Analysis 1

I.1 Exzenterscheibe für eine Kraftmaschine

Bestandteil einer Fitnesskraftmaschine ist eine so genannte Exzenterscheibe (siehe Abb. 1).

Der Rand der Exzenterscheibe wird aus einer Parabel f und einem Kreis k zusammengesetzt (siehe Abb. 2).

Alle Längeneinheiten sind in cm angegeben.

Parabel f: $f(x) = -0{,}1x^2 + 30$

Kreis k: obere Kreishälfte:
$k_{o,r}(x) = +\sqrt{r^2 - x^2}$ bzw.

untere Kreishälfte:
$k_{u,r}(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$
mit $-r \le x \le r$,
wobei $r > 0$ der Radius des Kreises ist.

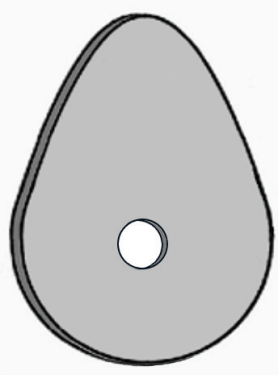


Abb. 1

Der Kreismittelpunkt M liegt in (0 | 0).
Der Radius r des Kreises ist gerade so groß, dass er die Parabel im Punkt R_0 berührt.

Für den trainierenden Sportler sind die Längen der Strecken $\overline{MR_i}$, die *Hebellängen* heißen, von besonderer Bedeutung.

Die Geraden durch die Punkte M und R_i heißen *Hebelgeraden*.

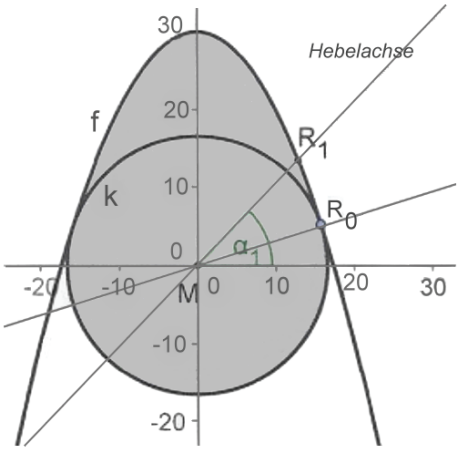


Abb. 2

Die Punkte R_i mit $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$ liegen alle auf dem Rand der Exzenterscheibe.
Die genaue technische Funktionsweise der Exzenterscheibe in der Kraftmaschine wird in dieser Aufgabe nicht untersucht.

a) Berechnen Sie den Punkt R_1 (x_1|y_1), der auf der Parabel f und der Hebelgeraden mit einem Steigungswinkel von $\alpha_1 = 45°$ liegt (siehe Abb. 2).
Zur Kontrolle (gerundete Werte): $R_1(13{,}03 \mid 13{,}03)$ **(10P)**

In der nachstehenden Tabelle sind einige Wertepaare der Funktion h angegeben, welche die Hebellängen in Abhängigkeit vom Steigungswinkel α der zugehörigen Hebelgeraden darstellen.

Winkel α	30°	45°	50°	80°	90°
Winkel α im Bogenmaß	$\frac{\pi}{6} \approx 0{,}52$	$\frac{\pi}{4} \approx 0{,}79$	$\frac{5}{18}\pi \approx 0{,}87$	$\frac{8}{18}\pi \approx 1{,}40$	$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$
Hebellänge $h(\alpha)$	16,94		19,23	28,05	30

b) Berechnen Sie die Hebellänge $|MR_1|$ auf der Hebelgeraden mit $\alpha_1 = 45°$ und ergänzen Sie den Wert in der Tabelle. **(10P)**

c) Ermitteln Sie den Radius r des Kreises k und den Berührpunkt R_0 $(x_0 \mid y_0)$ im 1. Quadranten.
Zur Kontrolle mit gerundetem x-Wert: $R_0(15{,}8 \mid 5)$ **(20P)**

d) Die in der Tabelle dargestellte Abhängigkeit der Hebellänge h vom Winkel α kann gut durch eine quadratische Funktion p mit $p(0) = 17{,}32$, $p(0{,}87) = 19{,}23$ und $p(1{,}4) = 28{,}05$ modelliert werden.

- Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser quadratischen Funktion p.
  Runden Sie dabei die Koeffizienten im Funktionsterm von p auf zwei Nachkommastellen.
- Vergleichen Sie die Tabellenwerte der Funktion h mit den Werten der Näherungsfunktion p und untersuchen Sie, ob die Anforderung „ maximale Abweichung 5 %“ erfüllt ist. **(25P)**

e) Die Exzenterscheibe ist 2 cm dick und aus Stahl mit einer Dichte von $\rho_{Stahl} = 7{,}9\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ gefertigt.

Bestimmen Sie das Volumen V und die Masse m der Exzenterscheibe.
Zerlegen Sie dazu die Exzenterfläche in geeignete Teilflächen.

Hinweis: Es gilt der Zusammenhang $m = V \cdot \rho_{Stahl}$. **(20P)**

f) Für eine andere Kraftmaschine benötigt man eine zweite Exzenterscheibe gleicher Bauart. Diese Exzenterscheibe soll aber eine maximale Hebellänge von 40 cm und eine minimale von 10 cm haben.
Bestimmen Sie geeignete Terme für die Parabel f_n und für den Kreis k_n, welche diese zweite Exzenterscheibe beschreiben.

Hinweis: Hierbei reicht für die Funktion f auch eine näherungsweise Ermittlung des zugehörigen Koeffizienten auf zwei Nachkommastellen genau. **(15P)**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Der Punkt R_1 liegt auf der Hebelgeraden g mit der Steigung 1, der Gleichung $g(x) = x$ und der Parabel f. $g(x) = f(x)$ $x = -0{,}1x^2 + 30$ $x^2 + 10x - 300 = 0$ $x_{1,2} = -5 \pm 5\sqrt{13}$ $x_1 \approx 13{,}03$ $x_2 \approx -23{,}03$ Da R_1 im 1. Quadranten liegt, ergibt sich der Punkt R_1 zu $(x \mid f(x)) \approx (13{,}03 \mid 13{,}03)$.	10		
b)	Die Hebellänge bildet die Hypotenuse im Dreieck R_1MC, wobei C die senkrechte Projektion von R_1 auf die x-Achse ist. Es gilt somit mithilfe des Satzes des Pythagoras: $\lvert MR_1 \rvert = \sqrt{x^2 + [f(x)]^2}$ $\lvert MR_1 \rvert = \sqrt{2 \cdot \left(-5 + 5\sqrt{13}\right)^2}$ $\lvert MR_1 \rvert \approx 18{,}424$ Der Hebel ist bei einem Winkel von $\alpha = 45°$ etwa 18,42 cm lang. *Alternative:* *Mit* $\sin\alpha = \frac{y_1}{\lvert MR_1 \rvert}$ *gilt* $\lvert MR_1 \rvert = \frac{-5 + 5\sqrt{13}}{\sin 45°} \approx 18{,}424$.	10		
c)	*Möglicher Lösungsansatz zur Berechnung des Berührpunktes R_0:* Die Variablen r und x müssen bestimmt werden, somit benötigt man zwei Bedingungen: 1. Gleichsetzung der Terme der Funktionsgleichungen von f und $k_{o,r}$: $f(x) = k_{0,r}(x)$ $-0{,}1x^2 + 30 = +\sqrt{r^2 - x^2}$ 2. Gleichsetzung der Steigungen der Funktionen f und $k_{o,r}$ in dem Punkt R_0: $f'(x) = k'_{0,r}(x)$			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	$-0{,}2x = \frac{1}{2}\cdot\left(r^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)$ $5 = \sqrt{r^2 - x^2}$ mit $x \neq 0$ Die linken Seiten der beiden Bedingungen sind gleich: $-0{,}1x^2 + 30 = 5$ $x^2 - 250 = 0$ $x_1 = 5\sqrt{10} \approx 15{,}81$ $x_2 = -5\sqrt{10} \approx -15{,}81$ Der gesuchte Punkt, an dem sich der Kreis und die Parabel im 1. Quadranten berühren, lautet $R_0\ (5\sqrt{10}\,\vert\, f(5\sqrt{10})) \approx R_0(15{,}8\,\vert\,5)$, der Radius des eingepassten Kreises *k* beträgt $r = \sqrt{(5\sqrt{10})^2 + 5^2} \approx 16{,}58$. *Alternativ wäre auch folgende geometrische Lösung denkbar:* Der Abstand vom Kreismittelpunkt *M* zu einem Punkt *R* auf dem Graphen der Parabel *f* ergibt sich als Hypotenuse $\overline{MR}$ des Dreiecks *RMC*, wobei *C* die Projektion von *R* auf die *x*-Achse ist. Nach Pythagoras ergibt sich wie in Aufgabenteil b) für die Hypotenuse $\vert MR\vert = \sqrt{x^2 + \left(30 - 0{,}1x^2\right)^2}$. Das Minimum von $\vert MR\vert$ liegt wegen der Monotonie der Wurzelfunktion an derselben Stelle wie das Minimum des Abstandsquadrats $\vert MR\vert^2 := g(x)$. Es wird also das lokale Minimum der Funktion *g* gesucht: $g'(x) = 0$ mit $g''(x) > 0$ an der Nullstelle von g' $\Rightarrow$ *x* ist lokale Minimumstelle von *g*. $g(x) = x^2 + (30 - 0{,}1x^2)^2$ $g'(x) = 2x + 2\cdot(30 - 0{,}1x^2)\cdot(-0{,}2x)$ $0 = 0{,}04x^3 - 10x$ $0 = x\cdot(0{,}04x^2 - 10)$ $x = 0 \ \vee\ 0{,}04x^2 = 10$ $x = 0 \ \vee\ x = -5\cdot\sqrt{10} \ \vee\ x = 5\cdot\sqrt{10}$ $x = 0 \ \vee\ x \approx -15{,}81 \ \vee\ x \approx 15{,}81$ Es gilt zudem $g''(x) = 0{,}12x^2 - 10$ und damit $g''\left(\pm 5\sqrt{10}\right) = 20 > 0$ und $g''(0) = -10 < 0$, woraus folgt, dass an den Stellen $\pm 5\sqrt{10}$ jeweils ein lokales Minimum vorliegt.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Der gesuchte Punkt, in dem sich der Kreis und die Parabel im 1. Quadranten berühren, lautet $R_0\left(5\sqrt{10}\,\middle\vert\, f\left(5\sqrt{10}\right)\right) \approx R_0\,(15{,}8\,\vert\,5)$, der Radius des eingepassten Kreises k (gemessen in cm) beträgt $r=\sqrt{\left(5\sqrt{10}\right)^2+5^2}\approx 16{,}58$.		15	5
d)	Durch die drei angegebenen Punkte wird eindeutig eine Parabel p mit $p(x)=ax^2+bx+c$ festgelegt, da die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen. Es muss folgendes Gleichungssystem mit drei Variablen gelöst werden:			

$$\begin{aligned} a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c &= 17{,}32\\ a\cdot 0{,}87^2 + b\cdot 0{,}87 + c &= 19{,}23\\ a\cdot 1{,}4^2 + b\cdot 1{,}4 + c &= 28{,}05 \end{aligned}$$

Unmittelbar ist $c=17{,}32$ aus der 1. Gleichung zu entnehmen.

$$\begin{aligned} a\cdot 0{,}87^2 + b\cdot 0{,}87 + 17{,}32 &= 19{,}23\\ a\cdot 1{,}4^2 + b\cdot 1{,}4 + 17{,}32 &= 28{,}05 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a\cdot 0{,}87^2 + b\cdot 0{,}87 &= 1{,}91\\ a\cdot 1{,}4^2 + b\cdot 1{,}4 &= 10{,}73 \end{aligned}$$

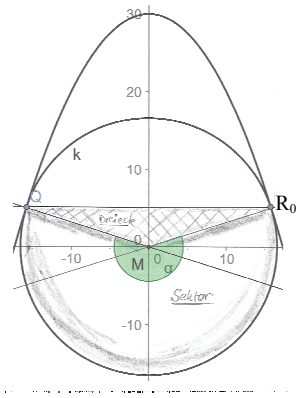
Für die Koeffizienten werden folgende Werte ausgerechnet: $a\approx 10{,}32$, $b\approx -6{,}78$ und $c\approx 17{,}32$.

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet $p(x)=10{,}32x^2-6{,}78x+17{,}32$.

Die Güte der Funktion p lässt sich mithilfe der ergänzten Tabelle abschätzen:

Winkel α	30°	45°	50°	80°	90°
Winkel α im Bogenmaß	$\frac{\pi}{6}\approx 0{,}52$	$\frac{\pi}{4}\approx 0{,}79$	$\frac{5}{18}\pi\approx 0{,}87$	$\frac{8}{18}\pi\approx 1{,}4$	$\frac{\pi}{2}\approx 1{,}57$
Hebellänge h	16,94	18,43	19,23	28,05	30
Hebellänge p	16,58	18,41	19,23	28,06	32,13
$\lvert h(x)-p(x)\rvert$	0,36	0,02	0	0,01	2,13

Die Abweichung der Näherungsfunktion ist bei dem Winkel $\alpha=90^\circ$ mit etwa 7,1 % am größten. Hier ist die Abweichung größer als die geforderte maximale Abweichung, alle anderen Werte aber liegen innerhalb der 5% -Grenze.

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Falls mit „exakten“ Werten für die Winkelgrößen gerechnet wird, gibt es Abweichungen von den angegebenen Ergebnissen.		25	
e)	Die Exzenterfläche kann in drei Teilflächen aufgeteilt werden: 1. Kreissektor mit dem Bogen von Berührpunkt Q auf der linken Seite bis zum Berührpunkt R_0 auf der rechten Seite. 2. gleichschenkliges Dreieck MR_0Q 3. die von der Parabel und der Strecke $\overline{QR_0}$ eingeschlossene Fläche  zu 1. Kreissektor: $A_1 = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\alpha}{2} \cdot r^2$ mit $\alpha = \pi + 2 \cdot \arctan \frac{y_0}{x_0} = 3{,}754...$ $A_1 = 516{,}1952...$ zu 2. Dreieck: $A_2 = \frac{1}{2} \cdot 2x_0 y_0 = x_0 y_0 = 25 \cdot \sqrt{10}$ $A_2 = 79{,}0569...$ zu 3. Flächenanteil zwischen der Parabel und der um 5 nach oben verschobenen x-Achse: $A_3 = 2 \cdot \int_0^{x_0} f(x)\,dx$ $= 2 \cdot \int_0^{5\cdot\sqrt{10}} (-0{,}1x^2 + 25)\,dx$ $= 2 \cdot \left[-\frac{1}{30}x^3 + 25x \right]_0^{5\cdot\sqrt{10}}$ $A_3 = 527{,}0462...$ $A = A_1 + A_2 + A_3 = 1122{,}298...$ Die Masse der Exzenterscheibe der Dicke d in Gramm ergibt sich zu: $m = A \cdot d \cdot \rho$ $\approx 1122{,}3 \cdot 2 \cdot 7{,}9$ $\approx 17\,732{,}3$ Die Masse der Exzenterscheibe beträgt etwa 17,7 kg.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Alternativ lässt sich der Exzenterflächeninhalt auch ermitteln, indem man die *Fläche A aus der Kreisfläche und der Fläche zwischen den Graphen von f und k zusammensetzt. Allerdings führt dieser Ansatz auf ein Integral, das ohne eine geeignete Substitution nicht gelöst werden kann.* $A = 2\cdot\int_0^{x_0}(f(x)-k_{o,r}(x))\,dx + \pi\cdot r^2$ $= 2\cdot\int_0^{x_0}(-0{,}1x^2+30-\sqrt{r^2-x^2})\,dx + \pi\cdot r^2$ $= 2\cdot\left[-\frac{x^3}{30}+30x-\frac{r^2}{2}\cdot\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)-\frac{x\cdot\sqrt{r^2-x^2}}{2}\right]_0^{5\cdot\sqrt{10}} + \pi\cdot\left(5\cdot\sqrt{11}\right)^2$ $\approx 258{,}3605 + 863{,}9380$ $A \approx 1122{,}3$		15	5
f)	Die maximale Hebellänge des zweiten Exzenters bestimmt mit 40 cm die Lage des Scheitelpunktes der Parabel, die minimale Hebellänge den Radius des Kreises mit 10 cm. Die Parabel hat die Gleichung $f_n(x) = a\cdot x^2+40$, der Kreis $k_n(x)=\sqrt{100-x^2}$ mit $\lvert x\rvert \le 10$. Der Koeffizient *a* wird mithilfe des Berührpunktes $R_0(x_0 \mid y_0)$ bestimmt. $f_n(x_0) = k_n(x_0)$ $a{x_0}^2+40=\sqrt{100-{x_0}^2}$ $(a{x_0}^2+40)^2 = 100-{x_0}^2$ Es ergibt sich eine biquadratische Gleichung: ${x_0}^4+\left(\frac{80a+1}{a^2}\right){x_0}^2+\frac{1500}{a^2}=0$. Nach Substitution von x_0^4 durch z^2 ergibt sich eine quadratische Gleichung. Die Diskriminante $Dis=\left(\frac{80a+1}{2a^2}\right)^2-\frac{1500}{a^2}$ dieser quadratischen Gleichung muss Null ergeben, weil genau ein gemeinsamer Punkt *R* (Berührpunkt) von Parabel und Kreis im 1. Quadranten existieren soll. Gesucht sind also die Lösungen der Gleichung $\left(\frac{80a+1}{2a^2}\right)^2=\frac{1500}{a^2}$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Es ergibt sich wiederum eine quadratische Gleichung: $(80a+1)^2 = 4a^2 \cdot 1500$ $6400a^2 + 160a + 1 = 6000a^2$ $a^2 + \frac{160}{400}a + \frac{1}{400} = 0$ Diese Gleichung hat die Lösungen $a \approx -0{,}394$ und $a \approx -0{,}0064$. Die Gleichungen der gesuchten Funktionen lauten daher $f_n(x) = -0{,}394 \cdot x^2 + 40$ und $k_n(x) = \sqrt{100 - x^2}$. Die zweite Lösung für *a* ist auszuschließen, da die zugehörige Parabel die Nullstellen etwa bei 80 und –80 hat, was mit dem Kreis nicht zusammenpassen würde. *Alternativ zur dargelegten Lösung lässt sich zur oben genannten Gleichung* $ax_0^2 + 40 = \sqrt{100 - x_0^2}$ *auch eine andere zweite Bedingung formulieren, die die Identität der Steigungen der beiden Funktionen f und k aufnimmt (vergl. Lösung Aufgabenteil c)):* $2ax_0 = \frac{-2x_0}{2\sqrt{100 - x_0^2}}$. *Diese Gleichung nach a aufgelöst und in die 1. Gleichung eingesetzt ergibt nach einigen Umformungen schließlich* $x_0^4 + 6000x_0^2 - 600000 = 0$ *mit der positiven Lösung* $x_0 = 9{,}919...$ *und* $a = -0{,}3936...$ *Die Lösung der biquadratischen Gleichung lässt sich auch gut durch Probieren mit dem Taschenrechner finden, da von vornherein bekannt ist, dass x_0 in der Nähe des Kreisradius, mithin also etwa bei 10 liegen muss.*		5	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Analysis 2

I.2 Stromversorgung

Ein Bundesstaat eines Landes wird vom Jahr 1991 an vom reinen Agrarland in ein Land mit hoher Industrialisierung umstrukturiert. Als Folge ist ein deutlich steigender Bedarf an elektrischer Energie zu verzeichnen (siehe Informationen in der Anlage).

Die im Jahr 2009 bestehenden Kraftwerke sind vollständig ausgelastet. Das Wirtschaftsministerium des Landes geht für den Jahresenergiebedarf von exponentiellem Wachstum aus. Es legt dem jährlichen Energiebedarf folgende Funktionsgleichung zugrunde: $f_{\text{Wirtschaft}}(t) = a \cdot b^{t}$, t in Jahren ab 1991 (d. h. für das Jahr 1991 gilt $t = 0$).

Eine Umweltgruppe dagegen vermutet ein logistisches Wachstum und entwirft die Funktion $f_{\log}$ mit der Gleichung $f_{\log}(t) = \dfrac{600}{5 + 7 \cdot e^{-0{,}066 \cdot t}}$, die auf einer Sättigungsgrenze von 120 TWh (*Erläuterung siehe Anlage*) basiert. Auch hier soll t in Jahren ab 1991 gezählt werden.

a)
- Ermitteln Sie die Werte der Parameter a und b für $f_{\text{Wirtschaft}}$ mithilfe der Energiedaten von 1991 und von 2009 (b auf drei Nachkommastellen genau).

  Falls Sie die Parameter nicht ermitteln konnten, arbeiten Sie hier mit der Funktion $f_{\exp}$ mit der Gleichung $f_{\exp}(t) = 50 \cdot e^{0{,}03\,t}$ weiter.

- Ergänzen Sie die Prognosedaten in der Tabelle (siehe Anlage) mithilfe der Funktion $f_{\text{Wirtschaft}}$ (bzw. $f_{\exp}$) und skizzieren Sie den Graphen für das exponentielle Wachstum mithilfe der Tabellenwerte in das Koordinatensystem in der Anlage.
- Bestätigen Sie, dass die oben angegebene Funktion $f_{\log}$ die Tabellenwerte für 1991 und für 2009 mit Abweichungen von höchstens einem Prozent erfasst.
- Ergänzen Sie die Prognosedaten in der Tabelle (siehe Anlage) mithilfe der Funktion $f_{\log}$.
- Skizzieren Sie den Graphen für das logistische Wachstum mithilfe der Tabellenwerte in das Koordinatensystem in der Anlage. **(30P)**

Im Weiteren soll mit den Funktionen $f_{\exp}$ und $f_{\log}$ gearbeitet werden.

b) Die größte Wachstumsrate des Energiebedarfs soll jeweils untersucht werden.

- *Exponentieller Ansatz*: Bestimmen Sie die größte Wachstumsrate zwischen 1991 und 2009, d. h. im Intervall [0; 18].

- *Logistischer Ansatz*: Bestimmen Sie den *Zeitpunkt* der größten Wachstumsrate zwischen 1991 und 2009. Bestimmen Sie dann die dazugehörige Wachstumsrate. **(20P)**

c) • Weisen Sie nach, dass $F_{\log}(t) = \frac{20000}{11} \cdot \ln(5 \cdot e^{0{,}066t} + 7)$ eine Stammfunktion zu $f_{\log}$ ist.

- Bestimmen Sie den Durchschnittsjahresbedarf an elektrischer Energie zwischen 2009 und 2014, d. h. im Intervall [18; 23], sowohl für den exponentiellen als auch für den logistischen Ansatz. **(20P)**

Der Kraftwerksbetreiber entwirft eine dritte Prognose für die Energieentwicklung.
Er geht dabei von dem Ansatz $f_{Kraftwerk}(t) = a \cdot \frac{b}{b - c \cdot t}$ aus.

d) Gehen Sie von $f_{Kraftwerk}(t) = 50 \cdot \frac{4}{4 - 0{,}1\,t}$ aus.

- Bestimmen Sie die durchschnittliche jährliche Wachstumsrate für den Jahresbedarf an elektrischer Energie im Zeitraum von 2009 bis 2026 für alle drei Modelle.
- Interpretieren Sie die Ergebnisse.
- Es wird die folgende Meinung vertreten: „Das Modell des Kraftwerksbetreibers ist für die fernere Zukunft unangemessen.“
  Begründen Sie diese Aussage. **(15P)**

Im Weiteren sollen wieder nur die Modellfunktionen f_{exp} und f_{log} betrachtet werden. Da feststeht, dass der Energiebedarf in Zukunft steigen wird, muss rechtzeitig ermittelt werden, in welchem Umfang weitere Kraftwerke notwendig sind. Die für diese Planung maßgebliche Größe ist die elektrische Leistung *P*.
Hinweis: $P_{\text{Durchschnitt}} = \frac{E}{t}$, *dabei ist* $P_{\text{Durchschnitt}}$ *die durchschnittliche Leistung, die erforderlich ist, um den Energiebedarf E im betrachteten Zeitraum t bereitstellen zu können. Die Maßeinheit für die Leistung ist das Watt (*W*). Für Kraftwerke ist die Einheit Megawatt* (MW) *üblich,* $1\ \text{MW} = 10^6\ \text{W}$.
Beispielsweise stellt ein Kernkraftwerk eine elektrische Leistung von etwa 700 MW bis 1500 MW *bereit.*

Das Wirtschaftsministerium gibt bekannt, dass mithilfe von Modellrechnungen mit der Funktion f_{exp} für 2026 ein Zuwachs der durchschnittlich nötigen elektrischen Leistung gegenüber dem Wert von 2009 in einer Höhe von 7000 MW zu erwarten ist. Diese Leistung könne durch den Bau von etwa sieben neuen Kernkraftwerken bereitgestellt werden. Die Umweltgruppe prognostiziert mithilfe ihrer Modellfunktion bis 2026 nur einen zusätzlichen Bedarf an durchschnittlicher elektrischer Leistung von 2000 MW, was durch Wasser-, Wind- und Solarkraftwerke erreicht werden könne.

e) • Bestätigen Sie, dass die tatsächlich benötigte durchschnittliche elektrische Leistung im Jahr 2009 rund 9590 MW beträgt.

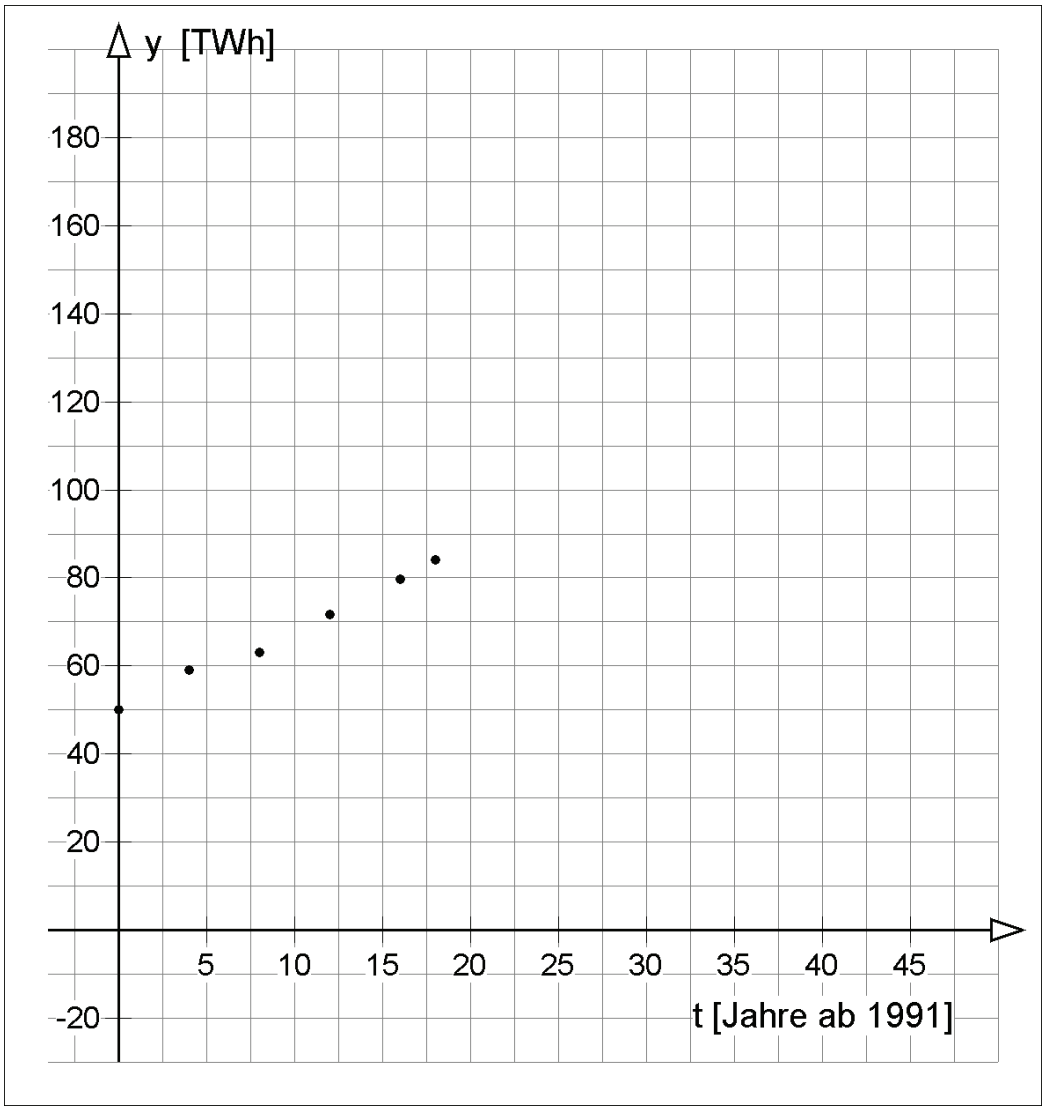
- Beurteilen Sie anschließend die Ergebnisse des Ministeriums und der Umweltgruppe. **(15P)**

Anlage zur Aufgabe „Stromversorgung“

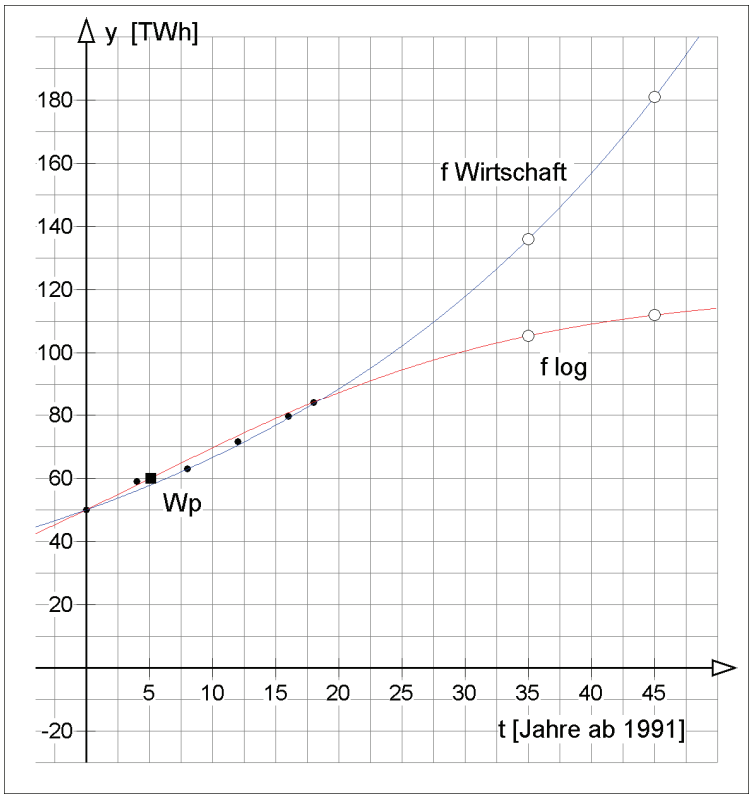
Die folgende Tabelle gibt den Jahresbedarf an elektrischer Energie in dem Bundesstaat im jeweils angegebenen Jahr an.
(TWh *steht für die Energiemaßeinheit Terawattstunde,* $1\ \text{TWh} = 10^3\,\text{GWh} = 10^6\,\text{MWh} = 10^{12}\ \text{Wh}$)

Jahreszahl	1991	1995	1999	2003	2007	2009	zu a)	Prognose 2026	Prognose 2036
Jahresenergie-bedarf in TWh	50,0	59,0	63,0	71,5	79,5	84,0	(1) $f_{Wirtschaft}$		
							(2) f_{log}		

Diese Tabellendaten sind bereits in der Grafik eingetragen:



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	• Parameter: $a = 50$, $b = \sqrt[18]{\left(\frac{84}{50}\right)} \approx 1{,}029$, also $f_{\text{Wirtschaft}}(t) = 50 \cdot 1{,}029^t$. • Prognosewerte: Jahr 2026: $f_{\text{Wirtschaft}}(35) \approx 136{,}0$ Jahr 2036: $f_{\text{Wirtschaft}}(45) \approx 181{,}0$ (Ersatzlösungen: $f_{\text{exp}}(35) \approx 142{,}9$; $f_{\text{exp}}(45) \approx 192{,}9$). • Abweichungen: $f_{\log}(0) = 50$ stimmt exakt mit dem Tabellenwert überein. $f_{\log}(18) \approx 84{,}11$ liegt im Bereich von $84{,}0 \pm 0{,}84$. • Prognosewerte: Jahr 2026: $f_{\log}(35) \approx 105{,}4$ Jahr 2036: $f_{\log}(45) \approx 112{,}0$  *Hinweis: Der Graph von f_{exp} weicht nicht stark vom Graphen von $f_{\text{Wirtschaft}}$ ab und wurde daher hier nicht abgebildet.*	20	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
b)	• Exponentieller Ansatz: Die Wachstumsrate steigt streng monoton, also berechnet sich die größte Rate durch die Ableitung am Rand des Intervalls: $f'_{\exp}(18) \approx 2{,}574$ mit $f'_{\exp}(t) = 1{,}5 \cdot e^{0{,}03 \cdot t}$. Die größte Wachstumsrate beträgt hier also rund 2,6 TWh pro Jahr. • Logistischer Ansatz: Die größte Wachstumsrate besteht im Wendepunkt. $W(\,t \mid 60\,)$, denn $y_W = \frac{\text{Sättigungsgrenze}}{2} = 60$. Berechnung von t beispielsweise: $\frac{600}{5+7\cdot e^{-0{,}066\cdot t}} = 60$ $5+7\cdot e^{-0{,}066\cdot t} = \frac{600}{60} = 10$ $e^{-0{,}066\cdot t} = \frac{5}{7}$ $t = -\frac{\ln\left(\frac{5}{7}\right)}{0{,}066} \approx 5{,}098$ Zum Zeitpunkt $t = -\frac{\ln\left(\frac{5}{7}\right)}{0{,}066} \approx 5{,}098$ ist die Wachstumsrate maximal. *Die Stelle des Wendepunktes könnte auch langwieriger über den Ansatz $f''(t) = 0$ bestimmt werden.* Es gilt: $f'_{\log}(t) = \frac{600 \cdot 0{,}066 \cdot 7 \cdot e^{-0{,}066\cdot t}}{\left(5+7\cdot e^{-0{,}066\cdot t}\right)^2}$. Setzt man die oben berechnete Stelle der maximalen Wachstumsrate ein, ergibt sich: $f'_{\log}\left(-\frac{\ln\left(\frac{5}{7}\right)}{0{,}066}\right) = 1{,}98$ Die maximale Wachstumsrate beträgt also 1,98.		15	5

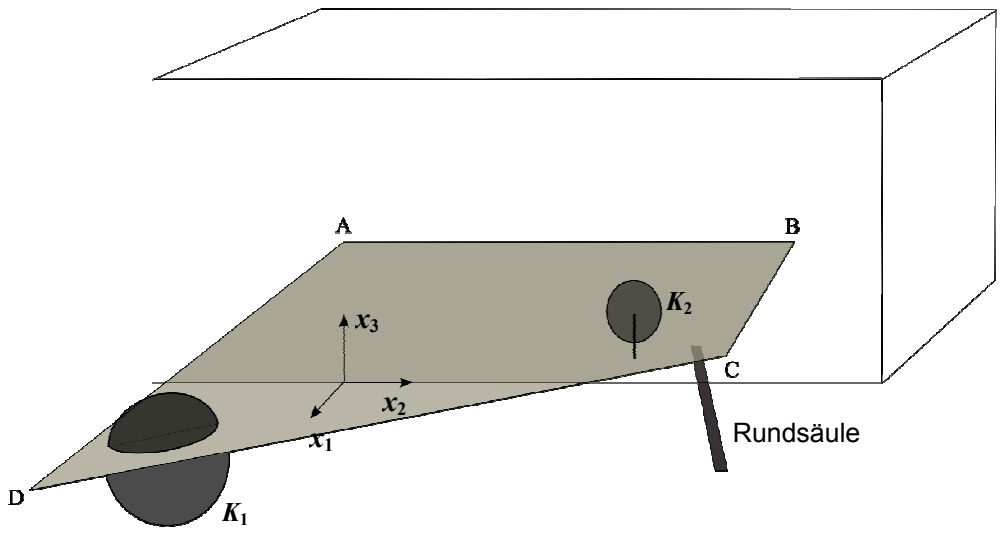
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	• Nachweis durch Ableiten von F oder durch Bildung einer Stammfunktion zu f (in beiden Fällen muss der Bruch mit einer e-Funktion erweitert werden). Rechnung über die Ableitung: $F'_{\log}(t) = \frac{20000}{11} \cdot \frac{1}{7+5\cdot e^{0,066\cdot t}} \cdot 0,33 \cdot e^{0,066\cdot t}$ $= \frac{600\cdot e^{0,066\cdot t}}{7+5\cdot e^{0,066\cdot t}}$ (mit dem Faktor $e^{-0,066\cdot t}$ erweitern) $= \frac{600}{7\cdot e^{-0,066\cdot t}+5} = f_{\log}(t)$ Also ist $F_{\log}$ eine Stammfunktion zu $f_{\log}$. • $F_{\exp}(t) = \frac{50}{0,03} \cdot e^{0,03\cdot t} \approx 1666,67 \cdot e^{0,03\cdot t}$. Bestimmung des Durchschnittsbedarfs: $\frac{1}{5}\cdot(F_{\log}(23) - F_{\log}(18)) \approx 88,07$. Nach dem logistischen Modell liegt der Durchschnittsjahresbedarf zwischen 2009 und 2014 bei rund 88,1 TWh. $\frac{1}{5}\cdot(F_{\exp}(23) - F_{\exp}(18)) \approx 92,57$. Nach dem exponentiellen Modell liegt der Durchschnittswert bei rund 92,6 TWh, also ein etwas höherer Wert für diesen Zeitraum.		15	5
d)	• Ansatz für die durchschnittliche Änderungsrate für alle drei Modelle: $\frac{1}{35-18} \cdot \int_{18}^{35} f'(t)\,dt$ oder einfacher $\frac{1}{17}\cdot\left(f(35) - f(18)\right)$. Für den logistischen Ansatz ergibt sich eine durchschnittliche Änderungsrate von rund 1,25 TWh pro Jahr, für den exponentiellen Ansatz ergeben sich rund 3,36 TWh pro Jahr und für den Ansatz des Kraftwerksbetreibers ergeben sich rund 18,18 TWh pro Jahr. • Der durchschnittliche Anstieg ist beim logistischen Ansatz am niedrigsten, hier nähert sich der Verbrauch langsam der Sättigungsgrenze. Der durchschnittliche Anstieg gemäß dem Ansatz des Kraftwerksbetreibers ist extrem hoch im Vergleich zu den Werten des Gesamtverbrauchs pro Jahr und daher unrealistisch. • Für $t = 40$, also im Jahr 2031, gäbe es eine Singularität, für $t > 40$ ergäben sich negative Energiewerte, also ist der Ansatz mit Sicherheit für diese Jahre unbrauchbar.		15	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	• Hier muss der Tabellenwert 84,0 TWh verwendet werden, da er der korrekte Istwert ist. Für die benötigte Durchschnittsleistung ergibt sich dann: $\frac{84 \cdot 10^{12}\,\text{Wh}}{365 \cdot 24\text{h}} \approx 9{,}589 \cdot 10^{9}\,\text{W} \approx 9590\ \text{MW}$. *Anmerkung: Bei der Verwendung von f_{log} ergäben sich etwa 9600 MW, bei der Verwendung von f_{exp} etwa 9795 MW.* • Wirtschaft: $f_{\exp}(35) - 84\ \text{TWh} \approx 58{,}9\ \text{TWh}$ Durch eine zum ersten Aufgabenteil analoge Rechnung erhält man rund 6720 MW. Es wurde also – möglicherweise interessengeleitet – großzügig auf 7000 MW aufgerundet, nachdem ohnehin schon ein Modell mit starker Wachstumsprognose herangezogen wurde. Umwelt: $f_{\log}(35) - 84\ \text{TWh} \approx 21{,}4\ \text{TWh}$ Durch eine wiederum zum ersten Aufgabenteil analoge Rechnung erhält man rund 2440 MW, es wurde also – möglicherweise interessengeleitet – großzügig auf 2000 MW abgerundet, nachdem ohnehin schon ein Modell mit geringer Wachstumsprognose verwendet wurde.		5	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

LA/AG 1

II.1 Überdachung eines Gebäudeeingangs

Der Entwurf eines Architekten für die Gestaltung des Eingangsbereiches des Hauptsitzes einer großen Versicherungsgesellschaft sieht eine geneigte und unsymmetrisch geformte Überdachung vor, die im linken vorderen Bereich durch eine große Granitkugel K_1 und im rechten vorderen Bereich durch eine rechtwinklig zum Dach verlaufende Rundsäule gestützt wird.



Die Befestigung des Daches erfolgt in den Eckpunkten $A(0|0|5)$ und $B(0|10|6)$ an der Gebäudefront, die in der x_2-x_3-Ebene verläuft. Die beiden anderen Eckpunkte $C(6|12|5)$ und $D(11|-3|2{,}5)$ liegen frei in der Luft. Eine Einheit in dem Koordinatensystem entspricht einem Meter.
Zur Vereinfachung wird die Stärke des Daches nicht berücksichtigt. Die Zahlenwerte der Längen- und Winkelangaben sind auf 2 Nachkommastellen genau anzugeben. Dies gilt für *alle* Aufgabenteile.

a)
- Berechnen Sie eine Koordinatengleichung für die Ebene E_1 durch die Punkte *A, B* und *C*. (Zur Kontrolle: E_1: $2x_1 - x_2 + 10x_3 = 50$).
- Bestätigen Sie, dass auch der Punkt *D* in der Ebene E_1 liegt. **(20P)**

Die Granitkugel K_1 im vorderen Bereich hat einen Radius von $r_1 = 2$ m und liegt im Punkt $P_1(8|0|0)$ auf dem Vorplatz auf. Im Dachbereich ist eine kreisrunde Fläche ausgeschnitten, deren Rand auf der Kugel aufliegt und somit das Dach an dieser Stelle stützt. Daher ist oberhalb des Vordaches eine Kugelhaube zu erkennen.

b) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M' der kreisrunden Ausschnittsfläche und berechnen Sie, um wie viele Zentimeter die Kugeloberfläche orthogonal zur Dachfläche maximal herausragt. **(20P)**

Der Entwurf des Architekten findet nicht die ungeteilte Zustimmung des Vorstandes. Aus gestalterischen Gründen entscheidet man sich für einen Entwurf, der folgende Merkmale besitzt:

Merkmal 1: Die Überdachung liegt direkt auf der Kugeloberfläche auf.

Merkmal 2: Die Position der Kugel bleibt unverändert.

Merkmal 3: Die Eckpunkte A und C bleiben erhalten, während die Punkte B und D durch Veränderung nur ihrer Höhenkoordinaten in die Punkte B' und D' überführt werden.

Der Architekt beginnt die Überarbeitung mit folgendem Vorgehen: Er betrachtet den Punkt B nun als variabel mit den Koordinaten $B'(0 \mid 10 \mid b)$ und bestimmt in Abhängigkeit von b eine Koordinatengleichung einer neuen Ebene E_2 durch die Punkte A, B' und C. Er erhält:

$$2 \cdot (b-5) \cdot x_1 + (5-b) \cdot x_2 + 10 \cdot x_3 = 50 .$$

c) Gehen Sie davon aus, dass dieses Ergebnis korrekt ist.

- Beschreiben Sie, wie der Architekt jetzt weiter vorgehen könnte, um den bisher unbekannten Wert von b so zu bestimmen, dass die geforderten Bedingungen realisiert werden. **(15P)**

  Der folgende <u>Hinweis</u> k ö n n t e hier für Sie hilfreich sein:
  Wenn eine Ebene durch die Gleichung $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 = c$ gegeben ist, der Punkt B auf der Ebene liegt und P ein beliebiger Punkt ist, dann kann man den Abstand d von P zur Ebene durch folgende Formel berechnen: $d = \left| \overrightarrow{PB} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right|$, wobei $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

- Bestimmen Sie nun konkret den Wert für b, die Koordinaten des Auflagepunktes P_2 des Daches auf der Kugel und die Koordinaten der neuen Punkte B' und D'.
  Wenn Sie b nicht bestimmen konnten, verwenden Sie ersatzweise für die anderen Rechnungen für b den (falschen) Wert 5,7. **(20P)**

- Zeigen Sie, dass die veränderte Dachfläche eine größere Neigung als 4° besitzt, die für einen ausreichenden Abfluss der Regenwassermengen als sinnvoll erachtet wird. **(10P)**

d) Für die symbolische Darstellung der globalen Präsenz dieses Unternehmens ist die Positionierung einer maßstabsgerechten Weltkugel K_2 von 2 m Durchmesser oberhalb des Daches geplant. Die Verbindung des Hauptsitzes in Frankfurt/Main mit der wichtigsten außereuropäischen Filiale in New York soll optisch durch einen dünnen Kupferbogen dargestellt werden.

Ort	Geografische Länge	Geografische Breite
Frankfurt/Main	8,68° O	50,12° N
New York	74° W	40,75° N

Ermitteln Sie die Länge des direkt auf der Kugeloberfläche verlaufenden Kupferbogens als kürzeste Verbindung zwischen den beiden Orten. **(15P)**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Sei $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ die allgemeine Gleichung einer Ebene in der Koordinatenform, so erhält man mit Hilfe der drei Punkte *A, B* und *C* ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen: (1) $5c = d \Rightarrow$ $\boldsymbol{c = 0{,}2d}$. Dieser Wert für *c* wird jetzt in (2) eingesetzt. (2) $10b + 6c = d \Rightarrow 10b = -1{,}2d + d = -0{,}2d$, also gilt $\boldsymbol{b = -0{,}02d}$ (3) $6a + 12b + 5c = d$ die eben berechneten Werte in (3) für *c* und *b* einsetzen: $6a - 0{,}24d + d = d \Rightarrow 6a = 0{,}24d \Rightarrow$ $\boldsymbol{a = 0{,}04d}$ Der Wert *d* ist beliebig wählbar. So ergibt sich z. B. mit $d = 50$ die Ebene mit der Gleichung $E_1 : 2x_1 - x_2 + 10x_3 = 50$. Einsetzen der Koordinaten des Punktes *D* in E_1 zeigt, dass auch *D* in E_1 liegt.	20		
b)	Die Gerade g_1, die durch den Mittelpunkt M_1 (8|0|2) der Kugel K_1 und senkrecht zur Ebene E_1 (der Normalenvektor der Ebene E_1 lässt sich sofort aus der Koordinatenform ablesen) verläuft, trifft die Ebene im Mittelpunkt M' des Schnittkreises. $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$. Einsetzen der Koordinaten von $\vec{x}$ in E_1 : $2(8+2k) + k + 10(2+10k) = 50$ führt nach einigen Umformungen zu $k = \frac{2}{15}$. Dieser Wert in g_1 eingesetzt ergibt $M'\left(8\tfrac{4}{15} \middle\| -\tfrac{2}{15} \middle\| 3\tfrac{1}{3}\right)$. Der Abstand *a* ist gleich dem Betrag des Vektors $\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM_1}$: $a = \left\|\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM_1}\right\| = \sqrt{\left(\frac{4}{15}\right)^2 + \left(-\frac{2}{15}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} \approx 1{,}37$. Der Abstand *a* des Kugelmittelpunktes *M* von der Ebene E_1 kann auch mit Hilfe der Hesse´schen Normalenform berechnet werden: $a = \left\|\frac{2 \cdot 8 - 1 \cdot 0 + 10 \cdot 2 - 50}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 10^2}}\right\| \approx 1{,}37$. Es gilt: $2 - a \approx 0{,}63$ Die Kugel ragt somit ungefähr 63 cm über das Dach hinaus.	10	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	• Zwei mögliche Vorgehensweisen werden hier vorgestellt: (i): Man bestimmt mit Hilfe der Hesse´schen Normalform b so, dass der Abstand der Dachebene vom Kugelmittelpunkt genau 2 (der Radius der Kugel) beträgt. Von den zwei Lösungen wählt man die kleinere, weil das Dach ja oben und nicht unten tangential die Kugel berühren muss. (ii): Man betrachtet als Berührpunkt einen variablen Punkt $P(p_1 \mid p_2 \mid p_3)$ auf der Dachebene, für den also gilt: $2\cdot(b-5)\cdot p_1+(5-b)\cdot p_2+10\cdot p_3=50$. (1) Normiert man außerdem einen Normalenvektor der Ebene zu $\overrightarrow{n(b)}$, so muss außerdem – wenn P der Berührpunkt von Kugel und Dach ist – gelten: $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM_1}+2\cdot\overrightarrow{n(b)}$, (2) weil der Berührradius orthogonal zur Dachebene sein muss. Schreibt man (1) und (2) als Koordinatengleichungen, kann man daraus b bestimmen. • *Es wird hier der Weg (i) begangen:* Man normiert den Normalenvektor $\begin{pmatrix}2(b-5)\\5-b\\10\end{pmatrix}$ der Ebene und erhält: $\overrightarrow{n(b)}=\frac{1}{\sqrt{5(b^2-10\cdot b+45)}}\cdot\begin{pmatrix}2(b-5)\\5-b\\10\end{pmatrix}$. Es muss gelten: $\left\lvert\left(\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\overrightarrow{n(b)}\right\rvert=2$ bzw. $\left(\left(\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\overrightarrow{n(b)}\right)^2=4$ $\Leftrightarrow 59\cdot b^2-830\cdot b+2800=0$ $\Leftrightarrow b=\frac{5}{59}\left(83-\sqrt{281}\right)\ \vee\ b=\frac{5}{59}\left(83+\sqrt{281}\right)$ Die kleinere Lösung ist $b_3=\frac{5}{59}\left(83-\sqrt{281}\right)=5{,}6133...$ Einsetzen ergibt: $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM_1}+2\cdot\overrightarrow{n(b_3)}\approx\begin{pmatrix}8{,}24\\-0{,}12\\3{,}98\end{pmatrix}$. Für den Berührpunkt P gilt also ungefähr $P_2(8{,}24 \mid -0{,}12 \mid 3{,}98)$. Für den Punkt $B'(0\mid 10\mid b_3)$ gilt ungefähr $B'(0\mid 10\mid 5{,}61)$. *Die Ersatzlösung ergibt* $B'(0 \mid 10 \mid 5{,}7)$ *und ungefähr* $P_2(8{,}28 \mid -0{,}14 \mid 3{,}98)$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	• (Fortsetzung): $D'(11 \mid -3 \mid d_3)$ erhält man, indem man diese Koordinaten sowie den oben bestimmten Wert für b_3 in die bekannte Gleichung für die Ebene einsetzt und nach d_3 umstellt: $2\cdot(b_3-5)\cdot 11+(5-b_3)\cdot(-3)+10\cdot d_3=50$ $10\cdot d_3=50-2\cdot(b_3-5)\cdot 11+3\cdot(5-b_3)$ $d_3=5-2{,}2\cdot(b_3-5)+0{,}3\cdot(5-b_3)$ Es ergibt sich $d_3\approx 3{,}47$. Die Koordinaten des Punktes D' lassen sich damit näherungsweise mit $D'(11 \mid -3 \mid 3{,}47)$ angeben. *Mit der Ersatzlösung ergibt sich $D'(11 \mid -3 \mid 3{,}25)$.* • Berechnung des Neigungswinkels des Ebene E_2 gegenüber der Grundebene (x_1-x_2-Ebene) mit Hilfe des normierten Normalenvektors $\overrightarrow{n(b_3)}$ von E_2 und dem Einheitsvektor in x_3-Richtung mit Hilfe des Skalarproduktes: $\cos\alpha_2=\begin{pmatrix}0{,}12\\-0{,}06\\0{,}99\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ Also ist $\alpha_2\approx\arccos 0{,}99\approx 7{,}81°$. Damit ist die Bedingung mehr als erfüllt. *Mit der Ersatzlösung ergibt sich ein Winkel von ca. 8,9°.*		25	20
d)	Umrechnung von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten (mit r_2 = 1 m): <u>Frankfurt/Main:</u> $x_1=\cos 8{,}68°\cdot\cos 50{,}12°\approx 0{,}6338$ $x_2=\sin 8{,}68°\cdot\cos 50{,}12°\approx 0{,}0968$ $x_3=\sin 50{,}12°\approx 0{,}7674$ <u>New York:</u> $x_1=\cos(-74°)\cdot\cos 40{,}75°\approx 0{,}2088$ $x_2=\sin(-74°)\cdot\cos 40{,}75°\approx -0{,}7282$ $x_3=\sin 40{,}75°\approx 0{,}6528$ Berechnung des Winkels zwischen Frankfurt/Main und New York: $\cos\gamma=\begin{pmatrix}0{,}6338\\0{,}0968\\0{,}7674\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}2088\\-0{,}7282\\0{,}6528\end{pmatrix}\approx 0{,}5628$. Damit gilt $\gamma\approx 55{,}75°$. Berechnung des Bogens zwischen Frankfurt/Main und New York: $b_1=\frac{55{,}75°}{180°}\cdot\pi\cdot 1\text{ m}\approx 0{,}97\text{ m}$.		15	
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

LA/AG 2

II.2 Kranke Hühner

In einer Geflügelfarm bricht eine Viruserkrankung aus, die für die Tiere teilweise tödlich verläuft, für Menschen aber ungefährlich ist, wenn das Fleisch durchgebraten verzehrt wird. Eine Forschungseinrichtung beobachtet den Krankheitsverlauf und modelliert diesen mittels einer Übergangsmatrix H, wobei sich der Bestandsvektor $\overrightarrow{p_n}$ nach einem Zeittakt zum Bestandsvektor $\overrightarrow{p_{n+1}}$ gemäß folgender Modellgleichung entwickelt: $\vec{p}_{n+1} = H \cdot \vec{p}_n$ (ein Zeittakt ist eine Woche).

Tabelle:

zu \ von	G	K	T
G	0,3	0,1	0
K	0,7	0,7	0
T	0	0,2	1

Übergangsmatrix $H = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,7 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0,2 & 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{p_n} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

(G: gesunde Tiere, K: kranke Tiere, T: gestorbene Tiere, sowie x_n, y_n, z_n als Anzahlen nach n Wochen)

a) Stellen Sie den zugehörigen Übergangsgraphen dar. **(5P)**

b) Es gelten: $H^2 = \begin{pmatrix} \boxed{0,16} & 0,1 & 0 \\ 0,7 & 0,56 & 0 \\ 0,14 & 0,34 & 1 \end{pmatrix}$ und $H^4 = \begin{pmatrix} 0,0956 & 0,072 & 0 \\ \boxed{0,504} & 0,3836 & 0 \\ 0,4004 & 0,5444 & 1 \end{pmatrix}$

- Bestätigen Sie durch Rechnung die Richtigkeit der eingerahmten Zahlen in den angegebenen Matrizen.
- Beurteilen Sie die folgenden Aussagen zu dem linken oberen Matrixwert 0,16 der Matrix H^2 hinsichtlich ihres Wahrheitsgehaltes im Modell:

  (A1) Der Anteil der ursprünglich gesunden Hühner, die während der letzten zwei Wochen gesund waren, beträgt 16 %.

  (A2) Von 100 gesunden Hühnern sind nach zwei Wochen 16 gesund.

  (A3) Der Anteil der ursprünglich gesunden Hühner, die in zwei aufeinander folgenden Wochen gesund waren, ist kleiner als 16 %.

- Beschreiben Sie einen *Rechenweg*, wie mit wenigen Matrizenmultiplikationen eine längerfristige Prognose für einen weit in der Zukunft liegenden Zeitpunkt innerhalb dieses Modells erstellt werden kann. **(20P)**

c) In einem gesunden Bestand von insgesamt 2 500 Tieren bricht diese Infektion aus. Der Hof wird isoliert und von einer Arbeitsgruppe der Forschungseinrichtung beobachtet.

- Berechnen Sie die erwarteten Bestände, die sich ausgehend von dem Modell nach einer bzw. nach acht Wochen seit Ausbruch der Krankheit einstellen müssten.

- Man kann erkennen, dass sich der Vektor $\vec{p}_* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ mit $z \in \mathbb{N}$ in diesem Modell

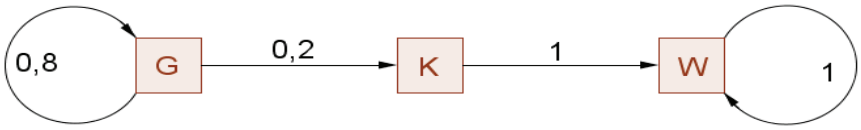
  nicht mehr ändert, denn alle Hühner, die gestorben sind, bleiben auch tot.
  Unklar ist noch, ob dies der einzige mögliche stationäre Zustand ist.

  Untersuchen Sie, ob sich mit einem geeigneten Vektor $\vec{p}_{stat}$ ein von $\overrightarrow{p_*}$ verschiedener stationärer Zustand einstellen kann, sich die Zusammensetzung der Population in einem Zeitschritt also nicht mehr ändert.

- Im Beobachtungsprotokoll taucht der Bestandsvektor $\vec{p}_n = \begin{pmatrix} 1500 \\ 550 \\ 450 \end{pmatrix}$ auf.

  Entscheiden Sie, ob dieser Vektor im Rahmen des Modells aus einem geeigneten Vorbestandsvektor $\vec{p}_{n-1}$ entstanden sein kann. **(30P)**

Aufgrund eines neu gewonnenen Impfstoffes stirbt kein Tier mehr – die Erkrankung verläuft deutlich abgemildert. Die neue Situation findet sich im folgenden Übergangsgraphen wieder, wobei (G) für die *durchgängig* gesunden Tiere steht, also jene, die bisher noch nicht erkrankt sind, (K) für die kranken und (W) für die wieder gesundeten, also jene, die die Krankheit einmal überstanden haben:



d) Geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix H_{neu} an.
Interpretieren Sie die gegenüber H veränderten Matrixelemente im Sachkontext der Aufgabe. **(10P)**

e) Da kranke Tiere schlechter fressen und deshalb in dieser Zeit kaum an Gewicht zunehmen, erwartet man, dass einmal krank gewordene Tiere ein geringeres Endgewicht als durchgängig gesunde Hühner haben. Landwirte interessiert daher die zu erwartenden prozentualen Anteile.
Die Tabelle enthält diese Anteile für die ersten vier Wochen nach einer Infektion.

Anzahl der Wochen seit der Infektion	0	1	2	3	4
Anteil der durchgängig gesunden Tiere in %	100	80	64	51,2	40,96
Anteil der (aktuell) kranken Tiere in %	0	20	16	12,8	10,24
Anteil der wieder gesundeten Tiere in %	0	0	20	36	48,8

- Begründen Sie mithilfe des Graphen oder der Matrix H_{neu}, dass die Modellierung für den Anteil der durchgängig gesunden Hühner durch eine Exponentialfunktion $g: n \to g(n)$ mit der Zeit n in Wochen sinnvoll ist.
  Geben Sie eine passende Gleichung für diese Funktion an.

- Der Anteil $k(n)$ der in der n-ten Woche kranken Tiere wird durch die Funktionsgleichung $k(n) = 25 \cdot 0{,}8^n$ für $n > 0$ modelliert.
  Bestätigen Sie diese Gleichung beispielhaft für zwei Tabellenwerte.

- Auch der Anteil der einmal erkrankten und nun wieder gesundeten Hühner lässt sich ab der zweiten Woche durch eine Funktion $w: n \to w(n)$ modellieren.
  Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung für w für $n \geq 2$.

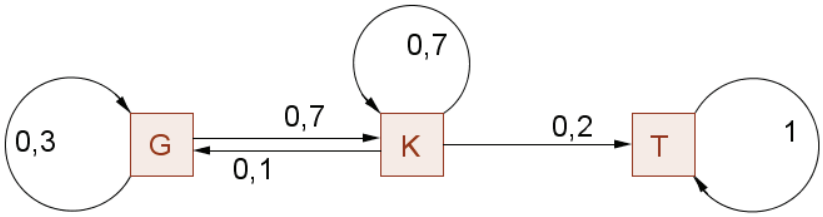
- Untersuchen Sie die drei Funktionen g, k und w hinsichtlich einer langfristigen Entwicklung der Teilpopulationen und treffen Sie eine begründete Aussage zu möglichen stabilen Zuständen einer Hühnerpopulation im Rahmen des betrachteten Modells. **(20P)**

f) In der vorigen Aufgabe ist es mit einfachen Mitteln der Analysis gelungen, Aussagen über die modellhafte Entwicklung einer Population herauszufinden. Ein anderer Weg führt über die Berechnung und Interpretation von Eigenwerten.
Dabei heißt die Gleichung: $H_{neu} \cdot \vec{p}_{eig} = \lambda \cdot \vec{p}_{eig}$ *Eigenwertgleichung* der Matrix H_{neu} mit reellem Eigenwert λ und Eigenvektor $\overrightarrow{p_{eig}} \neq 0$.

- Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix H_{neu}.

- Interpretieren Sie diese Ergebnisse hinsichtlich der langfristigen Entwicklung und möglicher stabiler Zustände einer Modellpopulation. Klären Sie insbesondere, ob sich daraus dieselben Schlüsse wie in Teil e) ziehen lassen. **(15P)**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)		5		
b)	• Die Zahlen stimmen nach den Regeln der Matrizenmultiplikation: $H^2_{[1;1]} = 0{,}16 = 0{,}3^2 + 0{,}1 \cdot 0{,}7 + 0 \cdot 0$ $H^4_{[2;1]} = 0{,}504 = 0{,}7 \cdot 0{,}16 + 0{,}56 \cdot 0{,}7 + 0 \cdot 0{,}14$ • 0,16 beschreibt den Anteil der gesunden Tiere, die zwei Wochen später gesund sind. Aus der obigen Gleichung erkennt man, dass dazu sowohl gesunde als auch in der Vorwoche kranke Tiere gehören. Daraus folgt, dass nur die Aussagen (A2) und (A3) wahr sind. • Setzt man $\vec{p}_0$ als Startvektor der Population zum Zeitpunkt $t = 0$, dann gilt: $H \cdot \vec{p}_0 = \vec{p}_1$ $H^2 \cdot \vec{p}_0 = H \cdot \vec{p}_1 = \vec{p}_2 \ldots$ ... $H^n \cdot \vec{p}_0 = \vec{p}_n$ d. h. die Population nach n Wochen wird durch die Multiplikation des Startvektors mit der n-ten Potenz der Matrix H erreicht. Um hohe Matrixpotenzen mit wenigen Matrizenmultiplikationen zu bekommen, multipliziert man die Matrixpotenzen mit sich selbst: $H^2 = H \cdot H \qquad H^4 = H^2 \cdot H^2 \qquad H^8 = H^4 \cdot H^4$ usw.	5	5	10

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	• Mit dem Startvektor $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 2500 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und der in b) beschriebenen Vorgehensweise ergeben sich $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 750 \\ 1750 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 400 \\ 1750 \\ 350 \end{pmatrix} \quad \vec{p}_8 = H^4 \cdot H^4 \cdot \vec{p}_0 \approx \begin{pmatrix} 114 \\ 604 \\ 1783 \end{pmatrix}.$ • Anzusetzen ist die Gleichung: $H \cdot \vec{p}_{stat} = \vec{p}_{stat}$ mit $\vec{p}_{stat} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Als Lösung ergibt sich $x = 0$ und $y = 0$ bei beliebigem z. Es gibt also keinen von $\vec{p}_* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$, $z \in \mathbb{N}$, verschiedenen stationären Vektor. *Dieses Ergebnis wird auch schon unmittelbar aus der Übergangsmatrix bzw. dem Graphen klar, denn von der dritten Stufe (den toten Tieren) kann kein Exemplar in eine andere Stufe wechseln.* • Man betrachtet die Gleichung: $H \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1500 \\ 550 \\ 450 \end{pmatrix}$. Daraus ergibt sich das LGS (hier in Matrixschreibweise) $\left(\begin{array}{ccc\|c} 0{,}3 & 0{,}1 & 0 & 1500 \\ 0{,}7 & 0{,}7 & 0 & 550 \\ 0 & 0{,}2 & 1 & 450 \end{array}\right) \mid II \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) + I \Rightarrow$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 0{,}3 & 0{,}1 & 0 & 1500 \\ 0 & -0{,}2 & 0 & \frac{8850}{7} \\ 0 & 0{,}2 & 1 & 450 \end{array}\right) \Rightarrow y \approx -6321.$ • Eine Lösung existiert zwar, $\overrightarrow{p_{n-1}} \approx \begin{pmatrix} 7107 \\ -6321 \\ 1714 \end{pmatrix}$, aber negative Vektorkomponenten können nicht in einem Bestandsvektor auftreten, d. h. der gegebene Vektor kann nicht im Rahmen der Beobachtung entstanden sein.	5	25	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	Es ergibt sich die Matrix $H_{neu} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, dabei ist der Anteil der gesund bleibenden Hühner $H_{neu[1,1]} = 0{,}8$ deutlich gestiegen, bzw. $H_{neu[2,1]} = 0{,}2$. Kein krankes Tier verbleibt im Krankheitszustand $H_{neu[2,2]} = 0$, d. h. sie gesunden (*schneller als vorher*); alle kranken Tiere $H_{neu[3,2]} = 1$ werden *wieder* gesund – dieser Zustand unterscheidet sich aber vom ersten Zustand (d. h. den *immer* gesunden). *Anmerkung: Zusätzlich gilt, dass es einen Rückfall in die Krankheit nicht gibt:* $H_{neu[2,3]} = 0$.	5	5	
e)	• Der exponentielle Ansatz ergibt sich unmittelbar aus dem Graphen. Da in diesem Beispiel nur gesunde Tiere zu der Gruppe der Gesunden übergehen können, ergibt sich der Anteil der (immer noch) gesunden Hühner aus dem Startwert durch n-fache Multiplikation mit dem Faktor 0,8. Als Gleichung erhält man so : $g(n) = 100 \cdot (0{,}8)^n$. • z. B. $25 \cdot 0{,}8 = 20$ ... $25 \cdot (0{,}8)^4 = 10{,}24$ Bei der Bestätigung durch Tabellenwerte ist darauf zu achten, dass der erste Tabellenwert $n = 0$ nicht in die Gleichung eingesetzt werden darf. • Der Anteil der wieder gesundeten Tieren ergibt sich aus dem Gesamtbestand (100%) von dem der Anteil der durchgängig gesunden sowie der kranken Tiere abgezogen wird: $w(n) = 100 - 100 \cdot (0{,}8)^n - 25 \cdot (0{,}8)^n = 100 - 125 \cdot (0{,}8)^n$ für $n \geq 2$. • Innermathematisch bedeutet dies, den Grenzwert $n \to \infty$ zu betrachten. Aus den Funktionsgleichungen folgt unmittelbar $g(n) \to 100 \cdot 0 = 0$ $k(n) \to 25 \cdot 0 = 0$ für $n \to \infty$. $w(n) \to 100 - 125 \cdot 0 = 100$ d. h. perspektivisch werden alle Hühner die Erkrankung durchmachen, aber wieder gesunden. Der einzig mögliche stabile Zustand ist also $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$ (der Anteile in Prozent). *In einem realen Hühnerstall leben die Tiere aber nur eine begrenzte Zeitspanne, sodass dies tatsächlich nur ein theoretisches Ergebnis bleibt.*	5	15	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	• Mit der Gleichung $H_{neu} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ergibt sich $\begin{array}{rrcl} (I) & 0{,}8x & = & \lambda x \\ (II) & 0{,}2x & = & \lambda y \\ (III) & y+z & = & \lambda z \end{array}$. Für den Fall $x \neq 0$ ergibt sich aus der ersten Gleichung unmittelbar $\lambda_1 = 0{,}8$. Setzt man dagegen $x = 0$ und $y \neq 0$ ergibt sich aus der zweiten Gleichung der zweite Eigenwert $\lambda_2 = 0$. Der dritte Eigenwert $\lambda_3 = 1$ lässt sich mithilfe der dritten Gleichung unter der Bedingung $x = y = 0$ bestimmen. Setzt man diese Eigenwerte ein, dann ergeben für die Eigenvektoren: $\lambda_1 = 0{,}8 \Rightarrow \begin{array}{rrcl} (I) & 0{,}8 \cdot x & = & 0{,}8 \cdot x \\ (II) & 0{,}2 \cdot x & = & 0{,}8 \cdot y \\ (III) & y+z & = & 0{,}8 \cdot z \end{array} \Rightarrow \overrightarrow{p_{eig\_1}} = \begin{pmatrix} x \\ 0{,}25 \cdot x \\ -1{,}25 \cdot x \end{pmatrix}$ $\lambda_2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{rrcl} (I) & 0{,}8 \cdot x & = & 0 \cdot x \\ (II) & 0{,}2 \cdot x & = & 0 \cdot y \\ (III) & y+z & = & 0 \cdot z \end{array} \Rightarrow \overrightarrow{p_{eig\_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix}$ und für $\lambda_3 = 1 \Rightarrow \begin{array}{rrcl} (I) & 0{,}8 \cdot x & = & 1 \cdot x \\ (II) & 0{,}2 \cdot x & = & 1 \cdot y \\ (III) & y+z & = & 1 \cdot z \end{array} \Rightarrow \overrightarrow{p_{eig\_3}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ *Hinweis: Auch der Weg über Determinanten ist möglich.* • $\lambda_3 = 1$ ist der betragsgrößte Eigenwert. Das bedeutet, dass sich bei beliebigem Startvektor (*den Nullvektor kann man bei diesen Betrachtungen aus nahe liegenden Gründen ausschließen*) die Population langfristig auf einen stabilen Zustand einstellt. Aus dem zugehörigen Eigenvektor $\overrightarrow{p_{\max}} = \overrightarrow{p_3}$ liest man ab, dass die Population langfristig nur aus Tieren der dritten Teilpopulation (hier die gesundeten Hühner) bestehen wird. • Während die Theorie zulässt, dass mit beliebigen Startvektoren gearbeitet werden kann – und demzufolge unterschiedliche Endzustände (z ist variabel) erreicht werden könnten – lässt dies die Betrachtung über die Funktionen aus Teil e) und die Beschränkung auf den Sachkontext nicht zu, da dort mit prozentualen Anteilen gearbeitet wird.			15
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

STOCHASTIK 1

III.1 Fliesenproduktion

In einem Betrieb werden Fliesen hergestellt und in Kartons verpackt. Die Betriebsleitung geht aufgrund ihrer langfristigen Erfahrung davon aus, dass ca. 1 % der Fliesen einen optischen Defekt haben oder gebrochen sind. Diesen Anteil an defekten Fliesen möchte der Betrieb seinen Kunden als Höchstwert garantieren.

Eines Tages stellt sich aber bei einer Qualitätskontrolle in der Fliesenbrennerei heraus, dass 5 % der Fliesen defekt sind, und dieser Wert stellt sich auch in den nächsten Tagen und Wochen ein. Die Betriebsleitung nimmt an, dass die überalterten Maschinen von einem bestimmten Zeitpunkt an einen größeren Ausschuss produziert haben und dass die „5 %“ als langfristige Erscheinung zu betrachten sind, solange man die Maschinen nicht ersetzt. Bei Fliesen, die sich zur Auslieferung in einer Lagerhalle befinden, ist es ungewiss, ob sie bereits aus der Produktion mit dem erhöhten Anteil an defekten Fliesen stammen. Sicher ist nur, dass die Kartons entweder Fliesen mit 1 % Defekt oder Fliesen mit 5 % Defekt enthalten. Deshalb wird eine Stichprobe entnommen und untersucht.

Falls bei einer Stichprobe von 100 Fliesen mindestens zwei Fliesen einen Defekt haben, werden die Fliesen zur Auslieferung nicht freigegeben, andernfalls werden sie ausgeliefert.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Lieferung freigegeben wird, obwohl sie aus der neuen Produktion mit dem erhöhten Anteil an defekten Fliesen stammt. **(10P)**

b) Um das Risiko einer fälschlichen Auslieferung noch kleiner zu machen, soll die Lieferung nur dann freigegeben werden, wenn sich keine defekte Fliese in einer Stichprobe der Länge n befindet. Berechnen Sie n so, dass dann die Wahrscheinlichkeit, eine Lieferung mit dem erhöhten Anteil an defekten Fliesen freizugeben, höchstens 1 % beträgt. **(10P)**

c) Die Betriebsleitung möchte wissen, ob dieser Fehleranteil von 5 % schon länger bestanden hat. Dazu wählt sie aus einer Charge, die vor zwei Wochen produziert wurde, eine Stichprobe von wiederum 100 Stück aus. Unter diesen 100 Fliesen befinden sich genau drei defekte. Entscheiden Sie mithilfe der Erwartungswerte und der Standardabweichungen, ob die Maschinen damals eher 1 % Ausschuss oder eher 5 % Ausschuss produziert hatten. **(10P)**

In dem Fliesenbetrieb werden täglich gleich viele Fliesen verschiedener Grundfarben (rot, grün, beige und weiß) hergestellt. Für jede Sorte gibt es eine eigene Maschinenanlage zur Herstellung.

d) Bei einer Tagesproduktion, bei der insgesamt 5 % aller Fliesen einen Defekt aufweisen, fällt auf, dass unter den roten Fliesen sogar jede siebente Fliese fehlerhaft ist.

- Bestimmen Sie den Anteil der defekten Fliesen unter den nicht-roten Fliesen.
- Da ersichtlich die Maschine für die roten Fliesen besonders abgenützt ist, wird beabsichtigt, für die roten Fliesen eine neue Maschine anzuschaffen. Diese neue Maschine wird gar keinen Ausschuss produzieren.
  Untersuchen Sie, ob es dann – also durch Absenken des Ausschussanteils *allein* bei den roten Fliesen auf 0 % – gelingen kann, den zugesicherten Qualitätsstandard von höchstens 1 % Ausschussanteil bei *allen* Fliesen wieder einzuhalten. **(15P)**

e) Alle defekten Fliesen dieser Tagesproduktion (unter Einschluss der abgenutzten Maschine, siehe d) werden aussortiert. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Fliese aus den *verbleibenden* Fliesen eine rote Farbe hat. **(15P)**

Eine Handelskette verkauft die Fliesen regulär zu einem Preis von 5 Euro pro Fliese. Erfahrungsgemäß werden Fliesen mit einem kleinen optischen Defekt zum regulären Preis noch mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % verkauft. Reduziert man den Preis, so kann man mehr verkaufen. In einer Filiale sind 1000 Fliesen mit einem „kleinen optischen Defekt“ noch nicht verkauft. Was tun?

f) Der Chef sagt: „Meine Erfahrung ist: Jedes Mal, wenn wir den Preis halbieren, halbieren wir auch die unverkaufte Restmenge. Wenn wir also auf 2,50 € pro Fliese gehen, bleiben wir auf 40 % sitzen, bei 1,25 € nur noch auf 20 %.“
Der verkaufte Anteil in Abhängigkeit vom Preis wird mit $v(pr)$ bezeichnet:

$$v(pr) = 1 - \frac{pr}{6,25}$$

- Zeigen Sie, dass diese Gleichung die Erfahrung des Chefs richtig modelliert.
- Bestimmen Sie unter der Voraussetzung, dass der Chef Recht hat, den Preis, der für die Firma zum optimalen Erlös führt. **(20P)**

g) Tatsächlich setzt die Firma den Preis auf 3,20 € pro Fliese und verkauft dann tatsächlich von den 1000 Fliesen 470 Stück. Das scheint der „Theorie“ des Chefs zu widersprechen. Beurteilen Sie mithilfe einer Methode Ihrer Wahl, ob begründeter Anlass besteht, an der Theorie zu zweifeln. **(20P)**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	$P(Z \leq 1) = P(Z=0) + P(Z=1)$ $= 0{,}95^{100} + 100 \cdot 0{,}95^{99} \cdot 0{,}05$ $\approx 0{,}037$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 3,7 % wird die Lieferung freigegeben.	10		
b)	$P_{0{,}05}^{n}(Z=0) \leq 0{,}01$ $\Leftrightarrow \binom{n}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^n \leq 0{,}01$ $\Leftrightarrow 0{,}95^n \leq 0{,}01$ $\Leftrightarrow n \cdot \ln(0{,}95) \leq \ln(0{,}01)$ $\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}95)}$ Es gilt $\frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}95)} \approx 89{,}78$. Die Stichprobe muss mindestens 90 Fliesen umfassen.	10		
c)	1%: Die Standardabweichung beträgt $\sqrt{100 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99} \approx 0{,}995$. Die Abweichung zwischen dem Erwartungswert (μ = 1) und der Anzahl der defekten Fliesen (3) liegt also etwa im Bereich der doppelten Standardabweichung. 5 %: Die Standardabweichung beträgt $\sqrt{100 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95} \approx 2{,}18$ Die Abweichung zwischen dem Erwartungswert (μ = 5) und der Anzahl der defekten Fliesen (3) liegt also im Bereich der einfachen Standardabweichung. Es ist also wahrscheinlicher, dass die Stichprobe aus der Produktion der schlechteren Qualität (5%) stammt.		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	• Eine Tagesproduktion bestehe aus N Fliesen; dann gibt es $\frac{N}{4}$ rote Fliesen und $\frac{3}{4}\cdot N$ nicht-rote (also grüne, beige oder weiße) Fliesen. Anzahl der fehlerhaften Fliesen insgesamt: $N\cdot 0{,}05$. Anzahl der fehlerhaften roten Fliesen: $\frac{N}{4}\cdot\frac{1}{7}$. $F_{(g,b,w)} = \frac{N\cdot 0{,}05 - \frac{N}{4}\cdot\frac{1}{7}}{\frac{3}{4}\cdot N} = \frac{\left(0{,}05-\frac{1}{28}\right)\cdot 4}{3} = \frac{2}{105} \approx \underline{\underline{0{,}019}}$. Etwa 1,9 % aller nicht-roten Fliesen haben einen Defekt. • Absenken des Ausschussanteils der roten Fliesen auf 0. $\frac{3}{4}\cdot 0{,}019 = 0{,}014 = 1{,}4\%$. Der Qualitätsstandard von 1 % kann also nicht eingehalten werden.		15	
e)	<u>Bedingte Wahrscheinlichkeit:</u> R: Fliese ist rot D: Fliese ist defekt $\overline{D}$: Fliese ist nicht defekt gesucht: $P_{\overline{D}}(R)$ $P_R(\overline{D}) = 1 - P_R(D) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$ $P_{\overline{D}}(R) = \frac{P(R)\cdot P_R(\overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0{,}25\cdot\frac{6}{7}}{0{,}95} \approx \underline{\underline{0{,}226}}$ Die Wahrscheinlichkeit, eine rote Fliese zufällig aus den heilen Fliesen zu ziehen, ist etwa 22,6 %. *Diese Aufgabe ist auch auf anderen Wegen lösbar, etwa mit Hilfe eines Baumdiagramms. Ein weiterer Lösungsweg wird im Folgenden skizziert:* Annahme: Die Tagesproduktion beträgt 1000 Stück. 5 % sind defekt, also 50 Stück; 950 sind in Ordnung. $\frac{1}{7}$ von 250 roten Fliesen sind defekt, $\frac{6}{7}$ von 250 roten Fliesen sind demnach in Ordnung. Der Anteil der heilen roten Fliesen an den gesamten heilen Fliesen beträgt $\frac{6}{7}\cdot 250\cdot\frac{1}{950} \approx 0{,}226$, also etwa 22,6 %.		15	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	• Wenn ν der verkaufte Anteil ist, so ist 1 – ν der **<u>nicht</u>** verkaufte Anteil *u,* also $u(pr) = 1 - v(pr) = \frac{1}{6,25} \cdot pr$. *u* ist eine proportionale Zuordnung, daraus folgt sofort die vom Chef behauptete allgemeine Eigenschaft für nicht verkaufte Fliesen. Auch der Wert von 40 % nicht verkaufter Fliesen (bzw. 60 % verkaufter) bei einem Preis von 2,50 € und der Wert von 80 % nicht verkaufter Fliesen (bzw. 20 % verkaufter) bei einem Preis von 5 € folgt durch Einsetzen unmittelbar aus diesem proportionalen Zusammenhang. Bei einem Preis von 0 Euro werden nach diesem Modell alle Fliesen verkauft (Anteil = 1). • Der Erlös pro Fliese (*erl*) errechnet sich in Abhängigkeit vom Preis *pr*: $erl(pr) = pr \cdot \left(1 - \frac{pr}{6,25}\right) = pr - \frac{pr^2}{6,25}$. Bei einem Preis von 0 Euro ist der Erlös 0 Euro (*erl* (0) = 0). Bei einem Preis von 6,25 Euro beträgt der Erlös auch 0 Euro (*erl* (6,25) = 0). Es handelt sich hier um eine quadratische Funktion mit den Nullstellen 0 und 6,25. In der Mitte zwischen den Nullstellen, also bei *pr* = 3,125, liegt demnach der maximale Erlös. Damit liegt der reale maximale Erlös bei einem Preis von 3,12 € oder bei einem Preis von 3,13 €. *Anmerkung: Auch wenn der Prüfling als Antwort lediglich den gerundeten Wert von 3,13 € angibt,ist die Antwort als korrekt zu werten.*		20	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
g)	Nach der Theorie des Chefs gilt: $v(3,2) = 0,488$. Wenn die Theorie stimmte, betrüge der Erwartungswert μ Anzahl der verkaufbaren Fliesen 488, die Standardabweichung wäre $\sigma = \sqrt{1000 \cdot 0,488 \cdot (1-0,488)} \approx 16$. Die tatsächlich verkaufte Menge liegt also eine gute Standardabweichung unter dem erwarteten Wert, das ist noch gut mit Zufallsschwankungen zu erklären, es besteht also kein Grund zu zweifeln. *Man könnte auch – methodisch nicht ganz korrekt –einen einseitigen Signifikanztest „im Nachhinein“ auswerten, z. B. auf dem 5 % Niveau. Dann würde man die Nullhypothese, dass die Theorie des Chefs stimmt, erst verwerfen, wenn weniger als 462 Fliesen verkauft werden.* *Rechnung zum letzten Argument:* *Ist X die zufällige Anzahl der verkauften Fliesen unter der Annahme der Nullhypothese, so gilt nämlich (mit Hilfe der Normalapproximation):* $P(X \le 461) \approx P\left(\frac{X-\mu+0,5}{\sigma} \le \frac{-26,5}{15,8}\right) \approx \phi(-1,68) \approx 0,047$, *aber* $P(X \le 462) \approx P\left(\frac{X-\mu+0,5}{\sigma} \le \frac{-25,5}{15,8}\right) \approx \phi(-1,61) \approx 0,054$.			20
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

STOCHASTIK 2

III.2 Briefmarken

Die Briefmarken der so genannten „Bautenserie“ von 1948 zeigten verschiedene berühmte deutsche Bauwerke.
Die Briefmarken dieser Serie wurden an verschiedenen Druckstätten auf verschiedenem Papier und auch von verschiedenen Druckstöcken gedruckt, insgesamt mit einer Auflage von einigen Millionen Marken.
In dieser Aufgabe geht es in allen Teilen nur um die 60-Pfennig-Briefmarke, die den Kölner Dom zeigt. Gerade bei der 60-Pfennig-Marke gibt es eine breite Palette von unterschiedlichen Ausführungen:

- Die Farbe der Briefmarke kann braunrot, rotbraun, braunviolett oder rotviolett sein;
- die Ziffern der **60** können schlank oder fett sein (in der Abbildung fett);
- beim Portal am Südschiff (rechts) kann die Schwelle vorhanden sein oder fehlen (in der Abbildung ist die Schwelle vorhanden);
- die Zähnung der Marken – das ist die Anzahl der Löcher am Markenrand auf 2 cm Kantenlänge – kann 11½, 12, 13 oder 14 sein (in der Abbildung liegt eine 14er Zähnung vor).

Wenn man als Sammler großes Glück hat, so findet man in einem Nachlass oder als Geschenk einen noch unsortierten Haufen solcher Marken. Nehmen wir an, Sie hätten gerade von Ihrem Großvater einen solchen Haufen mit 500 unsortierten Kölner-Dom-Marken erhalten.

a) In Fachzeitschriften kann man nachlesen, dass die Zähnungen bei der Herstellung der Marken in folgenden Anteilen verwendet wurden:

Zähnung	11½	12	13	14
Anteil	22 %	12 %	48 %	18 %

Sie schauen sich die ersten zehn Marken Ihres Haufens an.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden beiden Ereignisse:

- A: Keine der Marken hat die Zähnung 11½.
- B: Die Hälfte der Marken hat die Zähnung 13.

Ermitteln Sie auch die Wahrscheinlichkeiten für die nächsten beiden Ereignisse:

- C: Die Hälfte der Marken hat die Zähnung 13, und die anderen fünf Marken haben die Zähnung 12 oder die Zähnung 14.
- D: Die Hälfte der Marken hat die Zähnung 13, drei weitere haben die Zähnung 11½, die beiden anderen Zähnung 14. **(20P)**

b) Besonders selten ist die rotviolette Variante, sie kommt nur bei 0,6 % der Marken vor.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim Prüfen die 150. Marke aus dem Haufen die erste rotviolette ist.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die zehnte geprüfte Marke die einzige rotviolette ist.
- Bestätigen Sie, dass für den Erwartungswert E der Anzahl rotvioletter Marken in Ihrem Haufen mit 500 Marken gilt: $E = 3$.
- Bestimmen Sie die Anzahl von Marken, die Sie prüfen müssten, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % wenigstens eine rotviolette Marke zu finden.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie in Ihrem Haufen höchstens eine rotviolette Marke finden. **(25P)**

c) Rotbraune Marken kommen mit einer Wahrscheinlichkeit von 6 % vor.

- Ihr Briefmarkenhändler sagt, für jede rotbraune Marke mit Zähnung 12 würde er Ihnen 10 € geben, für jede andere 10 ct. Er schlägt als Alternative vor, den Haufen für 80 € pauschal zu kaufen.
  Ermitteln Sie die zu erwartenden Einnahmen für Ihren Haufen unter der Annahme, dass Farbe und Zähnung stochastisch unabhängig voneinander sind, und entscheiden Sie, welches Angebot des Händlers für Sie günstiger ist.
- Bestimmen Sie – unter der Annahme, dass Farbe und Zähnung stochastisch unabhängig voneinander sind – die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine einzige rotbraune Marke mit der Zähnung 12 in dem Haufen ist. **(15P)**

d) Es ist bekannt, dass die „Fette 60“ mit einer Wahrscheinlichkeit von 36 % vorkommt und dass Marken „mit Schwelle am Dom“ mit einer Wahrscheinlichkeit von 68 % vorkommen.
Es soll nun an Hand der 500 Marken-Stichprobe aus dem Haufen untersucht werden, ob die beiden Merkmalspaare
- „fette 60“ / „schlanke 60“ und
- „mit Schwelle“ / „ohne Schwelle“

stochastisch unabhängig voneinander sind.

- Berechnen Sie dazu zunächst in zwei Vierfeldertafeln
  - die Wahrscheinlichkeiten, dass eine zufällig gezogene Marke in den jeweiligen Feldern liegt unter der <u>Annahme der stochastischen Unabhängigkeit der betrachteten Merkmalspaare</u> (Anlage 1) und dazu auch
  - die Erwartungswerte der Anzahlen bei 500 zufällig gesammelten Marken (Anlage 2).
- *Tatsächlich* ergaben sich beim Auszählen des Haufens
  - 210 Marken „mit schlanker 60“ <u>und</u> „mit Schwelle“,
  - 120 Marken „mit fetter 60“ <u>und</u> „mit Schwelle“ und
  - 65 Marken „mit fetter 60“ <u>und</u> „ohne Schwelle“.

  Bestimmen Sie für diesen empirischen Befund alle tatsächlichen Anzahlen in einer weiteren Vierfeldertafel (Anlage 3).
- Beurteilen Sie dann – einzeln für jedes Feld, ob diese Ergebnisse die stochastische Unabhängigkeit der Merkmalspaare unterstützt. Hierbei können Sie beispielsweise mit σ-Regeln argumentieren. **(25P)**

e) Kommen wir noch einmal zurück zu den rotvioletten Marken, deren Anteil an allen Marken bei 0,6 % liegt. In Ihrem Haufen werden also drei rotviolette Marken erwartet. Beim sorgfältigen Durchprüfen finden Sie aber nur genau *eine* solche Marke. Dies lässt den Verdacht aufkommen, dass möglicherweise schon einmal jemand die Marken durchgeprüft und dabei die wertvollen rotvioletten ausgesondert hat, soweit er sie erkennen konnte.
Beurteilen Sie, welche Schlussfolgerungen aus dem Zählergebnis in Hinblick auf den Verdacht gezogen werden können. **(15 P)**

Anlage zu Aufgaben „Briefmarken“, Aufgabenteil d)

Anlage 1: Wahrscheinlichkeiten bei stochastischer Unabhängigkeit der Merkmalspaare:

	Fette 60	**Schlanke 60**	Gesamt
Mit Schwelle			
Ohne Schwelle			
Gesamt			100 %

Anlage 2: Erwartungswerte der Anzahlen bei 500 Marken bei stochastischer Unabhängigkeit der Merkmalspaare:

	Fette 60	**Schlanke 60**	Gesamt
Mit Schwelle			
Ohne Schwelle			
Gesamt			500

Anlage 3: Tatsächliche Anzahlen in dem Haufen von 500 Marken:

	Fette 60	**Schlanke 60**	Gesamt
Mit Schwelle			
Ohne Schwelle			
Gesamt			500

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse lassen sich wie folgt berechnen: • A – Über Gegenwahrscheinlichkeit: $p_A = (1-0,22)^{10} \approx 8,33\%$. • B – Über Binomialverteilung: $p_B = bin(10;5;0,48) = \binom{10}{5} \cdot 0,48^5 \cdot 0,52^5 \approx 24,41\%$. • C – Ähnlicher Ansatz („eingeschränkte Binomialverteilung“): $p_C = \binom{10}{5} \cdot 0,48^5 \cdot 0,30^5 \approx 1,56\%$. Die Wahrscheinlichkeit von 0,30 ist hier die Summe der Wahrscheinlichkeiten der beiden Zähnungsarten 12 und 14. • D – Weiterentwickelter Ansatz: $p_D = \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} \cdot 0,48^5 \cdot 0,22^3 \cdot 0,18^2 \approx 2,22\%$. *Das hier verwendete Produkt von Binomialkoeffizienten lässt sich auch als Polynomialkoeffizient schreiben*: $\binom{10}{5} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = \frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!}$. *Dies wird von den Prüflingen aber nicht erwartet.*	10	10	
b)	• Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $p(150) = (1-0,006)^{149} \cdot 0,006 \approx 0,24\ \%$. • Bei einfacher Modellierung ergibt sich: $p = (1-0,006)^9 \cdot 0,006 \cdot (1-0,006)^{490} = (1-0,006)^{499} \cdot 0,006 \approx 0,03\ \%$. • Der Erwartungswert liegt bei $E = 500 \cdot 0,006 = 3$. • Über Gegenwahrscheinlichkeit: $(1-0,006)^n \leq (1-0,95) = 0,05$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dies ergibt nach Logarithmieren $n \geq 498$. Man müsste mindestens 498 Marken prüfen. • Das Ergebnis lässt sich als Summe von Binomialwahrscheinlichkeiten berechnen: $p(n \leq 1) = (1-0,006)^{500} + 500 \cdot (1-0,006)^{499} \cdot 0,006 \approx 19,83\%$.	15	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	• Die Unabhängigkeit der Merkmale würde sich dadurch ausdrücken, dass die Wahrscheinlichkeit für das Merkmal (*rotbraun* <u>und</u> *12er Zähnung*) das Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten wäre: $p(\textit{rotbraun}\text{ und }12\textit{er Zähnung}) = 0{,}06 \cdot 0{,}12 = 0{,}0072$ Der Erwartungswert für den Preis ist mit diesen Werten $E(\text{Preis})=500 \cdot (0{,}0072 \cdot 10\ € + 0{,}9928 \cdot 0{,}10\ €) = 85{,}64\ €$. Da 80 € ein geringerer Preis ist, stellt im Erwartungsfall das Pauschalangebot das schlechtere Angebot für Sie dar. • Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für „keine solche Marke“ zu $p = (1 - 0{,}0072)^{500} \approx 2{,}70\%$.		15	
d)	• Wahrscheinlichkeiten unter Annahme der stochastischen Unabhängigkeit:			

	Fette 60 $(p = 0{,}36)$	Schlanke 60 $(p = 0{,}64)$
Mit Schwelle $(p = 0{,}68)$	0,68·0,36 ≈ 24,5 %	0,68·0,64 ≈ 43,5 %
Ohne Schwelle $(p = 0{,}32)$	0,32·0,36 ≈ 11,5 %	0,32·0,64 ≈ 20,5 %

Zugehörige Erwartungswerte der Anzahlen bei 500 Marken:

	Fette 60	Schlanke 60
Mit Schwelle	122,4	217,6
Ohne Schwelle	57,6	102,4

• Tatsächliche Anzahlen in dem Haufen von 500 Marken:

	Fette 60	Schlanke 60
Mit Schwelle	<u>120</u>	<u>210</u>
Ohne Schwelle	<u>65</u>	105

Die unterstrichenen Werte sind die vorgegebenen.

• Zur Beurteilung kann man für jedes Feld einzeln z. B. die Abweichungen des Befundes gegenüber dem theoretischen Wert bei Annahme der Unabhängigkeit (Nullhypothese) bestimmen (gemessen in Standardabweichungen aus der Nullhypothese):

	Fette 60	Schlanke 60
Mit Schwelle	$\frac{120 - 122{,}4}{\sqrt{122{,}4 \cdot (1 - 0{,}36 \cdot 0.68)}} \approx -0{,}25$	$\frac{210 - 217{,}6}{\sqrt{217{,}6 \cdot (1 - 0{,}64 \cdot 0.68)}} \approx -0{,}69$
Ohne Schwelle	$\frac{65 - 57{,}6}{\sqrt{57{,}6 \cdot (1 - 0{,}36 \cdot 0.32)}} \approx 1{,}04$	$\frac{105 - 102{,}4}{\sqrt{102{,}4 \cdot (1 - 0{,}64 \cdot 0.32)}} \approx 0{,}29$

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Ersichtlich sind die Abweichungen überall maximal etwa eine Standardabweichung. Auch bei Verwendung von Binomialverteilungen ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten, die einseitig außerhalb des Bereichs einer Standardabweichung liegen, im Bereich 25%, nur außerhalb einer halben Standardabweichung noch größer. Eine Ablehnung der (Null-)Hypothese der Unabhängigkeit ist also nicht begründet. *<u>Bemerkung1:</u> Es ist auch zulässig, in vorstehenden Rechnungen statt der mit einer Nachkommastelle angegebenen theoretischen Erwartungswerte gerundete ganzzahlige Werte zu verwenden. Die Schlussfolgerung bleibt gleich.* *<u>Bemerkung 2:</u> Es gibt in der Statistik übliche und bessere Verfahren, um die Unabhängigkeit zweier Merkmalspaare zu überprüfen, z.B. den „Chi-Quadrat-Unabhängigkeits-Test", aber das ist nicht durch den Rahmenplan abgedeckt. Wenn einzelne Schüler hier Spezialkenntnisse korrekt einbringen, ist dies selbstverständlich positiv zu bewerten.*	5	10	10
e)	Der Stichprobenumfang von 500, verbunden mit der Auftretenswahrscheinlichkeit von 0,6 %, macht einen strengen Signifikanztest auf dem 5 % - Niveau oder gar auf dem 1 % - Niveau unmöglich. Andererseits haben wir (aus dem Aufgabenteil b) das Ergebnis $p(n \le 1) \approx 19{,}83\% \approx 20\%$. Dies bedeutet, dass das Zählergebnis oder ein noch extremeres in derselben Richtung (also gar keine rotviolette Marke) eine Wahrscheinlichkeit von 20 % hat. Mit einer gewissen Berechtigung, allerdings unter Verzicht auf die stochastisch-begriffliche Strenge, kann man diesen Wert auch als eine Art „Signifikanz auf dem 20 %-Niveau" betrachten. Man hat also eine grobe Bestätigung für den Verdacht. Möglich wäre aber auch ein Vergleich zwischen $P(X = 1) \approx 14{,}89$ % und $P(X = 3) \approx 22{,}47$ %. Dann kann man zu dem Schluss kommen, dass das Auffinden nur einer Marke in 15 von 100 Fällen vorkommt und im Vergleich dazu die erwartete Anzahl von drei Marken auch nur in 22 von 100 Fällen. So könnte man sich auch gegen den Verdacht aussprechen. *<u>Bemerkung:</u> Um die volle Punktzahl zu erreichen, reicht schon der erste Satz dem Sinne nach aus, dass man also aus den Daten keine signifikante Schlussfolgerung in Bezug auf die Fragestellung ziehen kann.*		5	10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20