Analysis 1

I.1 Sprungschanze

Sie sehen ein Foto sowie schematisch das ungefähre Profil einer Skisprunganlage.

Der Sprungturm mit der Anlaufbahn besteht aus einem geraden Teil und einem gekrümmten Teil.

Zuerst soll der gekrümmte Teil mithilfe eines Teils des Graphen einer geeigneten Funktion modelliert werden. Die x-Achse verlaufe dabei waagerecht.

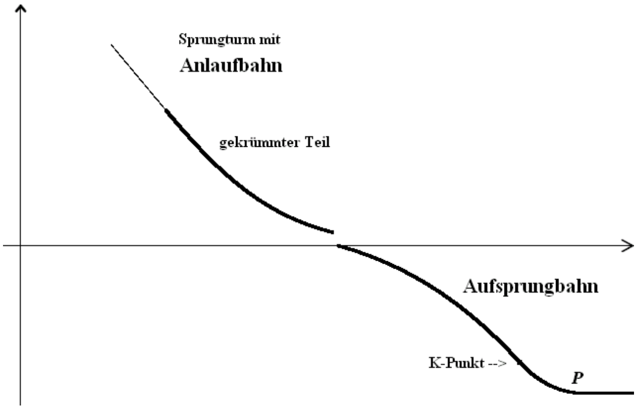
a) Betrachten Sie dazu zunächst die Funktionsgleichung

$$f_k(x) = e^{-k\cdot x^2}$$

mit $k > 0$.

Untersuchen Sie die Funktionen f_k in Abhängigkeit von k in Bezug auf Symmetrie, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte und Verhalten für $x \to \pm\infty$.

Skizzieren Sie in der Anlage für $k = 1$ und $k = 2$ die zugehörigen Funktionsgraphen. **(20P)**



Vor dem Bau einer Skisprungschanze muss das Schanzenprofil vom Internationalen Skiverband (FIS) geprüft werden, damit die Schanze für internationale Wettbewerbe geeignet ist.
Folgende Daten müssen zur Genehmigung des Schanzenprofils eingehalten werden:

- Am Anfang ist die Anlaufbahn sehr steil, der Steigungswinkel soll etwa –40° betragen.
- Im sich knickfrei anschließenden gekrümmten Teil wird die Anlaufbahn immer flacher bis hin zur Absprungstelle. Dort soll der Steigungswinkel nur noch –10° betragen.

b) Betrachten Sie nun die Funktion f_1 mit der Gleichung $f_1(x) = e^{-x^2}$ und begründen Sie, dass für den gekrümmten Teil der Schanze nur ein Kurventeil rechts vom rechten Wendepunkt in Frage kommt. Zeigen Sie, dass man bei $x_1 = 0{,}8$ beginnen könnte. Bestimmen Sie näherungsweise auf zwei Dezimalstellen genau die Stelle, wo der Anlauf aufhören sollte. Geben Sie einen geeigneten Maßstab an, wenn der gekrümmte Teil in der Realität in horizontaler Richtung gut 90 m messen soll. **(20P)**

c) Bestimmen Sie die durchschnittliche Steigung der Anlaufbahn f_1 im Intervall $[0{,}8\,;\,1{,}72]$ und den zugehörigen Steigungswinkel. **(15P)**

d) Die Konstrukteure der Sprungschanze überlegen, dem Genehmigungsantrag der Sprunganlage eine Konstruktionsvariante beizufügen. Der Wendepunkt der Funktion f_k, also die steilste Stelle, soll sich direkt links am Anfang des gekrümmten Teiles des Anlaufes befinden, wobei an dieser Stelle der Steigungswinkel aber natürlich unverändert –40° betragen muss.
Beurteilen Sie, ob dann der Parameter *k* größer oder kleiner (als 1) gewählt werden muss. **(10P)**

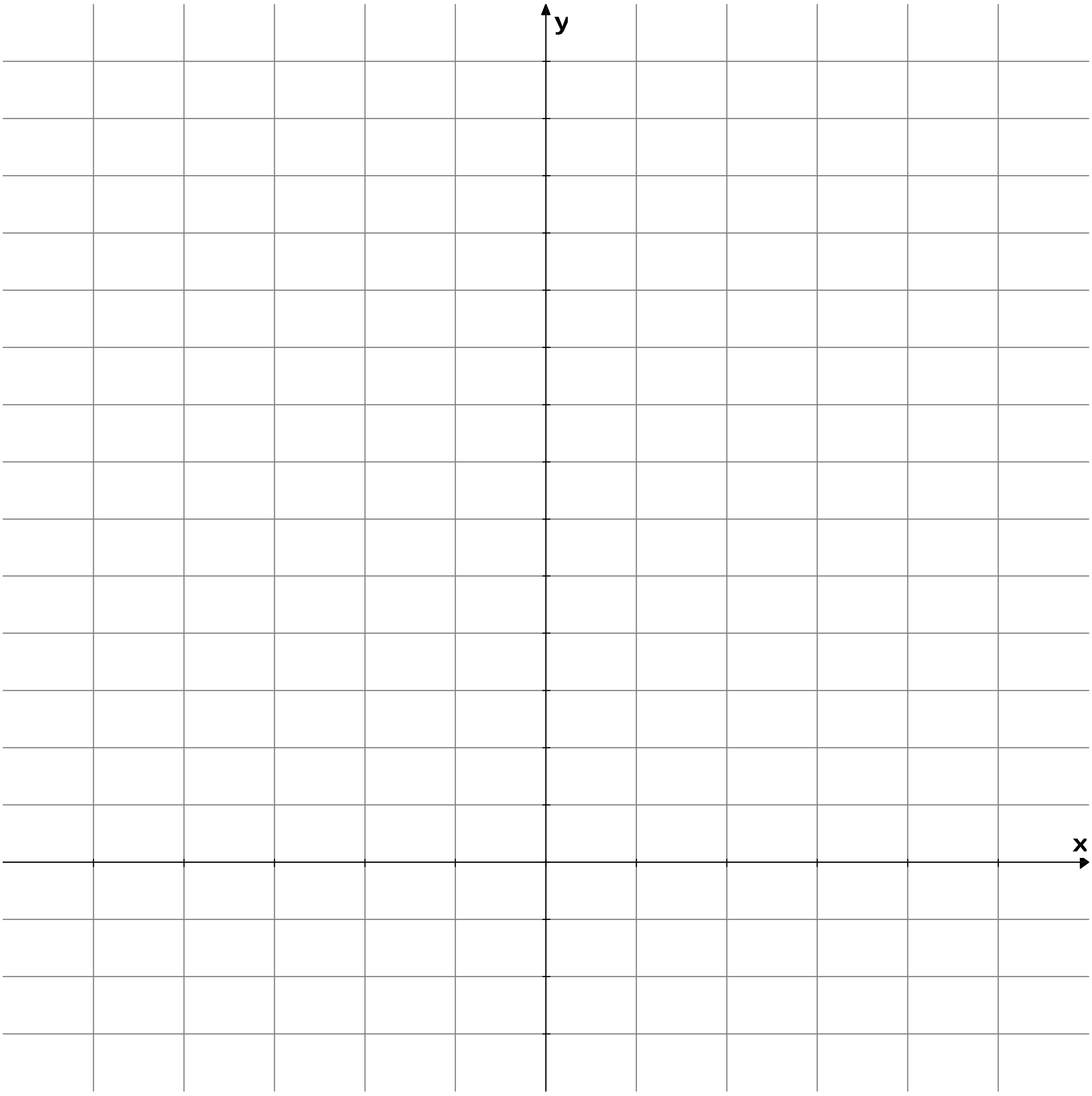
Die Aufsprungbahn, auf der der Skispringer nach seinem Flug landet, besteht aus drei Abschnitten:
Im ersten Abschnitt hat die rechtsgekrümmte Bahn die Form des Teils eines Graphen einer ganzrationalen Funktion 3. Grades mit $a_1(x) = -0{,}069x^3 + 0{,}175x^2 - 0{,}175x + 0{,}14$ mit $x \in [1{,}75\,;\,2{,}75]$.
Im so genannten Konstruktionspunkt (*K*-Punkt) $K(2{,}75\,|\,a_1(2{,}75))$ geht die Aufsprungbahn in eine linksgekrümmte Bahn a_2 über (zweiter Abschnitt), um dann im Punkt *P* in einer waagerechten Auslaufbahn (dritter Abschnitt) $a_3(x) =$ *konstant* zu enden.
Der zweite Abschnitt der Aufsprungbahn besteht aus einem eingefügten Kreisbogen a_2, dessen Mittelpunkt auf der *x*-Achse liegt.
Die Übergänge zwischen den drei Abschnitten der Aufsprungbahn sollen knickfrei verlaufen.

Hinweis: Übergänge sind ausdrücklich nicht krümmungsgleich.

e) Die Modellvorstellung für den zweiten und dritten Abschnitt der Aufsprungbahn muss noch mathematisiert werden. Hierzu sollen die beiden Funktionsgleichungen für a_2 und a_3 bestimmt werden.
Beschreiben Sie anhand der Vorgaben eine Lösungsstrategie und begründen Sie Ihr Vorgehen.
Bestimmen Sie die Gleichung des Kreisbogens a_2 und die Konstante a_3, wenn – wie schon oben gesagt – der Konstruktionspunkt *K* an der Stelle $x = 2{,}75$ liegt und der Mittelpunkt des Kreisbogens auf der *x*-Achse liegt. **(20P)**

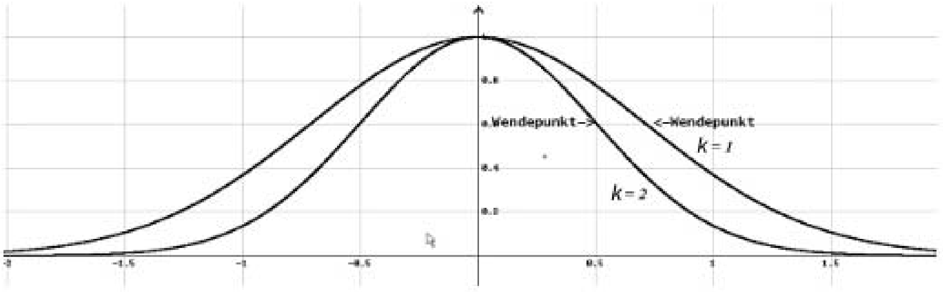
f) Die kritische Sprungweite wird erreicht, wenn eine Landung auf oder hinter dem Konstruktionspunkt *K* erfolgt. Die Sprungweite *w* wird auf der Aufsprungbahn beginnend an der Stelle $x = 1{,}75$ gemessen.
Bestimmen Sie die kritische Sprungweite der zur Zertifizierung eingereichten Schanzenkonstruktion grob mit Hilfe eines Näherungsverfahrens. **(15P)**
Hinweis: Die Bogenlänge w eines Graphen einer Funktion f in $[a\,;\,b]$ *berechnet sich mit* $w(x) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$. *Sie können aber bei dem gegebenen Funktionsterm von f keine Stammfunktion explizit bestimmen, daher ist eine Näherung erforderlich. Es wird die Keplersche Fassregel empfohlen.*

Anlage zur Aufgabe „Sprungschanze“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	• *Die Schar besteht bekanntlich aus „Gaußschen Glockenkurven“. Deren Eigenschaften sollen untersucht werden:* Man erkennt unmittelbar, dass alle Graphen symmetrisch zur y-Achse sind, da $f_k(-x) = e^{-k\cdot x^2} = f_k(x)$ gilt. Wegen der Eigenschaften der e-Funktion sind die Funktionswerte stets positiv und für kein k existieren Nullstellen. Außerdem gilt: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_k(x) = 0$. • Extrema: $f_k'(x) = -k\cdot 2x\cdot e^{-k\cdot x^2} = 0$, also kommt nur $x = 0$ als Extremstelle in Frage. Man kann nun mit dem bisherigen Wissen um die Symmetrie oder mit Hilfe der zweiten Ableitung argumentieren und feststellen, dass unabhängig von k der Punkt $(0 \mid 1)$ ein Maximalpunkt ist. Wendepunkte: $f_k''(x) = 0$ $e^{-k\cdot x^2}\cdot\left(4k^2\cdot x^2 - 2k\right) = 0$ $4k^2\cdot x^2 = 2k$ $x^2 = \frac{1}{2k}$ $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2k}}$ Die zweite Ableitung hat die beiden Nullstellen $x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2k}}$, die auch tatsächlich Wendestellen von f_k sind, was wieder direkt aus dem bisherigen Wissen folgt. $f_k\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2k}}\right) = e^{-k\cdot\frac{1}{2k}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Die beiden Wendepunkte haben die Koordinaten: $W_{1,2} = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2k}} \mid \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Skizzen:  	15	5	
b)	Der gekrümmte Teil des Anlaufs muss monoton fallen und ständig flacher werden, also linksgekrümmt sein. Dann kommt nur ein Teil des Graphen rechts vom rechten Wendepunkt in Frage. Der rechte Wendepunkt von f_1 liegt bei $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707...$. Da $0{,}8 > \frac{1}{\sqrt{2}}$, erfüllt die vorgeschlagene Anfangstelle 0,8 also die Bedingung. Anfangssteigung des gekrümmten Teils: Es gilt: $f_a'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$ $f_1'(0{,}8) = -1{,}6 \cdot e^{-0{,}64} = -0{,}8436...$ Um zu dieser Steigung den Steigungswinkel zu berechnen, verwendet man den Arcustangens: $\arctan(-0{,}8436...) \approx -40{,}15° \approx -40°$. Damit ist auch diese Bedingung erfüllt. (Das negative Vorzeichen bringt das „Fallen“ des Graphen zum Ausdruck). Steigung an der Absprungstelle: Es gilt $\tan(-10°) = -0{,}176326...$. Um das Ende der Anlaufbahn zu finden, muss also die Gleichung $f_1'(x) = -0{,}176326...$ gelöst werden. Das kann durch Probieren oder mit Hilfe des Newton-Verfahrens geschehen: Mit dem Anfangswert $x_0 = 1{,}7$ liefert das Newton-Verfahren die folgenden Werte: 1,7 ; 1,7238 ; 1,7244 ; 1,7244 ; … Mit der geforderten Genauigkeit sollte die Anlaufbahn also bei $x_e = 1{,}72$ enden. Geeigneter Maßstab: Der Länge von $1{,}72 - 0{,}8 = 0{,}92$ soll die Länge von gut 90 m in der Realität entsprechen, also gilt: 1 LE entspricht 100 m.	5	15	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	Die durchschnittliche Steigung wird durch $\overline{m}=\frac{1}{b-a}\cdot\int\limits_a^b f'(x)\cdot dx$ bestimmt. Die Stammfunktion ist mit *f* bereits bekannt. Als mittlere Steigung ergibt sich: $\overline{m}=\frac{1}{0,92}\cdot\left[e^{-x^2}\right]_{0,8}^{1,72}$ $\overline{m}=\frac{1}{0,92}\cdot\left[e^{-1,72^2}-e^{-0,8^2}\right]$ $\overline{m}=\frac{-0,47539...}{0,92}$ $\overline{m}=-0,51672...$ $\alpha\approx-27,3°$ Der durchschnittliche Steigungswinkel des gekrümmten Teils der Anlaufbahn beträgt –27,3°.		15	
d)	Aus der Kurvendiskussion von a) geht hervor, dass mit wachsendem *k* der Wendepunkt nach links wandert und die Kurve im Wendepunkt steiler wird. Da der erste Vorschlag b) einen Kurvenausschnitt rechts vom Wendepunkt verwendet hat, wäre die Kurve von f_1 im Wendepunkt zu steil. Es muss also eine Funktion gewählt werden, die im Wendepunkt flacher als f_1 ist, also muss der Parameter *k* kleiner als 1 gewählt werden.			10
e)	<u>Lösungsstrategie:</u> Für den Übergang von a_1 zu a_2 muss gewährleistet sein, dass die Funktionswerte und die ersten Ableitungen der beiden Funktionen an der Stelle 2,75 übereinstimmen. Im Punkt $P(2,75\|a_1(2,75))$ kann die Tangentengleichung aufgestellt werden. Über die Normale zur Tangente in diesem Punkt gelangt man zum Mittelpunkt des Kreisbogens als Nullstelle der Normalen. Der Radius *r* des Kreisbogens entspricht der Länge der Normalen zwischen $P(2,75\|a_1(2,75))$ und dem Mittelpunkt *M*. Die Konstante a_3 hat den Wert $-r$, da der Übergang von a_2 zu a_3 im Punkt $(x_M\|-r)$ erfolgen muss und der Kreisbogen dort eine waagerechte Tangente hat. *Für den Kreisbogen a_2 müssen der Mittelpunkt und der Radius gefunden werden. Der Mittelpunkt liegt auf der Geraden g, die durch den Punkt $K(2,75\|a_1(2,75))$ und senkrecht zur Tangente von a_1 verläuft. Der Radius des Kreises bestimmt die Krümmung des Teils der Aufsprungbahn.*			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III

$$a_1(2{,}75) = -0{,}069 \cdot 2{,}75^3 + 0{,}175 \cdot 2{,}75^2 - 0{,}175 \cdot 2{,}75 + 0{,}14$$
$$a_1(2{,}75) \approx -0{,}453$$

Die Tangentengleichung t in dem Punkt K ergibt sich zu

$$t(x) = mx + b$$

mit

$$m = a_1'(2{,}75)$$
$$= -0{,}207 \cdot 2{,}75^2 + 0{,}35 \cdot 2{,}75 - 0{,}175$$
$$m \approx -0{,}778$$

und

$$t(2{,}75) = -0{,}778 \cdot 2{,}75 + b$$
$$-0{,}453 = -0{,}778 \cdot 2{,}75 + b$$
$$b \approx 1{,}687.$$

Senkrecht zur Tangentengleichung t durch den Punkt K ergibt sich die Gerade g

$$g(x) = \frac{1}{0{,}778} x - 3{,}988\,.$$

Der Mittelpunkt M des Kreisbogens a_2 liegt auf dieser Geraden g. Jeder Kreis mit M schließt nahtlos und ohne Ruck an der Bahn a_1 an. Die Nullstelle von g ist die x-Koordinate von M:

$$M \approx (3{,}102/0)$$

Die Funktionsgleichung für den Kreisbogen lautet

$$(x - 3{,}102)^2 + y^2 = r^2 \quad .$$

Mit $y<0$ und $r^2 = (3{,}102 - 2{,}75)^2 + 0{,}453^2$ (Pythagoras) ergibt sich schließlich der gesuchte Kreisbogen mit gerundeten Parametern:

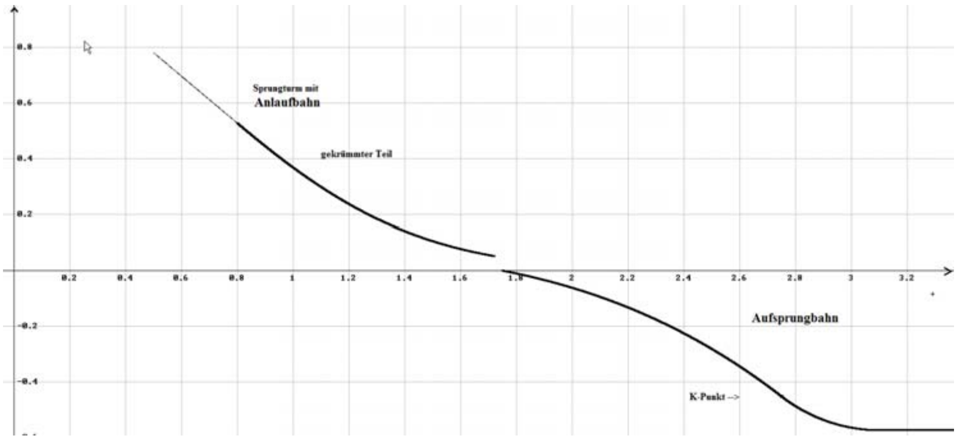
$$(x - 3{,}102)^2 + y^2 = 0{,}574^2 \quad \text{mit} \quad y<0 \ \text{ und } \ 2{,}75 < x < 3{,}102\,.$$

Der Funktionswert y an der Stelle des x-Wertes des Mittelpunktes M ist die gesuchte Konstante der Waagerechten a_3:

$$a_3(x) = -0{,}574\,.$$

Lösungsvariante:

Geht man aus von $a_1(2{,}75) = a_2(2{,}75)$, $a_1'(2{,}75) = a_2'(2{,}75)$, $M\,(x_M/0)$ und $a_2(x) = -\sqrt{r^2 - (x - x_M)^2}$ *, so folgt aus den Bedingungen direkt ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten. Auf Tangente und Normale kann so verzichtet werden.*

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>


</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>f)</td><td>
Um die Sprungweite $w(x) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\; dx$ auszurechnen, muss ein Näherungsverfahren ausgewählt werden. Da der Integrand der genannten Formel w in dem betrachteten Intervall für die Bogenlänge eine monotone Funktion ist, ist jedes in der Formelsammlung genannte Verfahren adäquat.
Z.B. ergibt die Keplersche Fassregel für eine Einteilung des Intervalls $\left[1,75\,;2,75\right]$ in n = 2 Teilintervalle mit der Teilintervalllänge d von

$$\begin{aligned} d &= \frac{x_2 - x_0}{2} \\ &= \frac{2,75 - 1,75}{2} \\ d &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

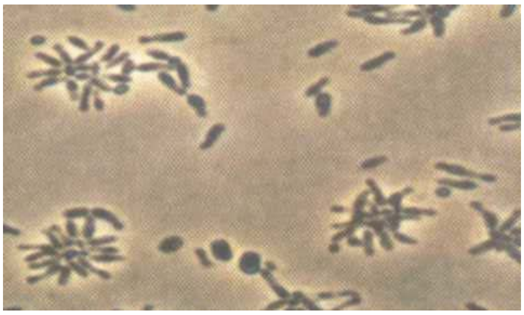
und der Formel für die Keplersche Regel

$$\begin{aligned} A &\approx \frac{d}{3} \cdot (f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + f(x_2)) \\ &\approx \frac{1}{6} \cdot (1,019 + 4 \cdot 1,091 + 1,267) \\ A &\approx 1{,}108\,. \end{aligned}$$

eine Sprungweite bis zum K-Punkt von ca. 111 Meter.
</td><td></td><td>5</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>30</td><td>50</td><td>20</td></tr>
</table>

ANALYSIS 2

I.2 Wachstumsverhalten von Bakterien



Fototrophe Bakterien brauchen Licht für ihren Stoffwechsel; wenn sie im Wasser leben, bevölkern sie also oberflächennahe Wasserschichten, die natürlich auch die sonstigen benötigten Nährstoffe enthalten müssen.

Wenn man wenige solcher Bakterien in ein entsprechend belichtetes Wasserbecken einsetzt, so ist die Wachstumsrate zunächst annähernd linear.

Mit steigendem Bestand allerdings machen die Bakterien selbst das Wasser weniger durchsichtig, so dass schließlich die Wachstumsrate mit dem Bestand zurückgeht.

Die **Wachstumsrate** in Abhängigkeit von der Zeit wird durch die Funktionenschar $f_{a,k}$ mit

$$f_{a,k}(t) = a \cdot t \cdot e^{-k \cdot t} \;, t \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}^+$$

beschrieben; *t* bezeichnet dabei die Zeit in beliebigen, aber festen Einheiten.

a) Begründen Sie, dass die Funktionen dieser Funktionenschar zur Modellierung der beobachteten Situation geeignet sind, das heißt, beschreiben Sie das Verhalten der Funktionen für kleine und für große *t* und vergleichen Sie dies mit dem geschilderten Sachkontext. Beschreiben Sie den Einfluss der beiden Parameter *k* und *a* auf das Aussehen der Graphen. **(15P)**

Für die Untersuchung der Eigenschaften der Funktionenschar wird zunächst $a = 1$ gesetzt.

b) Berechnen Sie den Zeitpunkt des stärksten Wachstums und die Wachstumsrate zu diesem Zeitpunkt. **(10P)**

c) Man kann sagen, dass die Wirkung der Wassertrübung etwa ab der Wendestelle der Funktion überhand nimmt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes in Abhängigkeit von *k* und beschreiben Sie die Bedeutung dieser Stelle zusammen mit der Stelle stärksten Wachstums im Sachkontext der Aufgabe. **(10P)**

d) Zeigen Sie, dass zur Funktionenschar $f_{1,k}$ die Funktionenschar $F_{1,k}$ mit $F_{1,k}(t) = \dfrac{1-(1+k \cdot t) \cdot e^{-k \cdot t}}{k^2}$ gehört, bei der jeweils $F_{1,k}$ eine Stammfunktion von $f_{1,k}$ ist und für alle $F_{1,k}$ gilt: $\lim\limits_{t \to 0} F_{1,k}(t) = 0$.

Beschreiben Sie die Bedeutung der Funktionenschar $F_{1,k}$ im Sachkontext.

Zeigen Sie, dass für jedes *k* die Funktion $F_{1,k}$ für $t \to \infty$ gegen eine endliche Zahl geht und bestimmen Sie diesen Grenzwert in Abhängigkeit von *k*.

Beschreiben Sie die Bedeutung des Grenzwerts im Kontext der Aufgabe. **(20P)**

e) Zeichnen Sie $f_{1;0,5}$ und $F_{1;0,5}$ im Bereich $0 < t \leq 10$ in das Koordinatensystem in der Anlage. **(10P)**

Nun geht es wieder um Bakterien. Wir lösen uns von dem Sonderfall $a = 1$.
Bei einem solchen Wachstums-Experiment im Rahmen eines Forschungsauftrags ergab sich ein Endbestand von 120 Bakterien (pro cm³), die Zeitkonstante k wurde zu $k = 0{,}7/h$ bestimmt.
Die Zeit t wird in Stunden gemessen.

f) Um dieses Experiment zu modellieren, muss jetzt der Parameter a in der Funktionenschar $F_{a,k}$ mit $F_{a,k}(t) = \dfrac{a - a \cdot (1 + k \cdot t) \cdot e^{-k \cdot t}}{k^2}$ angepasst werden.

Ermitteln Sie aus den obigen Angaben den Wert des Parameters a für die beschreibende Funktion $F_{a;\,0,7}$.
Hinweis: Bestimmen Sie zunächst den Grenzwert von $F_{a,k}$ für $t \to \infty$.

Zeigen Sie, dass die Wachstumsrate der Bakterien nach sechs Minuten noch nicht wesentlich von einer rein linearen Wachstumsrate abgewichen ist.

Bestimmen Sie mit einem Näherungsverfahren Ihrer Wahl auf eine Nachkommastelle genau, nach welcher Zeit die Bakterienzahl auf 90 % des Endbestands angestiegen ist. **(15P)**

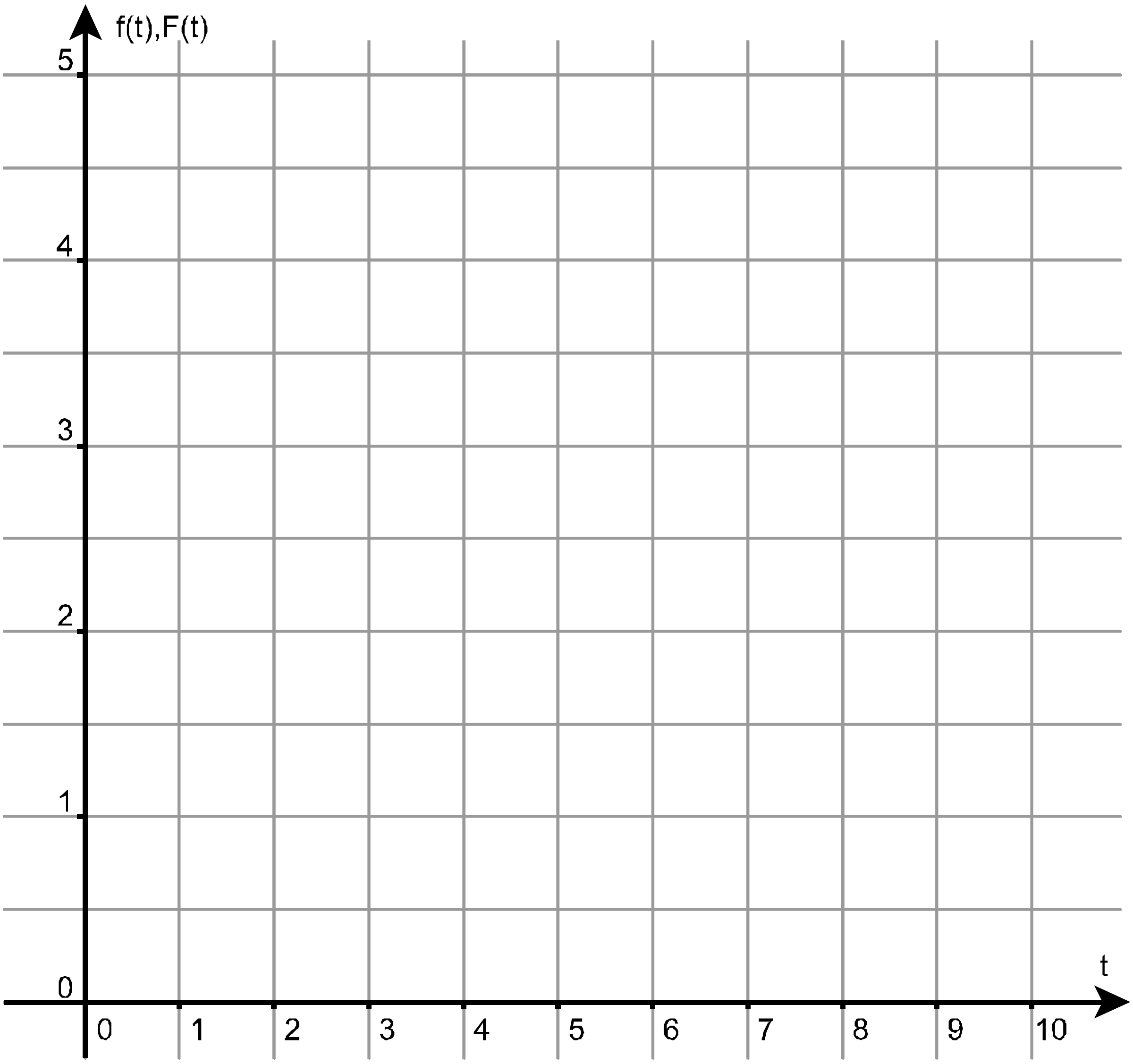
Ein Doktorand wurde bei dem Forschungsauftrag mit der Frage betraut, welchen Einfluss eine viertelstündige Unterbrechung der Lichtzufuhr auf den Bestand der Bakterien hat.

g) Beurteilen Sie die Auswirkungen auf die Wachstumsrate und auf den Bestand für die beiden folgenden Hypothesen und skizzieren Sie für beide Fälle die jeweiligen Graphen für den Bestand:

(1) Während der Dunkelheit geschieht mit den Bakterien gar nichts.

(2) Während der Dunkelheit nimmt die Zahl der Bakterien exponentiell ab. **(20P)**

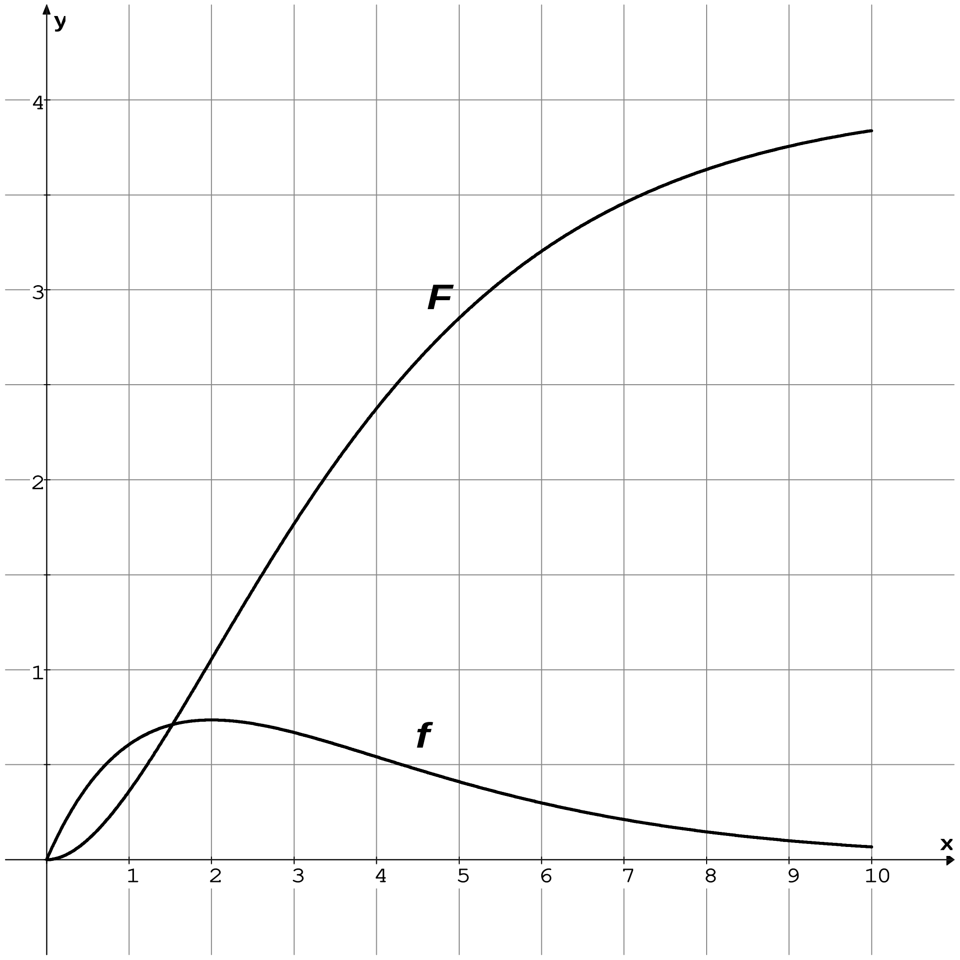
Anlage zur Aufgabe „Wachstumsverhalten von Bakterien“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	• Für kleine *t* ist der Faktor e^{-kt} praktisch konstant, so dass hier der lineare Faktor *t* zusammen mit einem anderen, auch linearen Faktor das Wachstum bestimmt: lineares Wachstum bei kleinem *t*. • Für große *t* sinkt der Faktor e^{-kt} viel schneller als der lineare Faktor *t* wächst, denn der Term $t \cdot e^{-kt}$ konvergiert für wachsendes *t* gegen Null. Hier tritt im Wesentlichen ein exponentielles Verhalten auf. Der Parameter *a* stellt lediglich eine Streckung des Graphen in vertikaler Richtung dar, beschreibt also die Gesamtskala des Wachstums, während der Parameter *k* eine inverse Zeitkonstante darstellt: Je größer *k* ist, desto schneller wirkt die exponentielle Abschwächung, weil bei größerem *k* der Exponent schneller wächst. *Hinweis:* *Die exponentielle Abschwächung wird ebenfalls mit wachsendem k früher wesentlich, da der praktisch lineare Bereich der Exponentialfunktion früher verlassen wird.*	5	10	
b)	Gesucht ist das Maximum von $f_{1,k}(t) = t \cdot e^{-k \cdot t}$. Die Ableitungsfunktion hat die Gleichung $f_{1,k}'(t) = \left(1 - k \cdot t\right) \cdot e^{-k \cdot t}$. Für $\left(1 - k \cdot t\right) \cdot e^{-k \cdot t} = 0$ gilt $\left(1 - k \cdot t\right) = 0$ und $t = \frac{1}{k}$. Da $0 = f_{1,k}(0) = \lim\limits_{t \to \infty} f_{1,k}(t)$ und $f_{1,k}(t) \geq 0$ für alle $x \geq 0$, muss es sich bei dieser Nullstelle um eine Maximalstelle von *f* handeln. *Hinweis: Andere Begründungen sind denkbar und zulässig.* $f_{1,k}\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} \cdot e^{-k \cdot \frac{1}{k}} = \frac{1}{k \cdot e}$. Zum Zeitpunkt $t = \frac{1}{k}$ beträgt die höchste Wachstumsrate $\frac{1}{k \cdot e}$.	10		
c)	Es gilt: $f_{1,k}''(t) = \left(k \cdot t - 2\right) \cdot k \cdot e^{-k \cdot t}$. $\left(k \cdot t - 2\right) \cdot k \cdot e^{-k \cdot t} = 0$ $k \cdot t - 2 = 0$ $t = \frac{2}{k}$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Da diese Nullstelle zwischen der Maximalstelle und dem asymptotischen Wert 0 liegt, handelt es sich um eine Wendestelle (mit R-L-Krümmungswechsel). $f_{1,k}\left(\frac{2}{k}\right)=\frac{2}{k}\cdot e^{-k\cdot\frac{2}{k}}=\dfrac{2}{k\cdot e^2}$. Der Wendepunkt W hat damit die Koordinaten $W\left(\dfrac{2}{k}\mid\dfrac{2}{k\cdot e^2}\right)$. Wenn die Bakterienkultur bei ihrer Entwicklung die Wendestelle der Wachstumsfunktion durchläuft, ist doppelt so viel Zeit vergangen wie zum Zeitpunkt des stärksten Wachstums. Während dieser Zeit – zwischen Wachstumsmaximum und Wendestelle – hat sich das Wachstum immer schneller abgeschwächt; ab jetzt lässt die Abschwächung des Wachstums wieder nach.		10	
d)	• Ableiten von $F_{1,k}(t)$ ergibt $F'_{1,k}(t)=\dfrac{-k\cdot e^{-k\cdot t}-(1+k\cdot t)\cdot(-k)\cdot e^{-k\cdot t}}{k^2}$ $=\dfrac{-k\cdot e^{-k\cdot t}+k\cdot e^{-k\cdot t}+k^2\cdot t\cdot e^{-k\cdot t}}{k^2}$ $=t\cdot e^{-k\cdot t}=f_{1,k}(t)$ Da $f_{1,k}$ eine Wachstumsfunktion ist, also die Bestandsänderung pro Zeit beschreibt, ist ihr bestimmtes Integral über die Zeit der Bestand selbst, wenn man aus den Stammfunktionen die auswählt, die am Anfang den Wert 0 aufweist, genauer den Grenzwert 0 für t → 0. *Hinweis dies ist eine Schwäche des gewählten Modells, da ja „am Anfang“ eine vermehrungsfähige Anzahl von Bakterien hinzugefügt werden muss. Andererseits erleichtert es die Lösungen der nachfolgenden Teilaufgaben.* *Der Vermehrungsprozess ist ein diskreter Vorgang, sodass jede stetige Funktion mathematisches Modell bleibt.“* • Es gilt: $\lim\limits_{t\to\infty}F_{1,k}(t)=\dfrac{1-(1+k\cdot t)\cdot e^{-k\cdot t}}{k^2}$ $=\dfrac{1}{k^2}$, da der Exponentialfaktor im Zähler und damit der zweite Summand im Zähler gegen Null geht. • Also hat der Grenzwert den Wert $\dfrac{1}{k^2}$. • Der Grenzwert beschreibt den Endbestand der Bakterienpopulation.		20	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>


</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>f)</td><td>

- Wiedereinführung von *a* ergibt $\lim\limits_{t\to\infty} F_{a,k}(t) = \frac{a}{k^2}$.

  Für den Endbestand gilt: $\frac{a}{0,49} = 120$ und damit $a = 58,8$.

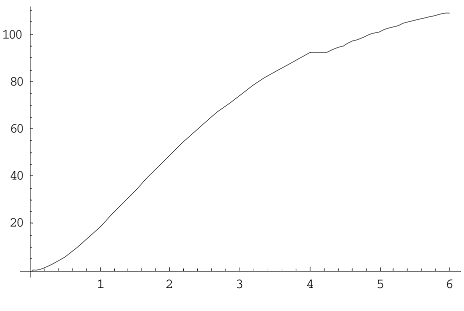
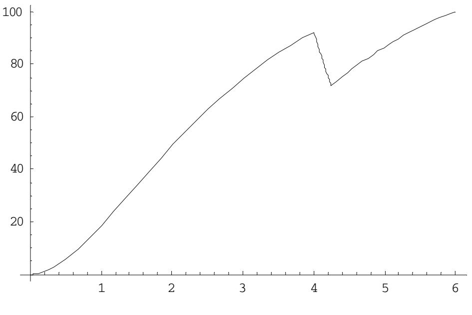
- 6 Minuten sind 0,1 Stunden, also $t = 0,1$. Zu vergleichen sind $f_{58,8:0,7}(0,1) \approx 5,48$ und $58,8 \cdot 0,1 = 5,88$.

  Der Einfluss des Exponentialterms senkt also den Funktionswert lediglich um sieben Prozent. Damit weicht das Wachstum in den ersten 6 Minuten nicht wesentlich vom linearen Wachstum ab.

- Einsetzen liefert die zu lösende Gleichung:

  $$0,9 \cdot \frac{a}{0,7^2} = \frac{a}{0,7^2} \cdot \left(1 - \left(1 + 0,7 \cdot t\right) \cdot e^{-0,7 \cdot t}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 0,9 = 1 - (1 + 0,7t) \cdot e^{-0,7 \cdot t}.$$

Verschiedene mögliche Verfahren führen zu $t \approx 5,557$. Also ist der Bestand nach knapp 5,6 Stunden auf 90 % des Endbestandes angewachsen.
</td><td></td><td>10</td><td>5</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
g)	- Im ersten Fall – wenn also während der Dunkelheit nichts passiert – ändert sich im Gesamtverhalten letztlich auch nichts – die Wachstumsfunktionen weisen für die Zeit der Dunkelheit den Wert Null auf, die Bestandsfunktionen haben (demzufolge: Nullwachstum!) für die Zeit der Dunkelheit einen konstanten Verlauf. Alle Bestandswerte treten um die Dunkelzeit, also um eine Viertelstunde, verspätet auf. - Im zweiten Fall folgt der Bestand während der Dunkelheit der Funktion $F(t) = F_0 \cdot e^{-d \cdot t}$, wobei *d* die Konstante der exponentiellen Abnahme ist (diese muss nicht *k* sein) und der Index 0 jeweils den Eintritt der Dunkelheit bezeichnet. Dies bedeutet zunächst, dass die Wachstumsfunktion während der Dunkelzeit $f(t) = -d \cdot F_0 \cdot e^{-d \cdot t}$ ist. Wesentlicher ist aber, dass die Gesamt-Abnahme proportional zum Bestand im Augenblick des Eintretens der Dunkelheit ist. Wenn das Experiment schon länger läuft (z.B. im Graphen bei *t* = 8), ist die absolute Abnahme größer als am Anfang (z.B. bei *t* = 2). Dies bedeutet, dass die Erholungszeit – also die Zeit, in der der Bestand, der am Beginn der Dunkelheit bestand, wieder erreicht wird – um so größer ist, je weiter das Experiment fortgeschritten ist. Der Endbestand hingegen ist von der Unterbrechung unabhängig.			5
	Die Skizzen müssen diesen Sachverhalten entsprechen; hier sind Bestandsfunktionen für beide Fälle für eine Lichtunterbrechung nach 4 Stunden gegeben: Fall (1)  Fall (2) 		5	10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

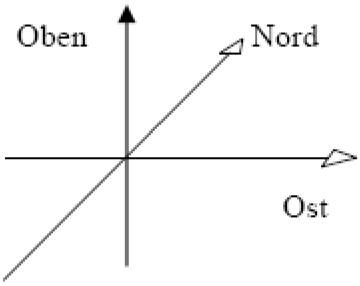
LA/AG 1

II.1 Flughafen

Flugzeuge beschleunigen auf Rollbahnen, die in dieser Aufgabe in einer Ebene liegen.

Diese Ebene sei die x_1-x_2-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems. Alle Längen haben die Einheit Meter. Entgegen der üblichen Schreibweise wird hier, angepasst an die Navigation auf der Erde, die folgende Darstellung gewählt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathit{Ost} \\ \mathit{Nord} \\ \mathit{Oben} \end{pmatrix}$$



Mit dem Abheben eines Flugzeuges beginnt die Startflugphase, die durch die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -200 \\ -400 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 48 \\ 36 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

unter der vereinfachenden Annahme **einer konstanten Geschwindigkeit** beschrieben werden soll.

Dabei ist der Parameter t die Zeit in Sekunden nach dem Abheben des Flugzeugs zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Zahlenangaben sind in der Einheit Meter zu lesen.

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit v des Flugzeugs in der Startflugphase in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Hinweis: Berechnen Sie dazu den in der 1. Sekunde zurückgelegten Weg.
Bestimmen Sie die Größe des Steigungswinkels α, den das Flugzeug in der Startflugphase gegenüber der Rollbahn hat. **(15P)**

b) Der Kontrollraum des Flughafentowers befindet sich im Punkt $T(0|100|30)$. Berechnen Sie die kürzeste Entfernung e, die das Flugzeug in der Startflugphase zum Tower hat. **(15P)**

c) Der Start des Flugzeugs erfolgt bei sonnigem Wetter. Die Richtung der Sonneneinstrahlung wird durch $\vec{s} = \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \\ -30 \end{pmatrix}$ beschrieben.

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Schattens des Flugzeugs, der sich fortwährend auf der x_1-x_2-Ebene bewegt.
- Begründen Sie, dass es einen Unterschied zwischen Schattengeschwindigkeit und Geschwindigkeit des Flugzeugs gibt.
- Untersuchen Sie, ob es eine Situation geben könnte, in der die Schattengeschwindigkeit gleich Null ist. **(20P)**

d) In direkter Nähe des Flughafens hat sich eine Regenfront aufgebaut. Die Front liegt in der Ebene $E:\ 4x_1 + 3x_2 = 12000$.

- Beschreiben Sie (kurz) die Lage der Regenfront bezüglich der x_1-x_2-Ebene und der x_3-Achse.
- Ermitteln Sie den Zeitpunkt t_1, zu dem das Flugzeug in die Regenfront eintaucht.
- Bestimmen Sie die dazugehörige Flughöhe. **(15P)**

e) Der Flughafentower überwacht den gesamten Flugverkehr im Überwachungsbereich seines Radars. Der halbkugelförmige Überwachungsbereich hat einen Radius von 15 km, der Mittelpunkt der Halbkugel befinde sich in T(0|100|30).
Ein vorüber fliegendes Flugzeug, das sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Radar in der Position $P(3000|-8000|6000)$ befindet, fliegt (auch vor dem Zeitpunkt $t = 0$) in konstanter Höhe mit einer Geschwindigkeit von 150 m/s geradlinig nordwärts.

- Ermitteln Sie die Zeitspanne, in der sich das Flugzeug im Überwachungsbereich des Radars befindet.
- Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_2, in dem sich das startende (aus den vorhergehenden Aufgaben) und das vorüber fliegende Flugzeug am nächsten kommen.
- Man spricht von einer Beinahekollision, wenn sich Flugzeuge um weniger als 2 km nähern.
  Entscheiden Sie, ob es zwischen den beiden Flugzeugen zu einer Beinahekollision kommt.
  Untersuchen Sie, ob die Entfernung beider Flugzeuge zu dem kritischen Zeitpunkt t_2 mit dem Abstand der Flugbahnen übereinstimmt. **(25P)**

f) Das zweite Flugzeug aus e) befindet sich nach wie vor in 6000 m Höhe.
Der GPS-Empfang ist schlecht, deshalb bittet der Pilot drei in der Nähe befindliche Radarstationen um Navigationshilfe. Die drei Stationen haben folgende Positionen:
$T(0 \mid 100 \mid 30)$ (aus b) bekannt), $T_2(-2000 \mid -10\,000 \mid 30)$ und $T_3(5000 \mid -12\,000 \mid 30)$.
Der Pilot erfährt (fast zeitgleich), dass sich die drei Radarstationen in folgenden Distanzen (zu seiner Position) befinden: $d = 8405$ m, $d_2 = 9254$ m und $d_3 = 9415$ m.
Bestimmen Sie die Position des Flugzeuges zum Zeitpunkt der Anfrage.
Beurteilen Sie Ihr Ergebnis mit dem Wissen aus e) auf Plausibilität. **(10P)**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Innerhalb der 1. Sekunde nach dem Abheben legt das Flugzeug eine Flugstrecke von $s = \sqrt{30^2 + 48^2 + 36^2}$ $s = 67{,}082...$ Metern zurück. Die Startgeschwindigkeit beträgt somit etwa 241,5 km/h. Für den Winkel β zwischen dem Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix}30\\48\\36\end{pmatrix}$ der Flugbahn und dem Vektor $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, normal zur Bodenebene, gilt: $\cos\beta = \frac{\left\lvert \begin{pmatrix}30\\48\\36\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rvert}{\sqrt{30^2 + 48^2 + 36^2}}$ $= \frac{36}{30 \cdot \sqrt{5}}$ $= 0{,}5366$ $\beta = 57{,}54...°$ Der Steigungswinkel α beträgt etwa 90° – β = 32,5°.	10	5	
b)	Für den Lotvektor $\overrightarrow{TS}$ vom Tower zu einem Punkt der Startflugbahn gilt: $\overrightarrow{TS} = \left(\begin{pmatrix}-200\\-400\\0\end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix}30\\48\\36\end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix}0\\100\\30\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{TS} = \begin{pmatrix}-200\\-500\\-30\end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix}30\\48\\36\end{pmatrix}$. Der Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix}30\\48\\36\end{pmatrix}$ der Flugbahngeraden und der Lotvektor $\overrightarrow{TS}$ stehen senkrecht aufeinander, ihr Skalarprodukt ist also Null:			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

$$\begin{pmatrix} -200+t_s\cdot 30 \\ -500+t_s\cdot 48 \\ -30+t_s\cdot 36 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 30 \\ 48 \\ 36 \end{pmatrix}=0$$

Daraus folgt:

$$-6000+900\cdot t_s-24000+2304\cdot t_s-1080+1296\cdot t_s=0$$
$$60\cdot(75\cdot t_s-518)=0$$
$$t_s=\frac{518}{75}.$$

Somit ergibt sich für den Lotvektor $\overrightarrow{ST}$:

$$\overrightarrow{ST}=\begin{pmatrix} -200 \\ -500 \\ -30 \end{pmatrix}+\frac{518}{75}\cdot\begin{pmatrix} 30 \\ 48 \\ 36 \end{pmatrix}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 180 \\ -4212 \\ 5466 \end{pmatrix}.$$

Die Länge des Lotvektors $\overrightarrow{ST}$ beträgt

$$\frac{1}{25}\sqrt{180^2+4212^2+5466^2}\approx 276{,}12\,.$$

Die gesuchte Entfernung beträgt ungefähr 276 m.

Alternative:

Man kann auch den Betrag des Verbindungsvektors $\overrightarrow{ST}$ als quadratische Funktion von t minimieren.

</td><td>15</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

Das Flugzeug startet in $S(-200|-400|0)$ und ist eine Sekunde später in einem mit A bezeichneten Flugbahnpunkt $(-170|-352|36)$. A' sei der Schatten von A auf der x_1-x_2-Ebene. Gesucht ist $\left|\overrightarrow{SA'}\right|$.

Ein Sonnenstrahl durch A erfüllt die Geradengleichung

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} -170 \\ -352 \\ 36 \end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix} -10 \\ 20 \\ -30 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Ansatz $x_3 = 0 = 36 - 30\mu$ folgt $\mu = 1{,}2$.
Einsetzen von $\mu = 1{,}2$ in die Geradengleichung liefert $A'(-182|-328|0)$.

Somit ist $\overrightarrow{SA'}=\begin{pmatrix} 18 \\ 72 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\left|\overrightarrow{SA'}\right|=\sqrt{18^2+72^2}\approx 74{,}2$.

Die Schattengeschwindigkeit beträgt etwa 267 km/h.

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Die Schattengeschwindigkeit ist in diesem Fall höher. Eine höhere Geschwindigkeit entsteht, wenn die Projektionsstrecke länger als die entsprechende Flugstrecke ist. Der Unterschied ist bei gleich bleibender Flugbahn abhängig von der Richtung der Sonneneinstrahlung. Fliegt man genau gegen die Sonne, so wäre der Schatten auf der x_1-x_2-Ebene als fester Punkt zu sehen, so dass keine Bewegung des Schattens zu verzeichnen wäre.		20	
d)	Die Regenfront ist eine parallele Ebene zur x_3-Achse bzw. senkrecht zur x_1-x_2-Ebene, weil der Normalenvektor dieser Ebene senkrecht auf der x_3-Achse steht. Zur Berechnung des Zeitpunktes, zu dem das Flugzeug die Regenfront erreicht, wird der Term der Flugbahngeraden eingesetzt in die Ebenengleichung: $4x_1+3x_2=12000 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=12000$. Somit folgt: $\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}-200\\-400\\0\end{pmatrix}+t_1\cdot\begin{pmatrix}30\\48\\36\end{pmatrix}\right)=12000$ $-800+120\cdot t_1-1200+144\cdot t_1=12000$ $264\cdot t_1=14000$ $t_1=53{,}030...\approx 53{,}03$ Das Flugzeug taucht nach etwa 53 s in die Regenfront ein. Die zugehörige Flughöhe errechnet sich als x_3-Komponente der Flugbahngeraden für $t_1=53{,}03$: $53{,}03\cdot 36\approx 1909$. Das Flugzeug gerät in etwa 1 900 m Höhe in die Regenfront.		15	
e)	Zum vorüber fliegenden Flugzeug gehört die Geradengleichung $\vec{x}=\begin{pmatrix}3000\\-8000\\6000\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\150\\0\end{pmatrix}$. Die Radarüberwachung führt zur Kugelgleichung:			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III

$$\left(\left(\begin{pmatrix}3000\\-8000\\6000\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\150\\0\end{pmatrix}\right)-\begin{pmatrix}0\\100\\30\end{pmatrix}\right)^2=15000^2$$

Daraus ergibt sich:

$$3000^2+\left(-8100+150\cdot t\right)^2+5970^2=15000^2$$

$$22\,500\cdot t^2-2\,430\,000\cdot t=114\,749\,100$$

$$t^2-108\cdot t-5\,099{,}96=0$$

$$t_{1,2}=54\pm\sqrt{2916+5099{,}96}$$

$$t_1=143{,}531...$$

$$t_2=-35{,}531...$$

Näherungswerte der quadratischen Gleichung sind 143,5 und –35,5.
Die Radarüberwachung dauert insgesamt etwa 179 sec oder etwa 3 Minuten.

Zu einem Zeitpunkt t_2 (nach dem Abheben von der Startbahn) befindet sich das startende Flugzeug in einer mit A bezeichneten Position und das vorüber fliegende Flugzeug zur gleichen Zeit t_2 in einer mit B bezeichneten Position mit

$$\vec{x}_A=\begin{pmatrix}-200\\-400\\0\end{pmatrix}+t_2\cdot\begin{pmatrix}30\\48\\36\end{pmatrix}\text{ beziehungsweise }\vec{x}_B=\begin{pmatrix}3000\\-8000\\6000\end{pmatrix}+t_2\cdot\begin{pmatrix}0\\150\\0\end{pmatrix}.$$

Gesucht ist derjenige Wert t_2, für den die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$ minimal wird.

Mit $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{x_B}-\overrightarrow{x_A}=\begin{pmatrix}3200\\-7600\\6000\end{pmatrix}+t_2\cdot\begin{pmatrix}-30\\102\\-36\end{pmatrix}$ gilt:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(3200-30t_2)^2+(-7600+102t_2)^2+(6000-36t_2)^2}\;.$$

$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=f(t_2)$ hat an derselben Stelle ein Extremum wie $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{f(t_2)}$.

Gesucht ist also das Extremum von

$$f(t_2)=(3200-30t_2)^2+(-7600+102t_2)^2+(6000-36t_2)^2$$

$$f'(t_2)=-60(3200-30t_2)+204(-7600+102t_2)-72(6000-36t_2)$$

$$f'(t_2)=-2174400+25200t_2$$

Nullsetzen der Ableitung liefert $t_2\approx 86{,}3$.

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Da der Graph *f* eine nach oben geöffnete Parabel ist, ist klar, dass an dieser Stelle ein Minimum existiert. Die Flugzeuge sind sich nach ungefähr 86 Sekunden am nächsten. Zu diesem Zeitpunkt t_2 wird die Entfernung der Flugzeuge durch den Vektor $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{x_B} - \overrightarrow{x_A}$ beschrieben. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3200 \\ -7600 \\ 6000 \end{pmatrix} + 86,3 \cdot \begin{pmatrix} -30 \\ 102 \\ -36 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 611 \\ 1202,6 \\ 2893,2 \end{pmatrix}$ Seine Länge ist zu berechnen über $\sqrt{611^2 + 1202,6^2 + 2893,2^2} = \sqrt{10190174} \approx 3192,2$. Die Flugzeuge sind ca. 3,2 km voneinander entfernt, damit besteht keine Gefahr einer Beinahekollision. Dieser Vektor $\overrightarrow{AB}$ steht auf keinem der beiden Richtungsvektoren der Flugbahnen senkrecht, weil ohne weitere Rechnung zu erkennen ist, dass die entsprechenden Skalarprodukte nicht null werden. Hiermit sind die Entfernung der Flugzeuge und der Abstand der Flugbahnen **nicht** identisch. *Alternative Lösung:* Der Abstand der windschiefen Geraden der Flugbahnen wird direkt berechnet. Dieser Abstand beträgt 1382,8 m.		15	10
f)	Die unbekannte Position des Flugzeuges sei mit $X(x_1 \mid x_2 \mid 6000)$ bezeichnet. Dann gelten die drei Gleichungen: $(X-T)^2 = 8405^2$; $(X-T_2)^2 = 9254^2$; $(X-T_3)^2 = 9415^2$. Ausmultiplizieren ergibt: $x_1^2 + x_2^2 \qquad - 200x_2 = 34\,993\,125 \quad (\text{I})$ $x_1^2 + x_2^2 + 4000x_1 + 20000x_2 = -54\;004\,384 \quad (\text{II})$ $x_1^2 + x_2^2 - 10\,000x_1 + 24\,000x_2 = -115\,998\,675 \quad (\text{III})$			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Man subtrahiert (II) – (I) und (III) – (II) und erhält (die Gleichungen von zwei Schnittkreisebenen):
$$\begin{aligned} 4000x_1 + 20\,200x_2 &= -88\,997\,509 \\ -14\,000x_1 + 4000x_2 &= -61\,994\,291 \end{aligned}$$
Das lineare Gleichungssystem hat die Lösung:
$x_1 \approx 3000$ und $x_2 \approx -5000$.
Das Flugzeug ist also auf dem Nordkurs geblieben und ist gegenüber der Position aus e) 3 km in gleicher Höhe weitergeflogen.</td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>55</td><td>20</td></tr>
</table>

LA/AG 2

II.2 Geckos

Geckos gehören zur Familie der Schuppenkriechtiere. Sie bevölkern seit etwa 50 Millionen Jahren die Erde und haben sich im Laufe ihrer Entwicklung weltweit ausgebreitet. Aufgrund ihrer hervorragenden Anpassungsfähigkeit haben Geckos die verschiedensten Lebensräume erobert und sind sowohl in den gemäßigten Zonen als auch in den Wüsten und den Tropen anzutreffen.

Im Folgenden wird eine spezielle Art von Geckos in drei verschiedenen Regionen A, B, C in den Tropen untersucht. Die drei Regionen bieten den Geckos ganz unterschiedliche Lebensbedingungen, die sich durch besondere Vegetationsformen, Temperatur- und Niederschlagsvariabilität auszeichnen. Vereinfachend wird angenommen, dass sich die Geckos in jeder Region in zwei Altersklassen aufteilen lassen: Jungtiere (J) und Alttiere (S).

Die Entwicklung der Geckos in den Regionen lässt sich – unter Vernachlässigung von Wanderbewegungen von einer Region in die anderen – für einen Beobachtungszeitraum von einem Jahr näherungsweise folgendermaßen modellieren:

Region A: 30 % der Alttiere bekommen durchschnittlich einen Nachfahren.
90 % der Jungtiere verbleiben in ihrer Klasse, 10 % Jungtiere wechseln die Altersklasse.
Die Sterblichkeit der Alttiere beträgt 30 %.

Region B: 20 % der Alttiere und 35 % der Jungtiere haben durchschnittlich einen Nachfahren.
55 % der Jungtiere verbleiben in ihrer Klasse, 40 % der Jungtiere erreichen das Alttieralter. Die Sterblichkeit der Alttiere beträgt 30 %.

a) Ordnen Sie begründet die Matrizen K und L den Gecko-Entwicklungen in den beiden Regionen A und B zu.

$$K = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,4 & 0,7 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Stellen Sie für die Region A und B die Entwicklungsmodelle mit je einem Graphen dar. **(15P)**

Ein Forscherteam junger Biologen möchte die Entwicklung der Geckos in Abhängigkeit von den Umweltbedingungen untersuchen. Dazu steckt es in den Regionen A und B Gebiete ab, in denen sich zum Untersuchungszeitpunkt genau 1000 Jungtiere und 2000 Alttiere aufhalten.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Populationsmatrizen für beide Gebiete die Anzahl der Geckos jeder Klasse nach einem und nach zwei Jahren.

Bestimmen Sie für beide Gebiete den Bestand nach 20 Jahren mit Hilfe der Matrizen K^{10} bzw. L^{10}. Es gilt:

$$K^{10} \approx \begin{pmatrix} 1,729 & 0,864 \\ 1,729 & 0,865 \end{pmatrix} \qquad L^{10} \approx \begin{pmatrix} 0,752 & 0,745 \\ 0,248 & 0,255 \end{pmatrix}$$

(20P)

Im folgenden Aufgabenteil geht es jeweils um die Größe der gesamten Geckopopulation, also um die Summe der Jung- und Alttiere. Neben den Gebieten *A* und *B* wird außerdem ein Gebiet in einer Region *C* betrachtet. Die Entwicklung der Geckozahlen in diesem Gebiet ist in folgender Tabelle dargestellt.

Zeit t	**Populationsvektoren für Gebiet C:**
0	$\vec{p}_0 = (4000 \mid 2000)$
1	$\vec{p}_1 = (2800 \mid 2200)$
2	$\vec{p}_2 = (2120 \mid 2100)$
10	$\vec{p}_{10} = (526 \mid 673)$
20	$\vec{p}_{20} = (111 \mid 143)$

c) Vergleichen Sie anhand Ihrer Ergebnisse und unter Berücksichtigung der tabellierten Werte die Entwicklungen der Geckozahlen in allen drei Gebieten miteinander.

Bestimmen Sie mit Hilfe der Wertepaare für $t = 0$ und $t = 20$ für jedes Gebiet eine Exponentialfunktion vom Typ $f(t) = c \cdot a^t$ zur diskreten Beschreibung der Gecko-Entwicklung. Dabei soll *f(t)* die Gesamtzahl der Geckos in Abhängigkeit von der Zeit *t* in Jahren darstellen.

Bestimmen Sie, nach wie vielen Jahren in den Gebieten B und C gleich viele Geckos leben. **(20P)**

Wanderbewegungen zwischen den Regionen blieben bisher unberücksichtigt. Tatsächlich wandern aber jährlich 5 % der Alttiere von Region B nach Region A. 10 % der Jungtiere wandern von Region A nach Region B über. Die bereits erwähnte hohe Anpassungsfähigkeit der Geckos führt dazu, dass sich die Tiere in ihrer Populationsentwicklung sofort den ansässigen Geckos anpassen.

d) Die Population in beiden Regionen wird durch den Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} J_A & S_A & J_B & S_B \end{pmatrix}^T$ angeben. Leiten Sie für die neue Situation einen Übergangsgraphen her.

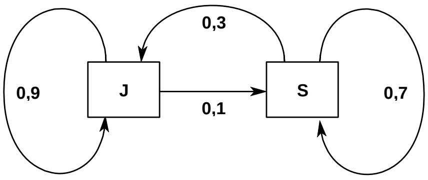
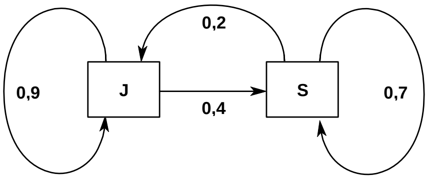
Ermitteln Sie eine modifizierte Übergangsmatrix *P* und begründen Sie Ihre Vorgehensweise. **(20P)**

Im letzten Aufgabenteil wird erneut die Matrix *L* aus Teil a) betrachtet. Sie lässt sich mit einer Transformationsmatrix *T*, deren „inverser Matrix“ T^{-1}, sofern diese existiert, und einer Diagonalmatrix *D* schreiben als $L = T \cdot D \cdot T^{-1} \quad (*)$.

e) Bestätigen Sie, dass mit $T = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T^{-1} = \begin{pmatrix} -0,25 & 0,75 \\ 0,25 & 0,25 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Gleichung $(*)$ erfüllt wird.

- Leiten Sie mit der Gleichung (*) eine Formel für L^n her. Verwenden Sie dabei die Eigenschaft inverser Matrizen: $T^{-1} \cdot T = E$, wobei *E* die Einheitsmatrix ist.
- Begründen Sie, dass sich die Potenzen L^n selbst für große n mit dieser Formel auch ohne Computereinsatz recht leicht berechnen lassen. Berechnen Sie mit Ihrer Formel nun selbst die Matrix L^{10}, die Ihnen in Teil b) vorgegeben war. **(25 P)**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Korrekte Zuordnung: Region / Gebiet: Matrix: Graph: A $L=\begin{pmatrix}0,9 & 0,3\\0,1 & 0,7\end{pmatrix}$  B $K=\begin{pmatrix}0,9 & 0,2\\0,4 & 0,7\end{pmatrix}$  Begründung: Das erste Matrixelement der ersten Zeile ergibt sich aus der Addition des Anteils der Jungtiere, die im nächsten Zeitschritt (Jahr) in der Klasse der Jungtiere verbleiben, und des Anteils der Geburtenrate der Jungtiere. Wie man feststellt, bekommen nicht in jeder Region die Jungtiere Nachfahren. Das zweite Element der ersten Zeile gibt die Geburtenrate der Alttiere an. Das erste Matrixelement der zweiten Zeile enthält die Übertrittsrate von den Jungtieren zu den Alttieren; das zweite Element gibt die Verbleiberate / Überlebensrate der Alttiere an. *Hinweis: Für die Begründung ist die volle Punktzahl auch zu geben, wenn ein Prüfling die Zuordnung nur anhand eines in beiden Matrizen unterschiedlichen Elementes begründet.*	10	5	
b)	Berechnung der Populationsvektoren: $\vec{p}_{t+1}=K\cdot\vec{p}_t$ bzw. $\vec{p}_{t+1}=L\cdot\vec{p}_t$ mit $t\in\mathbb{N}$. Für Gebiet A: $\vec{p}_1=L\cdot\vec{p}_0=\begin{pmatrix}0,9 & 0,3\\0,1 & 0,7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1000\\2000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1500\\1500\end{pmatrix}$ $\vec{p}_2=L\cdot\vec{p}_1=\begin{pmatrix}0,9 & 0,3\\0,1 & 0,7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1500\\1500\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1800\\1200\end{pmatrix}$ Für Gebiet B ergibt die analoge Rechnung: $\vec{p}_1=\begin{pmatrix}1300\\1800\end{pmatrix}$ und $\vec{p}_2=\begin{pmatrix}1530\\1780\end{pmatrix}$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	 II	 III

Berechnung der Populationen nach 20 Jahren:

$$\vec{p}_{20} = K^{20} \cdot \vec{p}_0 = K^{10} \cdot K^{10} \cdot \vec{p}_0 = \left(K^{10}\right)^2 \cdot \vec{p}_0 \quad \text{bzw.} \quad \vec{p}_{20} = L^{20} \cdot \vec{p}_0 .$$

<u>Für Gebiet A:</u>

$$\vec{p}_{10} = L^{10} \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0,752 & 0,745 \\ 0,248 & 0,255 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 2000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2242 \\ 758 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_{20} = L^{10} \cdot \vec{p}_{10} = \begin{pmatrix} 2251 \\ 749 \end{pmatrix}$$

Für Gebiet B ergibt die analoge Rechnung $\vec{p}_{10} = \begin{pmatrix} 3457 \\ 3459 \end{pmatrix}$ und $\vec{p}_{20} = \begin{pmatrix} 8966 \\ 8969 \end{pmatrix}$.

		I	II	III
		10	10	

c)

Zeit in Jahren	Anzahl der Geckos im Gebiet A	Anzahl der Geckos im Gebiet B	Anzahl der Geckos im Gebiet C
0	3000	3000	6000
1	3000	3100	5000
2	3000	3310	4220
10	3000	6916	1199
20	3000	17935	254

Die Gesamtzahl der Geckos im Gebiet der Region A bleibt konstant bei 3000.
Die Gesamtzahl der Geckos im Gebiet der Region B scheint exponentiell zu wachsen.
Die Gesamtzahl der Geckos im Gebiet der Region C scheint exponentiell zu fallen. Die Geckos werden aussterben.

<u>Funktionsgleichungen:</u>

Gebiet A: $f(t) = 3000 \cdot 1^t = 3000$

Gebiet B: $f(t) = 3000 \cdot 1,0935^t$

Gebiet C: $f(t) = 6000 \cdot 0,8538^t$

Zur Ermittlung des Zeitpunktes gleicher Geckozahlen in B und C werden die Funktionsterme gleichgesetzt:

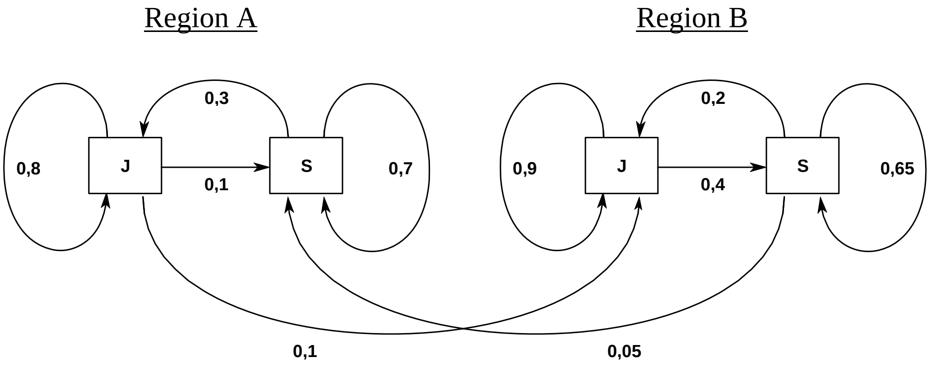
$$3000 \cdot 1,0935^t = 6000 \cdot 0,8538^t$$

$$t = \frac{\log 2}{\log 1,0935 - \log 0,8538}$$

$$t = 2,801...$$

Im Laufe des dritten Jahres nach Beobachtungsbeginn werden die Zahlen übereinstimmen.

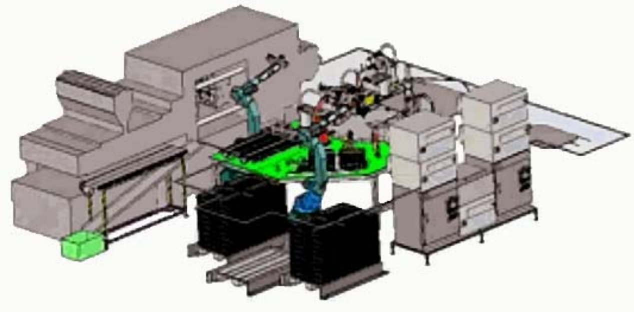
		I	II	III
			20	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	Modifizierter Graph:  Modifizierte Matrix: $P=\begin{pmatrix} L_{\text{mod}} & K_{neu} \\ L_{neu} & K_{\text{mod}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,7 & 0 & 0,05 \\ 0,1 & 0 & 0,9 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,65 \end{pmatrix}$ Die Matrix P besteht aus den modifizierten Matrizen L_{mod} und K_{mod} und den Matrizen K_{neu} und L_{neu}. Diese beiden modifizierten Matrizen unterscheiden sich von L und K jeweils in genau einem Matrixelement. Die Matrix L_{neu} enthält den Anteil der übersiedelnden Jungtiere; K_{neu} enthält den Anteil der auswandernden Alttiere.		10	10
e)	Bestätigung: $L=T\cdot D\cdot T^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -0,25 & 0,75 \\ 0,25 & 0,25 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$ Somit ist die Beziehung bestätigt worden. Potenzen der Matrix L: Potenzen der Matrix L lassen sich besonders leicht berechnen, da man lediglich D^n bilden und dann die Multiplikation von links mit T und von rechts mit der Inversen von T durchführen muss. Die Potenz einer Diagonalmatrix erhält man durch Potenzieren der Diagonalelemente. Begründung: Es gilt: $L^n=T\cdot D^n\cdot T^{-1}$. Etwas ausführlicher: $L^n=\left(T\cdot D\cdot T^{-1}\right)^n=T\cdot D\cdot T^{-1}\cdot T\cdot D\cdot T^{-1}\cdot\ldots\cdot T\cdot D\cdot T^{-1}=$ $=T\cdot D\cdot(T^{-1}\cdot T)\cdot D\cdot(T^{-1}\cdot\ldots\cdot T)\cdot D\cdot T^{-1}=T\cdot D\cdot E\cdot D\cdot E\cdot\ldots\cdot E\cdot D\cdot T^{-1}$ $=T\cdot D\cdot D\cdot\ldots\cdot D\cdot T^{-1}=T\cdot D^n\cdot T^{-1}$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Vorteil: Es lassen sich schnell die für die Untersuchung der Langzeitentwicklung der Geckos so wichtigen Potenzen der Populationsmatrizen bilden. Für die Berechnung reicht ein einfacher Taschenrechner mit den Grundrechenarten vollkommen aus. Für $n = 10$: $L^{10} = T \cdot D^{10} \cdot T^{-1}$ $= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,6^{10} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,25 & 0,75 \\ 0,25 & 0,25 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} -0,6^{10} & 3 \\ 0,6^{10} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,25 & 0,75 \\ 0,25 & 0,25 \end{pmatrix}$ $\approx \begin{pmatrix} 0,752 & 0,745 \\ 0,248 & 0,255 \end{pmatrix}.$	5	10	10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

STOCHASTIK 1

III.1 Qualitätssicherung



Eine Firma fertigt elektronische Bauteile als Massenware. Von den Bauteilen sind durchschnittlich 14 % defekt. (Die Defekte entstehen stochastisch unabhängig voneinander.)

a) Der laufenden Produktion werden Bauteile entnommen.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter sechs entnommenen Bauteilen höchstens eines defekt ist.
- Berechnen Sie, wie viele Bauteile man der laufenden Produktion entnehmen muss, damit die Wahrscheinlichkeit, auf mindestens ein defektes Bauteil zu stoßen, größer als 99 % ist. **(15P)**

b) Ein defektes Bauteil wird von einem firmeneigenen Prüfgerät mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % als defekt erkannt. Das Prüfgerät zeigt allerdings auch einwandfreie Bauteile fälschlicherweise mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 % als defekt an.

- Bestätigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der das Prüfgerät eine richtige Entscheidung trifft, größer als 97 % ist.
- Berechnen Sie auch die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil tatsächlich defekt ist, wenn das Prüfgerät einen Defekt anzeigt. Interpretieren Sie das Ergebnis. **(15P)**

c) Die Firma denkt über die Anschaffung eines neuen, verbesserten Prüfgerätes nach, das mit Sicherheit korrekte Entscheidungen anzeigt. Um entscheiden zu können, ob sich die Anschaffung lohnt, muss untersucht werden, ob sich mit dem neuen Gerät ein Prüfverfahren einrichten lässt, das die Anzahl der Prüfungen vermindert.
Die Firma überlegt, das Prüfverfahren wie folgt zu ändern:
Zehn Bauteile werden hintereinandergeschaltet und gleichzeitig in einem Durchgang geprüft. Nur dann, wenn bei dieser Gruppenuntersuchung eine Defektanzeige erfolgt (mindestens ein Bauteil ist dann defekt), wird zusätzlich jedes Bauteil einer Einzelprüfung unterzogen.

- Begründen Sie, dass nach diesem Verfahren pro Durchgang entweder genau 1 Prüfung oder genau 11 Prüfungen erforderlich sind.
- Ermitteln Sie, wie viele Prüfungen im Durchschnitt für die Überprüfung von 10 Bauteilen bei diesem Verfahren zu erwarten sind.
  Zur Kontrolle: $E = 8{,}7870$. **(10P)**

d) Die Kostenprüfer sind enttäuscht, dass das neue Verfahren lediglich eine relative Einsparung R von etwa 12 % gegenüber dem ursprünglichen Verfahren mit den einzelnen Prüfungen bedeutet. Die Frage taucht auf, ob sich diese Einsparung verbessern lässt, wenn man in einem Durchgang eine andere Anzahl als 10 Bauteile hintereinanderschaltet.

- Bestimmen Sie die Erwartungswerte $R(n)$ der relativen Einsparungen auch für Hintereinanderschaltungen von $n = 7$ und $n = 13$ Bauteilen.

- Weisen Sie für eine allgemeine Länge n der Hintereinanderschaltung die Gültigkeit der Formel $R(n)=\frac{n\cdot 0{,}86^n-1}{n}=0{,}86^n-\frac{1}{n}$ $(n\neq 1)$ für die relative Einsparung $R(n)$ nach. Begründen Sie die Einschränkung $n\neq 1$ und bestimmen Sie für $n<8$ die Anzahl n mit der größten Einsparung. **(20P)**

e) Die sorgfältig geprüften Bauteile sollten natürlich auch fehlerfrei bei den Kunden der Firma ankommen. Eventuelle Schäden während des Versands können jedoch nicht ganz ausgeschlossen werden. Laut Angaben der beauftragten Versandfirma beträgt jedoch die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil beim Versand beschädigt wird, nur 0,3%.

Falls bei einer Lieferung von 1000 Bauteilen mehr als 7 Bauteile durch den Versand Schäden erleiden, muss die Versandfirma eine hohe Entschädigungssumme von 1000 € zahlen.
Für eine Kalkulation des finanziellen Risikos ist es für die Versandfirma natürlich von großem Interesse, die Wahrscheinlichkeit eines Entschädigungsfalles zu kennen.

Die Anzahl der beschädigten Bauteile soll als binomialverteilt angesehen werden.

Für die Berechnung solcher Wahrscheinlichkeiten existieren Näherungsverfahren.

Begründen Sie mithilfe der Laplace-Bedingung, dass die Näherungsformel von Moivre/Laplace nicht geeignet ist. Für kleine Werte von p ist die Poisson-Verteilung für Näherungswerte besser geeignet. Die Näherungsformel von Poisson lautet:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}\approx\frac{\mu^k}{k!}\cdot e^{-\mu}\quad\text{mit}\quad \mu=n\cdot p$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Poisson-Näherung die Wahrscheinlichkeit eines Entschädigungsfalles. **(20P)**

Zur Kontrolle: Der mit der Binomialverteilung berechnete Wert beträgt gerundet $P\approx 0{,}0118$.

f) Das Versandunternehmen setzt 1040 Lieferungen mit je 1000 Bauteilen pro Jahr an. Ermitteln Sie die Höhe der durchschnittlichen Entschädigungszahlungen im Jahr. **(10P)**

g) Die Abnehmerfirma denkt über ihre Nachteile beim Modell „7+“ (pauschale Entschädigungszahlungen erst bei mehr als 7 defekten Bauteilen pro Lieferung) nach.

Begründen Sie, warum Modell „7+“ für die Abnehmerfirma tatsächlich Nachteile im Vergleich zu einem Entschädigungsverfahren aufweisen kann, das Entschädigungszahlungen für jedes einzelne defekte Bauteil vorsieht.

Ermitteln Sie den Entschädigungswert pro Bauteil so, dass der Erwartungswert der Zahlungen in einem Jahr dem in (f) ermittelten Erwartungswert des Modells 7+ entspricht. **(10P)**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	• Es handelt sich um eine Binomialverteilung (ein Bauteil ist entweder defekt oder nicht defekt). Mit $p=0{,}14$ und $q=1-p=0{,}86$ ergibt sich nach der Formel von Bernoulli $P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)$ $=\binom{6}{0}\cdot 0{,}14^0\cdot 0{,}86^6+\binom{6}{1}\cdot 0{,}14^1\cdot 0{,}86^5\approx 0{,}7997\approx 80\,\%.$ • Wenn n der Umfang der Stichprobe ist, so gilt $P(X\ge 1)>0{,}99.$ $\Leftrightarrow 1-P(X=0)>0{,}99$ $\Leftrightarrow 1-\binom{n}{0}\cdot 0{,}14^0\cdot 0{,}86^n>0{,}99$ $\Leftrightarrow 1-0{,}86^n>0{,}99$ $\Leftrightarrow 0{,}86^n<0{,}01$ $\Leftrightarrow n\cdot\log 0{,}86<\log 0{,}01$ $\Leftrightarrow n>\frac{\log 0{,}01}{\log 0{,}86}$ $\Rightarrow n>30{,}533...$ Man muss mindestens 31 Bauteile entnehmen.	15		
b)	Es bedeutet A: ein Bauteil ist defekt. Es bedeutet B: das Prüfgerät zeigt einen Defekt an. Die Situation kann in einem Baumdiagramm veranschaulicht werden: $P(''\text{Richtige Entscheidung}'')=P(A)\cdot P(B\mid A)+P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}\mid\overline{A})$ $=0{,}14\cdot 0{,}95+0{,}86\cdot 0{,}98$ $\approx 0{,}9758.$ Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also größer als 97 %. (q.e.d.). Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A\mid B)$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Nach dem Satz von Bayes gilt: $P(A\mid B)=\dfrac{P(A)\cdot P(B\mid A)}{P(A)\cdot P(B\mid A)+P(\overline{A})\cdot P(B\mid \overline{A})}$ $=\dfrac{0{,}14\cdot 0{,}95}{0{,}14\cdot 0{,}95+0{,}86\cdot 0{,}02}\approx 0{,}8855$. Das Ergebnis ist nur begrenzt zufriedenstellend, da bei über 11 % der Fälle, in denen das Gerät ein defektes Gerät anzeigt, dies ein „Fehlalarm“ ist.	10	5	
c)	Wenn die Gruppenuntersuchung von 10 Bauteilen keinen Defekt anzeigt, sind diese Bauteile alle in Ordnung, und es bleibt bei dieser einen Untersuchung. Die entsprechende Wahrscheinlichkeit beträgt $P(1)=0{,}86^{10}$. Wenn bei der Gruppenuntersuchung eine Defektanzeige erfolgt, ist jedes Bauteil zu prüfen. In diesem Fall finden 11 Prüfungen statt. Die entsprechende Wahrscheinlichkeit beträgt dann $1-0{,}86^{10}$. Für den Erwartungswert ergibt sich für $n=10$: $E(10)=1\cdot 0{,}86^{10}+11\cdot\left(1-0{,}86^{10}\right)=11-10\cdot 0{,}86^{10}=8{,}7870$.		10	
d)	Für die Erwartungswerte der Anzahl der erforderlichen Prüfungen ergeben sich folgende Werte: $n=7$: $E(7)=1\cdot 0{,}86^{7}+8\cdot\left(1-0{,}86^{7}\right)=8-7\cdot 0{,}86^{7}=5{,}56$ $n=13$: $E(13)=1\cdot 0{,}86^{13}+14\cdot\left(1-0{,}86^{13}\right)=14-13\cdot 0{,}8613^{13}=12{,}13$. Daraus ergeben sich die zu erwartenden relativen Einsparungen $R(n)$ pro Gerät $n=7$: $R(7)=\dfrac{7-8+7\cdot 0{,}86^{7}}{7}=\dfrac{7\cdot 0{,}86^{7}-1}{7}\approx 0{,}2051=20{,}51\%$. $n=13$: $R(13)=\dfrac{13-14+13\cdot 0{,}8613^{13}}{13}=\dfrac{13\cdot 0{,}8613^{13}-1}{13}\approx 0{,}0638=6{,}38\%$. Nähert sich n dem Wert 1, müssen die Einsparungen gegen Null gehen. Für ein allgemeines n gilt für die zu erwartende Anzahl der Prüfungen $E(n)$: $E(n)=0{,}86^{n}+(n+1)\cdot\left(1-0{,}86^{n}\right)$ $=0{,}86^{n}+n+1-(n+1)\cdot 0{,}86^{n}$ $=n+1-n\cdot 0{,}86^{n}$.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>
Somit ergibt sich:

$$R(n)=\frac{n-E(n)}{n}=\frac{n-\left(n+1-n\cdot 0{,}86^n\right)}{n}=\frac{-1+n\cdot 0{,}86^n}{n}=0{,}86^n-\frac{1}{n}.$$

Für $n=1$ liegt ein Sonderfall vor: Gesamtprüfung und Einzelprüfung fallen zusammen.

Die Auswertung der Funktion R in einer Tabelle liefert:

<table>
<tr><td>n</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>Einsparung [%]</td><td>0</td><td>24</td><td>30,3</td><td>29,7</td><td>27</td><td>24</td><td>21</td></tr>
</table>

Man erkennt, dass das Optimum bei $n = 3$ liegt.

Die Nullstellen der Ableitung liegen bei etwa 3,3 und 34,36. Daraus folgt, dass die Funktion rechts von n= 4 nicht streng monoton fällt.
</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>
Bei den verlangten Rechnungen wird mit den folgenden Parametern gearbeitet:

$n=1000;\ \ p=0{,}003$

$E(x)=\mu=n\cdot p=3$

$\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}=\sqrt{3\cdot 0{,}997}=1{,}7295.$

Die Näherungsformel von Moivre/Laplace ist erst brauchbar, wenn $\sigma>3$ (Laplace-Bedingung).

Die Näherungsformel von Poisson liefert dagegen:

$P(X>7)=1-P(X\le 7)=1-0{,}9881=0{,}0119=1{,}19\,\%.$

Bei der Approximation nach der Näherungsformel von Poisson sind die Voraussetzungen für eine sehr gute Näherung gegeben:

$n=1000$ ist sehr groß und $p=0{,}003$ sehr klein.
</td><td></td><td>15</td><td>5</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>
Mit den Parametern $n=1040$, $p=0{,}0118$ und 1000 € Entschädigung pro Lieferung ergibt sich folgender Erwartungswert:

$E=1040\cdot 0{,}0118\cdot 1000\text{ €}=12272\text{ €}.$
</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>g)</td><td>Das Entschädigungsmodell „7+“ weist gegenüber dem Einzel-Entschädigungsverfahren folgende Nachteile auf:
1. Für weniger als 8 beschädigte Bauteile gibt es gar keine Entschädigung.
2. Von einer bestimmten Anzahl beschädigter Bauteile an wird die Pauschalzahlung geringer ausfallen als die Summe möglicher einzelner Entschädigungen.
Sei E_1 die erwartete Entschädigungszahlung pro Lieferung. Dann gilt:
$E_1 = 0,0118 \cdot 1000\ € = 11,80 €$.
Pro Lieferung werden andererseits $n_1 = 1000 \cdot 0,003 = 3$ beschädigte Bauteile erwartet.
Daraus ergibt sich eine Entschädigung von $\frac{11,8}{3}\ € \approx 3,93\ €$ pro beschädigtem Bauteil.</td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>50</td><td>25</td></tr>
</table>

STOCHASTIK 2

III.2 Wetter auf den Färöer-Inseln

Im Nordatlantik liegt die Inselgruppe der Färöer-Inseln. Aufgrund ihrer geografischen Position (einerseits noch im Golfstrom, andererseits mitten in der Zugstraße der subarktischen Tiefdruckgebiete) sind die Inseln für ihr ständig wechselndes Wetter bekannt. „Jedes Wetter an einem Tag“, könnte ein touristischer Werbespruch sein, wenn dies denn für Touristen attraktiv wäre; die Fischer auf der Insel sprechen gar davon, dass sich das Wetter vier Mal am Tag ändern würde.

An der Nordspitze der Hauptinsel Streymoy befindet sich auf einem Felsen bei Tjornuvik eine Wetterstation. Unter anderem wird hier die *Veränderlichkeit* des Wetters durch die Angabe der *Änderungswahrscheinlichkeit* $P_{\text{Änd}}$ bestimmt.

Dazu wird der Tag in vier Zeitabschnitte à 6 Stunden geteilt (diese Abschnitte heißen Perioden); eine Periode heißt „trocken“, wenn während dieser Zeit höchstens 1 mm Niederschlag fällt; die Periode heißt „regnerisch“, wenn mehr als 1 mm Niederschlag fällt. Die *Änderungswahrscheinlichkeit* $P_{\text{Änd}}$ gibt nun an, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich das Wetter von einer Periode zur nächsten zwischen den beiden Typen ändert.

Langfristige Messungen ergaben $P_{\text{Änd}} = 0{,}38$.

a) Bestätigen Sie, dass man nach diesen Angaben eine zweitägige Wetterbeobachtung als siebenstufiges Bernoulli-Experiment mit $p = P_{Änd}$ betrachten könnte. **(5P)**

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

- Das Wetter bleibt für einen ganzen Tag gleich.
- Nach einer trockenen Periode bleibt es zwei weitere Perioden trocken.
- Während eines Tages ändert sich das Wetter von jeder Periode zur nächsten.
- Nachdem ab Mitternacht die ersten sechs Stunden regnerisch gewesen sind, kann man aber den Tag über – also während der nächsten beiden Perioden – auf den Regenschirm verzichten. **(15P)**

c) Jetzt geht es um die Prognosefähigkeit des bisherigen Modells.

- Nehmen wir an, die jetzige Periode sei „regnerisch“. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dann die Periode 18 Stunden später ebenfalls „regnerisch“ sein wird.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für „regnerisch“ in der Periode 18 Stunden später, wenn die jetzige Periode „trocken“ ist.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Periode 24 Stunden später
  – vom gleichen Typ
  – vom anderen Typ
  sein wird wie die jetzige. **(15P)**

d) - Begründen Sie, dass der folgende Funktionsterm *k(n)* angibt, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass sich das Wetter in Bezug auf die beiden Eigenschaften „trocken“ oder „regnerisch“ nach *n* Übergängen nicht geändert haben wird:

$$k(n)=\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2i}\cdot P_{\ddot{A}nd}{}^{2i}\cdot\left(1-P_{\ddot{A}nd}\right)^{(n-2i)}$$

Hinweis: Die eckige Klammer $\lfloor ... \rfloor$ bedeutet Abrunden auf die nächste natürliche Zahl.

- Erstellen Sie eine Wertetabelle dieser Funktion mit dem gegebenen Wert von $P_{\text{Änd}}$ für n = 1, 2, 3, 4, 5, 6.

- Interpretieren Sie die bisherigen Ergebnisse in Hinblick auf mögliche Wetterprognosen in Tjornuvik. **(20P)**

Die Beobachtungen in Tjornuvik ergaben außerdem, dass 35 % der Perioden „trocken“ waren und 65 % „regnerisch“. Es soll jetzt untersucht werden, welche Änderungswahrscheinlichkeit sich aus **diesen Zahlen** ergibt, wenn man eine stochastische Unabhängigkeit von „trockenen“ und „regnerischen“ Perioden annimmt. Wir nennen diese Änderungswahrscheinlichkeit die *unabhängige Änderungswahrscheinlichkeit* $P_{\text{Änd, unabh.}}$.

e) Zeigen Sie, dass diese *unabhängige Änderungswahrscheinlichkeit* $P_{\text{Änd, unabh.}}$ bei den ermittelten Wahrscheinlichkeiten p_t = 0,35 für „trockenes“ Wetter und p_r = 0,65 für „regnerisches“ Wetter den Wert $P_{\ddot{A}nd,unabh.}=0,455$ aufweist.

Interpretieren Sie dieses Ergebnis im Vergleich mit dem ermittelten $P_{\text{Änd}}$ = 0,38. **(20P)**

Im Folgenden gehen wir davon aus, dass die Änderungsrate für das Wetter **nicht** unabhängig davon ist, welches Wetter gerade herrscht. Wir rechnen also mit bedingten Wahrscheinlichkeiten für die Wetteränderung.
Wir nennen die Wahrscheinlichkeit einer Wetteränderung unter der Voraussetzung, dass die gegenwärtige Periode „trocken“ ist, $P(r|t)$, und entsprechend die Wahrscheinlichkeit einer Wetteränderung unter der Voraussetzung, dass die gegenwärtige Periode „regnerisch“ ist, $P(t|r)$.

f) Zeigen Sie, dass aus diesem Ansatz das Gleichungssystem

(1) $0,35\cdot\left(1-P(r\,|\,t)\right)+0,65\cdot P(t\,|\,r)=0,35$ bzw. $0,65\cdot\left(1-P(t\,|\,r)\right)+0,35\cdot P(r\,|\,t)=0,65$

(2) $0,65\cdot P(t\,|\,r)+0,35\cdot P(r\,|\,t)=0,38$

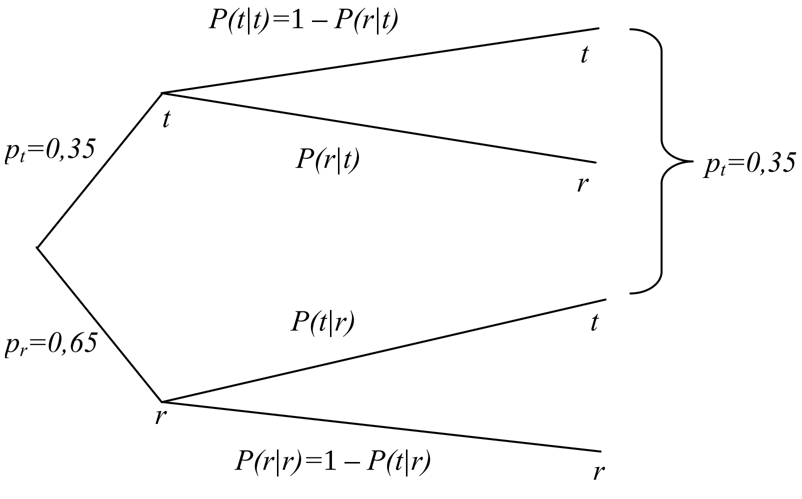
folgt, und bestimmen Sie $P(r|t)$ und $P(t|r)$.

Hinweis: Sie können die Situation durch ein Baumdiagramm darstellen.

Ermitteln Sie, welche Werte sich für $P(r|t)$ und $P(t|r)$ ergäben, wenn in Gleichung (2) nicht der Wert 0,38 (also $P_{\text{Änd}}$), sondern 0,455 (also $P_{\text{Änd, unabh.}}$) eingesetzt wird, und begründen Sie, warum dieses Resultat nicht überraschend ist. **(25P)**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Da zunächst nur die *Änderungswahrscheinlichkeit* $P_{\text{Änd}}$ bekannt und gegeben ist, kann man (anfangs) davon ausgehen, dass an jeder Periodengrenze ein Wechsel mit eben dieser Wahrscheinlichkeit eintritt. Das Wetter hat zwei Zustände, damit gibt es zwei Möglichkeiten an den Periodengrenzen: Das Wetter ändert sich, oder es ändert sich nicht. Zwei Tage Beobachtung bedeuten Beobachtung über acht Perioden und damit über sieben mögliche Wechsel hinweg.	5		
b)	• „Das Wetter bleibt für einen ganzen Tag gleich“ bedeutet: Das Wetter ändert sich an den drei Übergängen zwischen den vier Perioden jeweils nicht. Also $p_1 = (1-0{,}38)^3 \approx 0{,}2383$. • Die Zusatzinformation „Anfangs war es trocken“ ändert die Wechselwahrscheinlichkeit nicht, deswegen ist $p_2 = (1-0{,}38)^2 \approx 0{,}3844$. • Bei drei Periodenübergängen tritt jeweils ein Wechsel ein, also $p_3 = 0{,}38^3 \approx 0{,}0549$. • Der Text legt die Wetterverteilung „regnerisch – trocken – trocken“ nahe. Damit ist die Wahrscheinlichkeit $p_4 = 0{,}38\cdot(1-0{,}38) = 0{,}2356$.	15		
c)	• Zwischen „Jetzt“ und „18 Stunden später“ liegen drei Übergänge. Dass es gerade „regnerisch“ ist, spielt keine Rolle; da insgesamt kein Wechsel eintreten soll, müssen entweder kein oder zwei Übergänge mit Wechseln verbunden sein. Da diese Ereignisse sich ausschließen, ist $p_{c1} = 0{,}62^3 + 3\cdot 0{,}62\cdot 0{,}38^2 \approx 0{,}5069$. • Hier ist nach der Gegenwahrscheinlichkeit gefragt – denn wenn es nicht „regnerisch“ ist, ist es „trocken“. Ebenso möglich: Von den drei Übergängen müssen jetzt einer oder drei mit Wechseln verbunden sein. Also ist $p_{c2} = 0{,}38^3 + 3\cdot 0{,}38\cdot 0{,}62^2 \approx 0{,}4931$. • Analog: Bei gleichem End-Typ und vier Übergängen kann es keinen, zwei oder vier Wechsel geben. Also ergibt sich $p_{c3} = 0{,}62^4 + 6\cdot 0{,}62^2\cdot 0{,}38^2 + 0{,}38^4 \approx 0{,}5017$. Der andere End-Typ tritt dann mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_{c4} = 1 - p_{c3} \approx 0{,}4983$ ein.	5	10	
d)	• Um *k(n)* zu bestimmen, muss eine Teil-Summe der Binomial-Wahrscheinlichkeiten gebildet werden: Der gleiche End-Typ tritt dann auf, wenn eine gerade Anzahl von Wetteränderungen eingetreten ist. Daher sind nur die Summanden mit dem Faktor $P_{\text{Änd}}^{\;2i}$ zu betrachten, also die Summanden $\binom{n}{2i}\cdot P_{\text{Änd}}^{\;2i}\cdot\left(1-P_{\text{Änd}}\right)^{(n-2i)}$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Daher kann der Laufindex *i* nur Werte von 0 bis $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ annehmen. Es ergeben sich folgende Werte: $k(1) = 0,62$ $k(2) = 0,62^2 + 0,38^2 = 0,5288$ $k(3) = p_{c1} \approx 0,5069$ $k(4) = p_{c3} \approx 0,5017$ $k(5) \approx 0,5004$ $k(6) \approx 0,5001$ Eine sinnvolle Prognose über mehr als einen halben Tag ist nicht möglich, da bereits bei drei Übergängen die möglichen Zustände jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 50 % eintreten.		15	5
e)	Grundsätzlich ist die Änderungswahrscheinlichkeit die Wahrscheinlichkeit der beiden Wege, die zum Ereignis „Typ ändert sich“ gehören (also die Periodenfolgen TR und RT). Es gibt vier mögliche Periodenfolgen: TT, RR, RT und TR. Ihre Wahrscheinlichkeiten bei Unabhängigkeit wären $p_{TT} = 0,35^2 = 0,1225,\ p_{RR} = 0,65^2 = 0,4225,\ p_{TR} = p_{RT} = 0,35 \cdot 0,65 = 0,2275$. Damit ist bei Unabhängigkeit $P_{Änd,unabh.} = 0,455$. Da das gemessene $P_{Änd}$ deutlich geringer ist, folgt, dass die Annahme der Unabhängigkeit des Wetterwechsels vom Wetterzustand nicht erfüllt sein kann.		20	
f)	Die Wettersituation wird durch folgendes Baumdiagramm beschrieben:  Hieraus ergeben sich die beiden Formen der Gleichung (1), z.B. aus dem dargestellten Diagramm:			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Die Summenwahrscheinlichkeit der beiden Pfade, die auf „*t*“ enden, ist $p_t = 0{,}35$. Sie ergibt sich als Summe der Wahrscheinlichkeiten auf den Wegen, also (1) $0{,}35 \cdot \left(1 - P(r \mid t)\right) + 0{,}65 \cdot P(t \mid r) = 0{,}35$. Die Gleichung (2) sagt, dass $P_{\text{Änd}}$ das gewichtete Mittel der beiden bedingten Änderungswahrscheinlichkeiten sein muss. Die Lösung dieses Gleichungssystems (1) $0{,}35 \cdot \left(1 - P(r \mid t)\right) + 0{,}65 \cdot P(t \mid r) = 0{,}35$ (2) $0{,}65 \cdot P(t \mid r) + 0{,}35 \cdot P(r \mid t) = 0{,}38$ ist – z.B. nach Einsetzen – $P(t \mid r) \approx 0{,}2923,\ P(r \mid t) \approx 0{,}5486$. Mit der Änderung von (2) ergibt sich $P(t \mid r) = 0{,}35,\ P(r \mid t) = 0{,}65$. Dieses Ergebnis kann durch Lösung des entsprechenden Gleichungssystems erzielt werden – oder z.B. aus der Überlegung, dass bei vorausgesetzter Unabhängigkeit $P(r \mid t) = p_r$ und $P(t \mid r) = p_t$ gilt. *Das ist die Überlegung aus Aufgabenteil e).*		10	15
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20