in folgender Tabelle berechnet:
<table>
<tr><td>K</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$P(\{T = k\})$</td><td>0,905</td><td>0,090</td><td>0,005</td><td>Praktisch null</td></tr>
</table>
Die Wahrscheinlichkeit für „mindestens ein Tor“ beträgt also:
$P = 1 - P(\{T = 0\}) \approx 9{,}5\%$.

Mögliche Argumente:

Die Annahmen sind nicht unproblematisch: Handelt es sich um ein „normales“ Bundesligaspiel, für das der erwartete Wert 3 Tore insgesamt beträgt?

Sicher ist die erwartete Torzahl in gleichlangen Intervallen auch nicht immer gleich, z. B. nehmen führende Mannschaften schon mal einen Gang heraus.

Zum Spielende kann die Kondition nachlassen, andererseits fallen häufig in der letzten Spielminute noch Tore, weil die Konzentration der Verteidigung nachlässt oder weil eine Mannschaft unter Zeitdruck besonders offensiv spielt.

Die erwartete Torausbeute kann auch zum Spielende abnehmen, weil eine Mannschaft sich schon mit einem Spielergebnis abgefunden hat oder weil eine Mannschaft unter Zeitdruck besonders offensiv spielt.</td><td></td><td>10</td><td>5</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III

c) Es erscheinen bei Fahrtantritt mehr als 92 Fahrgäste, wenn zu wenig Personen absagen, genauer, wenn die Anzahl der absagenden Personen kleiner als 9 ist. Die Anzahl der absagenden Personen kann als $B(101 ; 0.1)$ angenommen werden:

Also beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P = \sum_{k=0}^{8} \binom{101}{k} \cdot 0{,}1^k \cdot 0{,}9^{101-k} \approx 31\% .$$

p = 0,1

	n 92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103
0	0,0001	**0,0001**	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,0007	0,0006	**0,0006**	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
2	0,0039	0,0036	0,0033	**0,0030**	0,0028	0,0025	0,0023	0,0021	0,0019	0,0018	0,0016	0,0015
3	0,0145	0,0134	0,0125	0,0115	**0,0107**	0,0099	0,0092	0,0085	0,0078	0,0072	0,0067	0,0062
4	0,0408	0,0382	0,0357	0,0334	0,0312	**0,0291**	0,0272	0,0254	0,0237	0,0221	0,0206	0,0192
k **5**	0,0922	0,0870	0,0821	0,0775	0,0731	0,0689	**0,0649**	0,0612	0,0576	0,0542	0,0510	0,0479
6	0,1750	0,1667	0,1587	0,1511	0,1437	0,1366	0,1299	**0,1234**	0,1172	0,1112	0,1055	0,1000
7	0,2880	0,2767	0,2657	0,2550	0,2446	0,2345	0,2247	0,2152	**0,2061**	0,1972	0,1886	0,1803
8	0,4214	0,4081	0,3949	0,3820	0,3693	0,3568	0,3446	0,3326	0,3209	**0,3094**	0,2982	0,2872
9	0,5598	0,5459	0,5321	0,5184	0,5048	0,4912	0,4778	0,4645	0,4513	0,4382	**0,4254**	0,4126
10	0,6874	0,6746	0,6617	0,6488	0,6358	0,6227	0,6095	0,5963	0,5832	0,5700	0,5568	**0,5437**
11	0,7931	0,7825	0,7717	0,7607	0,7495	0,7381	0,7266	0,7149	0,7030	0,6910	0,6789	0,6667
12	0,8723	0,8644	0,8562	0,8478	0,8391	0,8301	0,8209	0,8115	0,8018	0,7919	0,7819	0,7716
13	0,9265	0,9211	0,9154	0,9095	0,9033	0,8969	0,8902	0,8833	0,8761	0,8687	0,8610	0,8531

Das ist der fette Wert in der Tabelle bei $n = 101$.

Wegen $n \cdot p \cdot (1-p) = 101 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 \approx 9{,}1$ kann das Ergebnis auch näherungsweise mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$$P(Y \le 8) \approx \Phi\left(\frac{8{,}5 - 10{,}1}{\sqrt{9{,}09}}\right) \approx 0{,}3 .$$

Bewertung II: 10

d) Es wird der größte Wert für n gesucht, für den der Ausdruck

$$\sum_{k=0}^{n-92-1} \binom{n}{k} \cdot 0{,}1^k \cdot 0{,}9^{n-k}$$ kleiner als 5% ist.

Mithilfe des CAS erhält man für $n = 97$ den Wert 0,029134 und für $n = 98$ den Wert 0,064923. Man kann aber auch die fett gedruckten Werte in der obigen Tabelle nach rechts durchgehen, bis der Wert gerade noch $\le 5\%$ .Das ist für $n = 97$ der Fall.

Will man hier wieder mit normalverteilten Näherungen arbeiten, wählt man am besten als Zufallsvariable Y die möglichen Anzahlen der n Personen, die tatsächlich an der Fahrt teilnehmen wollen. Die Frage ist für welches n der Wert $P(\{Y \le 92\})$ noch ≥ 95 % ist. Die Variable Y ist n-0,9-binomialverteilt.

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Die Laplace-Bedingung ist ab $n = 94$ erfüllt. Man wird ein n schätzen, das größer als 93 ist. Dann gilt:
$$P(\{Y \leq 92\}) \approx \Phi\left(\frac{92{,}5-0{,}9n}{\sqrt{0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot n}}\right).$$
Der rechte Wert muss also noch gerade $\geq$ 95% sein, also muss das Argument $\geq 1{,}645$ sein. Mit der Substitution $m = \sqrt{n}$ und Rundungen auf vier Dezimalen folgt $n \leq 97{,}3...$.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Die Frage zielt auf die Bestimmung des Ablehnungsbereichs eines einseitigen Hypothesentests über den Parameter p einer Binomialverteilung mit
$H_0: p \geq 0{,}1$ und $H_1: p < 0{,}1$. p sei dabei die Wahrscheinlichkeit, dass eine Buchung abgesagt wird. Wenige Absagen sprechen gegen H_0.
Die Testvariable T beschreibe die möglichen Anzahlen von Absagen. Wir nehmen auch hier an, dass T binomialverteilt ist.
Es ist also der größte Wert K zu bestimmen für den gilt
$$\sum_{k=0}^{K} B(1000;0{,}1;k) \leq 5\%.$$
Mithilfe des CAS erhält man:
$$\sum_{k=0}^{84} B(1000;0{,}1;k) = 0{,}048503 \text{ und } \sum_{k=0}^{85} B(1000;0{,}1;k) = 0{,}060694$$
Wenn also unter 1 000 Buchungen nur 84 oder weniger Absagen auftreten, kann man von einer auf dem 5%-Niveau signifikanten Senkung der Absagerquote ausgehen.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>f)</td><td>Es wird der Erwartungswert für die Einnahmen ausgerechnet, wobei <u>keine Überbuchungen</u> zugelassen werden:
Die Einnahmen setzen sich dann zusammen aus den Anzahlungen und den Restzahlungen.
Die Berechnung der zugehörigen Erwartungswerte ergibt:
$E_1 = 92 \cdot 5\,€ = 460\,€$ und $E_2 = 92 \cdot 0{,}94 \cdot 15\,€ = 1297{,}20\,€$.
Die Addition ergibt E = 1757,20 €.
Das Unternehmen kann mit 1757,20 € rechnen, wenn keine Überbuchungen zugelassen werden.</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III

g)

- Wenn genau 5 Personen absagen, sind die Einnahmen von $92 \cdot 20\,€ + 5 \cdot 5\,€ = 1\,865\,€$ offenbar maximal:

  Sagen nämlich weniger ab, entfallen für Überbuchungen die betreffenden 5 € und es fallen zusätzlich Kulanzkosten an. Sagt z. B. keiner ab, so ist die Einnahmebilanz $92 \cdot 20\,€ - 5 \cdot 25\,€ = 1\,715\,€$.

  Sagen mehr als 5 Personen ab, so werden bei jeder weiteren absagenden Person die Einnahmen von 20 € durch nur 5 € ersetzt.

  Der Extremfall, (der auch extrem unwahrscheinlich ist) besteht darin, dass alle absagen, dann gäbe es nur noch Einnahmen in Höhe von $97 \cdot 5\,€ = 485\,€$.

  <u>Bemerkung:</u> Abgesehen davon, dass dieser Fall praktisch unmöglich ist, wäre es natürlich noch schlimmer für das Busunternehmen, wenn nur eine Person nicht absagt, weil dann ein Bus fahren müsste. Ähnliches gilt, wenn so viele Personen absagen, dass man mit dem größeren Bus nicht auskommt, aber das sind Gewinnfragen, um die es hier nicht geht.

- Die Einnahmen setzen sich dann zusammen aus den Anzahlungen, den Restzahlungen und den negativ gerechneten Kulanzkosten für die abzuweisenden Kunden.

  Die Rechnung wird dabei einfacher, wenn man sich – wie vorgeschlagen – vorstellt, dass die abzuweisenden Kunden erst die (5+15) € zahlen und dann nicht (25+5) €, sondern 45 € zurückbekommen.

  $E_1 = 97 \cdot 5€ = 485€$,
  $E_2 = 97 \cdot 0{,}94 \cdot 15€ = 1367{,}70€$,
  $$K = \left(\sum_{i=0}^{4} (5-i)\; B(97;0{,}06,i) \right) \cdot 45€ = 24{,}60€ .$$

  Die 5 Werte der Binomialverteilung können schnell aus der Tabelle für $n = 97$ entnommen werden, also

  $$K = \left(5 \cdot 0025 + 4 \cdot 0{,}0153 + 3 \cdot 0{,}0469 + 2 \cdot 0{,}0949 + 1 \cdot 0{,}1423\right) \cdot 45€ \approx 24{,}60€ .$$

  Die Addition ergibt **E = 1828,10 €.**

Der Vergleich mit f) zeigt, dass es sich für das Unternehmen finanziell lohnt, die 5 Überbuchungen zuzulassen. — III: 20

		I	II	III
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25