Analysis 1

I.1 Neubesiedlung von Biotopen

Eine Forschergruppe beobachtet in den Tropen die natürliche Neubesiedlung von Seen bei Überschwemmungen durch bisher in diesen Seen nicht vorhandene Ruderfußkrebse.

Ihre Untersuchungen und theoretische Überlegungen legen nahe, dass für diesen Fall die ***lokale Änderungsrate*** der Krebsdichte im Wasser einer Funktion des Typs

$$f_k(t) = k \cdot \frac{e^t}{(1+e^t)^2},\ k > 0, t \geq 0$$

folgt, d.h. $f_k(t)$ gibt zum Zeitpunkt t (in Monaten) die ***Zuwachsrate*** in Krebsen pro Kubikmeter Wasser pro Monat an, Letzteres näherungsweise, da ganzzahlige Funktionswerte die Ausnahme sind.

Zunächst sollen Sie diese Funktionenschar untersuchen und Ihre Ergebnisse dann im oben geschilderten Sachkontext deuten.

a) • Begründen Sie, dass die Graphen der Funktionenschar f_k keine Nullstellen aufweisen, und zeigen Sie, dass gilt: $f_k(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

• Berechnen Sie die Extrempunkte und bestimmen Sie die Wendepunkte von f_k im oben angegebenen Definitionsbereich.

Hinweis: Sie können dabei ohne Nachweis $f_k''(t) = k \cdot \frac{e^t(1-4e^t+e^{2t})}{(1+e^t)^4}$ verwenden.

• Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_{40} im Bereich $0 \leq t \leq 10$ in das Koordinatensystem in der Anlage. **30 P**

b) Interpretieren Sie Ihre in Teilaufgabe a) gewonnenen Erkenntnisse über die Funktionenschar in Bezug auf die Entwicklung der Krebsdichte im Wasser.
Gehen Sie dabei auch auf die langfristige Entwicklung der Dichte ein. **10 P**

c) Bestätigen Sie, dass F_k mit $F_k(t) = \frac{-k}{1+e^t}$ eine Stammfunktion von f_k ist. **5 P**

d) Bei einem der beobachteten Seen ergaben die Untersuchungen durch Kontrollentnahmen, dass drei Monate nach dem ersten Auftauchen der Ruderfußkrebse in diesem See von einer ***Dichte*** von 40 000 Krebsen pro Kubikmeter auszugehen war.

• Ermitteln Sie aus dieser Beobachtung den Parameter k der Modellierung.

Weisen Sie zunächst nach, dass sich für die Dichte ergibt: $D_k(t) = k \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^t}\right)$.

• Bestimmen Sie mit diesem Modell, wie viele Ruderfußkrebse pro Kubikmeter in der ersten Woche (also im ersten Viertelmonat) ungefähr in den See gelangt sind.

• Bestimmen Sie, wie groß mit diesem Modell die Dichte der Krebse „nach langer Zeit“ in dem See sein wird. **20 P**

e) Die Kollegen der Forscher im Heimatland wollen untersuchen, ob diese ***Änderung*** der Dichte an Ruderfußkrebsen auch bei bereits besiedelten Seen zu beobachten ist, deren Besiedlungsdichte durch äußeren Einfluss erhöht wird.

Sie arbeiten daher mit der Stammfunktion D von f_k mit $D(t) = D_{anf} + \int_0^t f_k(z)dz$.

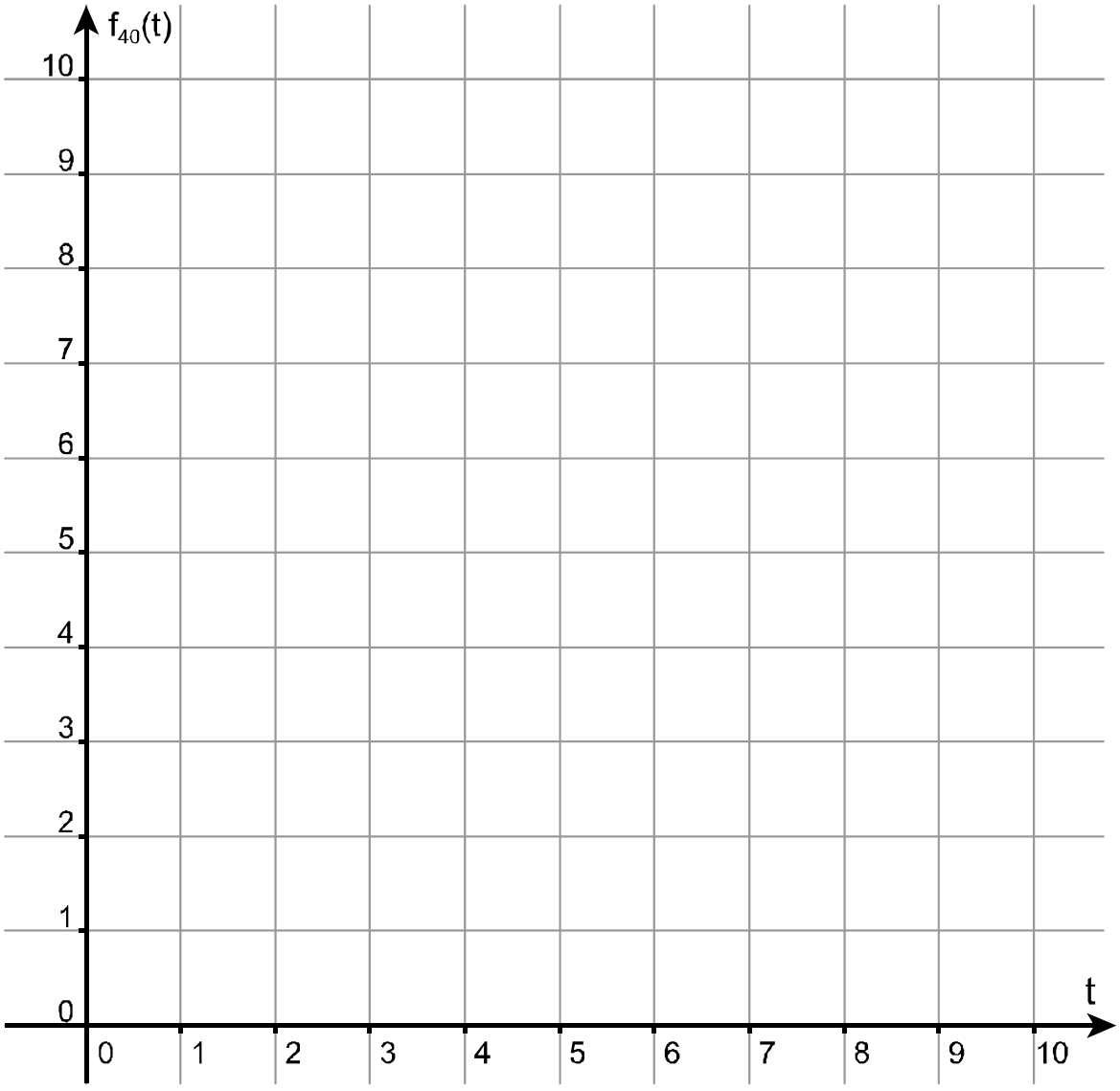
- Beschreiben Sie, was an diesem Modell gegenüber jenem aus Aufgabenteil d) geändert wurde.
- Begründen Sie durch Interpretation von f_k, welche Voraussetzungen im Sachkontext gegeben sein müssen, damit dieses Modell für bereits besiedelte Seen sinnvoll sein kann. **10 P**

f) In einem der Seen beobachteten die Forscher eine Sterblichkeitsrate der Krebse, die nicht mehr dem bisherigen Modell entsprach: Die Sterblichkeitsrate war im Wesentlichen proportional zu der Dichte, die aktuell nach dem alten Modell zu erwarten war. (Dieser Proportionalitätsfaktor möge mit s bezeichnet werden.)

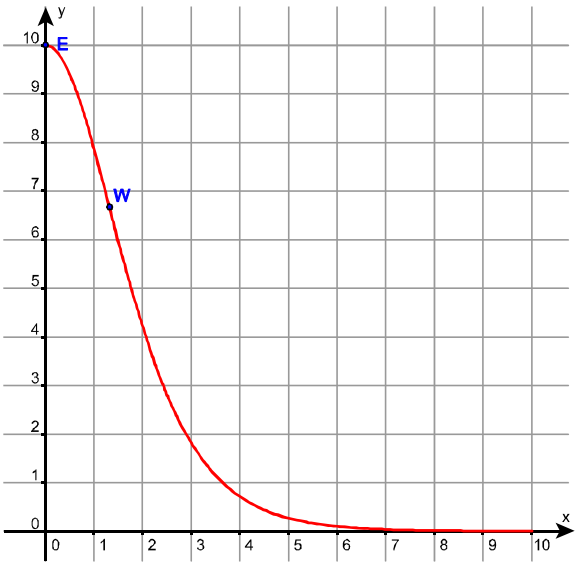
- Weisen Sie nach, dass die Änderungsrate nun durch die Funktion
$$f^*_{k;s}(t) = k \cdot \left(\frac{e^t}{(1+e^t)^2} - s \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^t} \right) \right)$$
beschrieben werden kann.

- Begründen Sie für $s = 0{,}04$, dass die Dichte der Ruderfußkrebse in diesem Fall nach etwa 4 Monaten ein Maximum erreicht.
Führen Sie die nötigen Berechnungen exakt oder näherungsweise durch. **25 P**

Anlage zur Aufgabe „Neubesiedlung von Biotopen“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	**Nullstellen, Randverhalten** Die Funktionen haben keine Nullstellen, da der Zähler nie Null wird, allerdings nähern sich die Graphen beliebig der x-Achse (aus dem Positiven): Für $t \to \infty$ gilt: $1+e^t \to e^t \Rightarrow k \cdot \frac{e^t}{(1+e^t)^2} \to k \cdot \frac{1}{e^t}$. Da für $t \to \infty$ $k \cdot \frac{1}{e^t} \to 0$ gilt, ist die x-Achse die Asymptote. Zusammen mit dem ersten Resultat ergibt sich, dass die Funktionswerte aus dem Positiven gegen diese Asymptote gehen. **Extrem- und Wendepunkte** Ableiten liefert $f_k'(t) = k \cdot \frac{e^t(1-e^t)}{(1+e^t)^3}$. Diese Funktion hat eine einzige Nullstelle bei $t = 0$. Für die 2. Ableitung gilt $f_k''(0) = k \cdot \frac{(1-4+1)}{(1+1)^4} < 0$, denn k ist positiv, es handelt sich um ein Maximum *(genauer ein Randmaximum mit waagerechter Tangente, da der Definitionsbereich auf nichtnegative t beschränkt ist).* Da $f_k(0) = k \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{k}{4}$, gilt für das Maximum: $E\,(0 \mid \frac{1}{4}k)$. Auswertung der gegebenen 2. Ableitung führt zur Lösung der quadratischen Gleichung $u^2 - 4u + 1 = 0$ mit $u = e^t$. Diese Gleichung hat im Positiven eine Lösung mit $x_W \approx 1{,}3$. Damit ist gerundet $W\,(1{,}3 \mid 0{,}17 \cdot k)$, denn bedingt durch den Hochpunkt E (Rechtskrümmung) und das Verhalten für $t \to \infty$ (Linkskrümmung) muss sich die Krümmungsrichtung ändern. **Skizze von f_{40}**  	20	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
b)	**Interpretation im Sachkontext** (Vorschlag) Mit $t = 0$ beginnt eine plötzliche, starke Populations- bzw. Dichtezunahme. Die Populationszunahme verringert sich zunächst immer stärker (bis zum Wendepunkt – nach mehr als 5 Wochen), danach verringert sie sich langsamer; die Dichte wächst zwar immer weiter, aber auch in immer kleinerem Maße, bis das Wachstum der Dichte schließlich gegen Null geht. Anfangs kommt eine große Menge an Ruderfußkrebsen hinzu; deren Dichte vermehrt sich kontinuierlich – sei es durch Fortpflanzung, sei es durch weitere Einschwemmung – jedoch geschieht die Dichteerhöhung in immer kleiner werdendem Umfang. Nach einigen Monaten hat sich die Entwicklung der Dichte beruhigt, die Ruderfußkrebs-Dichte bleibt dann annähernd gleich (im Modell).		10	
c)	Die Ableitung von F_k belegt die Aussage: $F_k'(t) = \frac{k \cdot e^t}{(1+e^t)^2} = k \cdot \frac{e^t}{(1+e^t)^2} = f_k(t)$	5		
d)	**Parameter *k* bestimmen** Hier ist zum Ersten die Gesamtpopulationsdichte D als eine Stammfunktion zu f gefragt. Mit der Vorgabe aus c) folgt: $D_k(t) = \int_0^t f_k(z)dz = F_k(t) - F_k(0)$. Da $F_k(t) = k \cdot \frac{-1}{1+e^t}$ und $D_k(0) = 0$, gilt $F_k(0) = \frac{-k}{2}$. Also ist $D_k(t) = k \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^t}\right)$. Damit ist hier die Gleichung $40000 = D_k(3) = k \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^3}\right)$ zu lösen: Da $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^3}\right) = \frac{1+e^3-2}{2+2\cdot e^3} = \frac{e^3-1}{2e^3+2}$, folgt $k = 40000 \cdot \frac{2e^3+2}{e^3-1} \approx 88400$. Das Ergebnis ist $k \approx 88400$. **Dichte nach einer Woche** Die Dichte im ersten Viertelmonat ergibt sich durch $D_{88400}(0,25) = 88400 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^{0,25}}\right)$ zu etwa 5500 Krebsen pro m³. **Dichte nach „langer Zeit“** Für $t \to \infty$ gilt $D_{88400}(t) \to \frac{88400}{2} \approx 44200$, da der zweite Term in der Klammer gegen Null geht.		15	5

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	**Modelländerung** Der Stammfunktion ist eine additive Konstante hinzu gefügt. Sie steht offenbar für die zur Zeit $t = 0$ bereits vorhandene Dichte an Krebsen. **Voraussetzungen** Grundsätzlich setzt dieses Modell eine plötzliche Zunahme im Zeitpunkt $t = 0$ voraus. Das ist auch bei einem bereits besiedelten See denkbar – z. B. auch hier durch eine Einleitung einer weiteren Population von Krebsen durch eine plötzliche Änderung der Strömungsverhältnisse oder auch durch eine durch Menschen verursachte Zufuhr. Ebenso muss allerdings diese Zunahme noch eine Weile anhalten, auch wenn diese dabei immer geringer wird.		10	
f)	**Neue Änderungsrate** Wenn die Sterberate *st(t)* proportional zum Bestand nach dem bisherigen Modell sein soll, so gilt $st(t) = s \cdot B_k(t) = s \cdot k \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^t}\right)$. Da die Sterberate in der Bilanz ein negatives Vorzeichen haben muss, ergibt sich die angegebene Beziehung $f^*_{k;\,s}(t) = k \cdot \left(\frac{e^t}{(1+e^t)^2} - s \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^t}\right)\right)$. Für $s = 0{,}04$ folgt dann $f^*_{k;\,0{,}04}(t) = k \cdot \left(\frac{e^t}{(1+e^t)^2} - 0{,}04 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^t}\right)\right)$. **Maximum der Population** Sinnvoll ist es, diesen Ausdruck zu $f^*_{k;\,0{,}04}(t) = k \cdot \left(\frac{0{,}02 + e^t - 0{,}02 \cdot e^{2t}}{(1+e^t)^2}\right)$ zu vereinfachen. Da $f^*_{k;\,0{,}04}(0) = \frac{k}{4} > 0$ und z.B. $f^*_{k;\,0{,}04}(6) \approx -0{,}0174k < 0$, weist die Änderungsrate in diesem Bereich eine Nullstelle auf und die Population aufgrund des Monotonieverhaltens in ihrer Umgebung ein Maximum. Die Berechnung der Nullstelle führt auf folgende Gleichung: $0{,}02 + e^t - 0{,}02 \cdot e^{2t} = 0$. Über die Substitution $e^t = u$ sowie anschließende Umwandlung in die Normalform einer quadratischen Gleichung erhält man: $u^2 - 50u - 1 = 0$ sowie $u = 25 \pm \sqrt{626}$. Eingesetzt für e^t ergibt sich schließlich $t = 3{,}91...$			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Ein hinreichend genaues Rechnen z. B. mit einem Intervall-Verkleinerungsverfahren liefert ebenfalls in kurzer Zeit das hinreichend genaue Ergebnis: Die Population erreicht also nach etwa vier Monaten ihr Maximum. *Hinweis: Die Ergebnisse in diesem Aufgabenteil gelten unabhängig vom Wert des Parameters a, eine Lösung von d) ist hier also nicht erforderlich.*		10	15
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

ANALYSIS 2

I.2 Zitronenpresse

Eine Zitronenpresse besteht aus der eigentlichen Presse als Deckel und einem Auffanggefäß. Beides wird in der nebenstehenden Abbildung gezeigt.

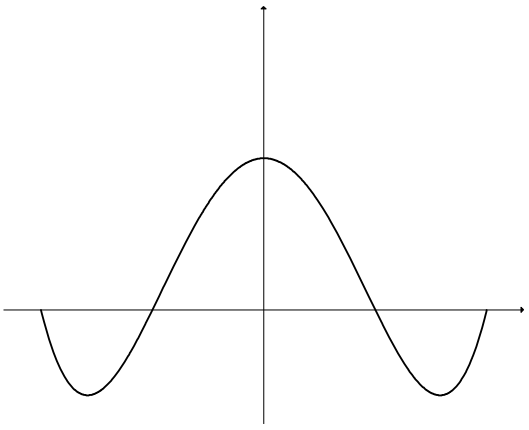
Die Zitronenpresse ist insgesamt 9 cm hoch; Deckel und Auffanggefäß haben einen Durchmesser von 12 cm.

Als Modellgrundlage für die Form des Deckels wird im Folgenden von der Rotation des Graphen einer Funktion $f_{a;b}$ mit

$$f_{a;b}(x) = ax^4 + bx^2 + 4 \text{ (mit } a, b \neq 0)$$

um die y-Achse ausgegangen.

Die Einheit im Koordinatensystem entspricht 1 cm.



a) Bestätigen Sie zunächst, dass jeder Funktionsgraph dieser Funktionenschar einen Extrempunkt auf der y-Achse besitzt, und geben Sie die Koordinaten dieses Punktes an. **5 P**

b) Bestimmen Sie nunmehr im Hinblick auf eine brauchbare Modellierung der Zitronenpresse Bedingungen für a und b, so dass der Extrempunkt auf der y-Achse ein Hochpunkt ist und außerdem genau zwei Tiefpunkte vorliegen. **15 P**

c) Berechnen Sie nun a und b so, dass $x = 3$ und $x = 6$ Nullstellen von $f_{a;b}$ sind; damit soll der Durchmesser der Zitronenpresse sinnvoll berücksichtigt werden. **10 P**

Verwenden Sie für die weiteren Berechnungen:

$$f(x) = \frac{1}{81}x^4 - \frac{5}{9}x^2 + 4\,.$$

d) Ermitteln Sie für diese Funktion f die Extrempunkte und berechnen Sie die Wendepunkte jeweils im Intervall $[-6;6]$.

Zur Kontrolle:

Die Koordinaten der Tiefpunkte lauten: $T_1\left(\frac{3}{2}\sqrt{10}\,\middle|\,-\frac{9}{4}\right)$ bzw. $T_2\left(-\frac{3}{2}\sqrt{10}\,\middle|\,-\frac{9}{4}\right)$. **25 P**

Das Auffanggefäß hat die Form eines Kegelstumpfes. Sein Mantel wird durch die Rotation der Geraden t um die *y*-Achse gebildet; *t* ist dabei die Tangente an den Graphen von *f* im Punkt (6 | 0). Der Boden des Auffanggefäßes liegt bei $y = -5$.

e) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente *t* und den Radius *r* der Bodenfläche. Skizzieren Sie nun den gesamten Längsschnitt der Zitronenpresse im Koordinatensystem der Anlage 1. **10 P**

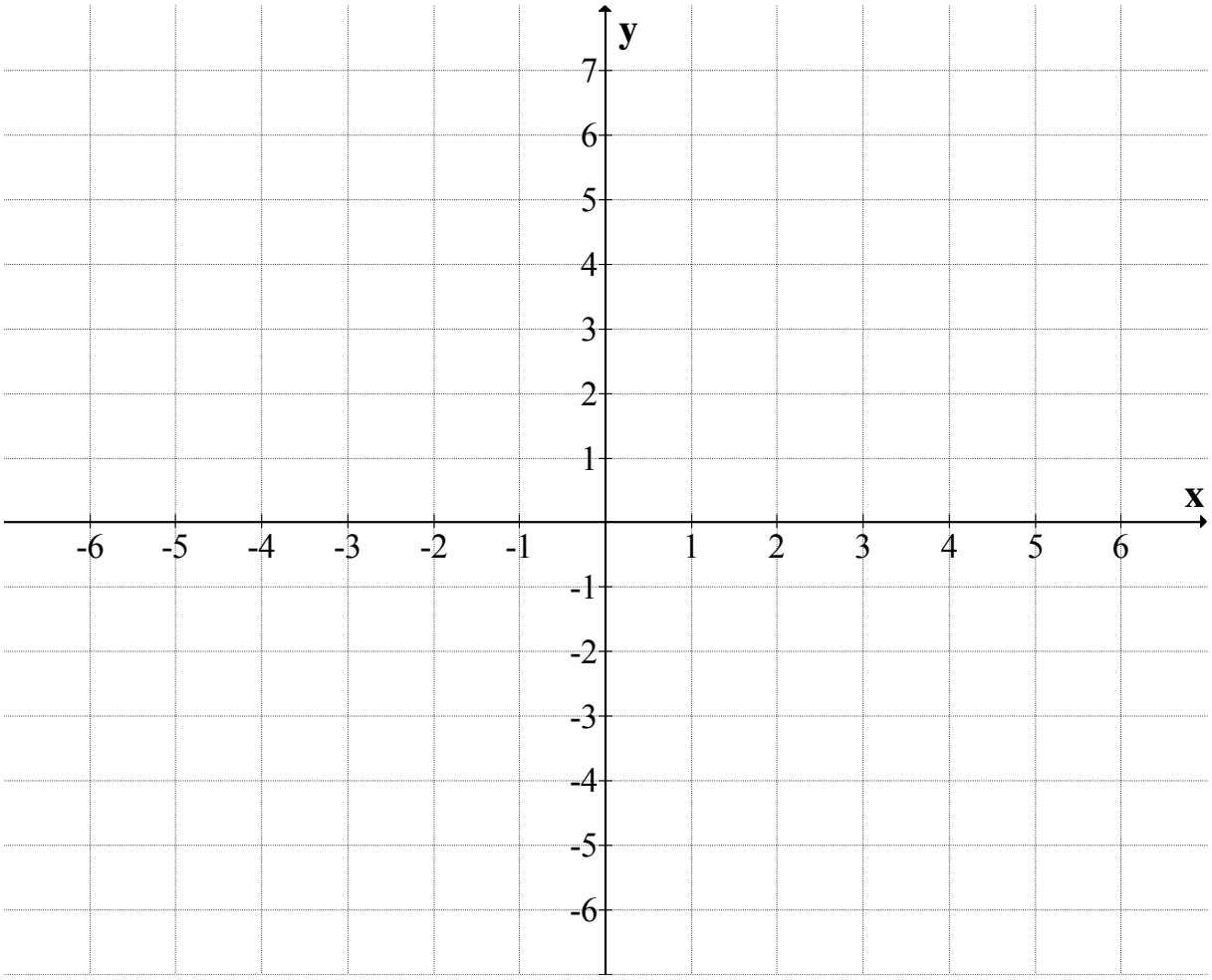
f) Wenn man Zitronen auspresst, so sammelt sich das Ausgepresste anfangs im Rand des Deckels.

- Bestimmen Sie zunächst den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von *f* und der *x*-Achse im Bereich zwischen den beiden positiven Nullstellen.
- Beschreiben Sie ein sinnvolles Näherungsverfahren zur Berechnung des Fassungsvermögens des Randes, bei dem Sie den oben berechneten Flächeninhalt verwenden.
- Bestimmen Sie mit Ihrem Verfahren das Fassungsvermögen. (Der exakte Wert liegt bei $V = 127{,}2\ \text{cm}^3$.) **20 P**

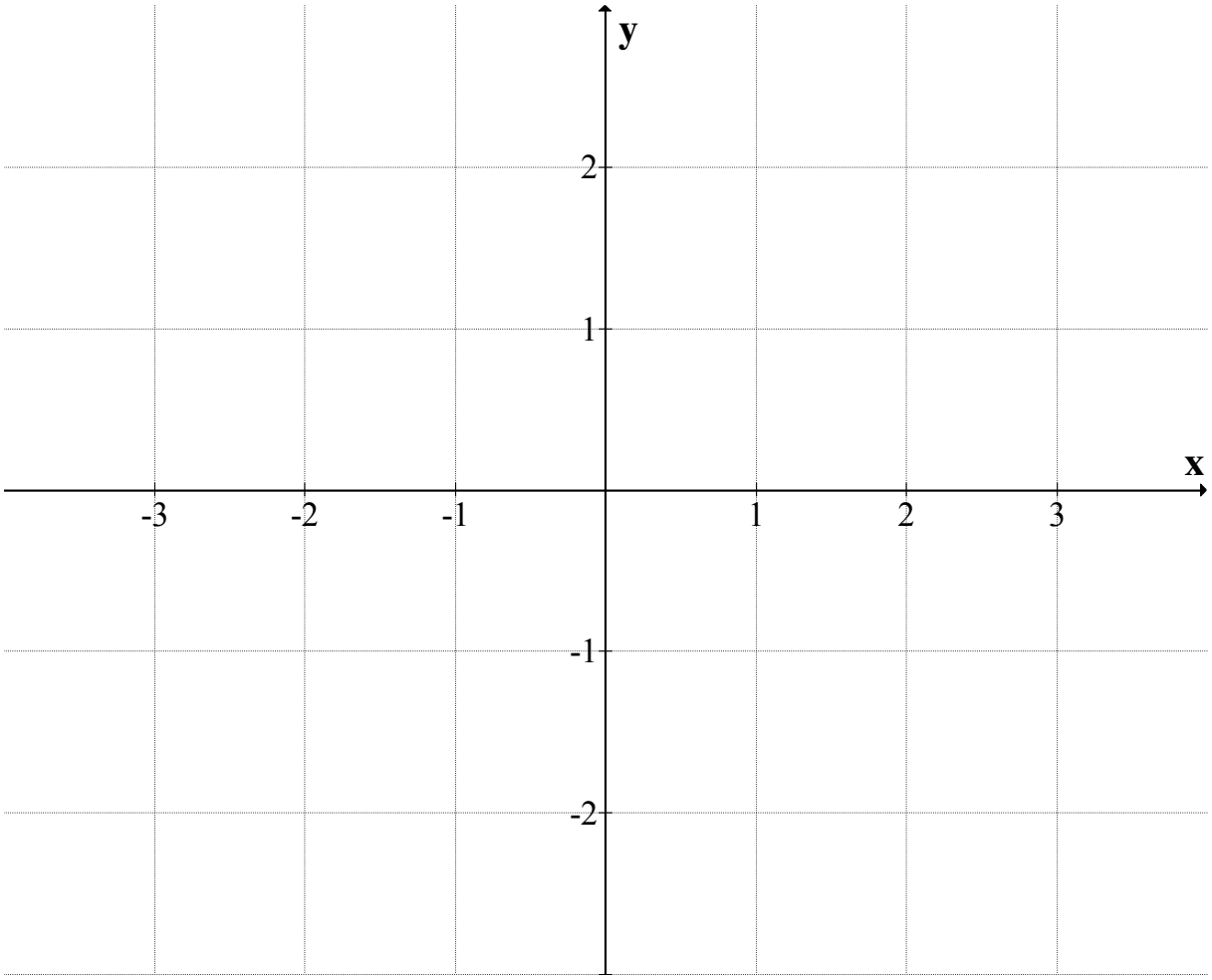
Zitronen haben in etwa die Form so genannter Rotationsellipsoide, d.h. ein Querschnitt ist eine Ellipse, deren oberer Teil hier durch die Funktionsgleichung $g(x) = 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$ bestimmt ist.

g) Skizzieren Sie im Koordinatensystem der Anlage 2 maßstäblich den Querschnitt einer solchen Modell-Zitrone und zeigen Sie mit der Formel $V = \pi \cdot \int_a^b \left(g(x)\right)^2 dx$, dass diese Zitrusfrucht ein Volumen von ca. 50 cm³ besitzt. **15 P**

Anlage 1 zur Aufgabe „Zitronenpresse“, Teil e)



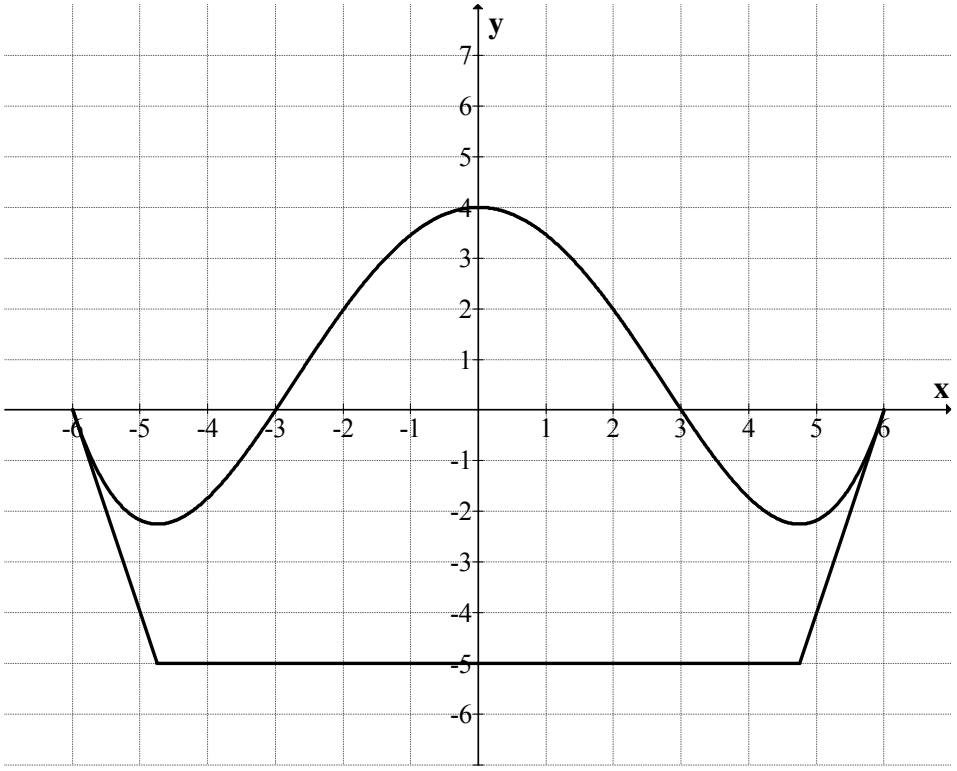
Anlage 2 zur Aufgabe „Zitronenpresse“, Teil g)

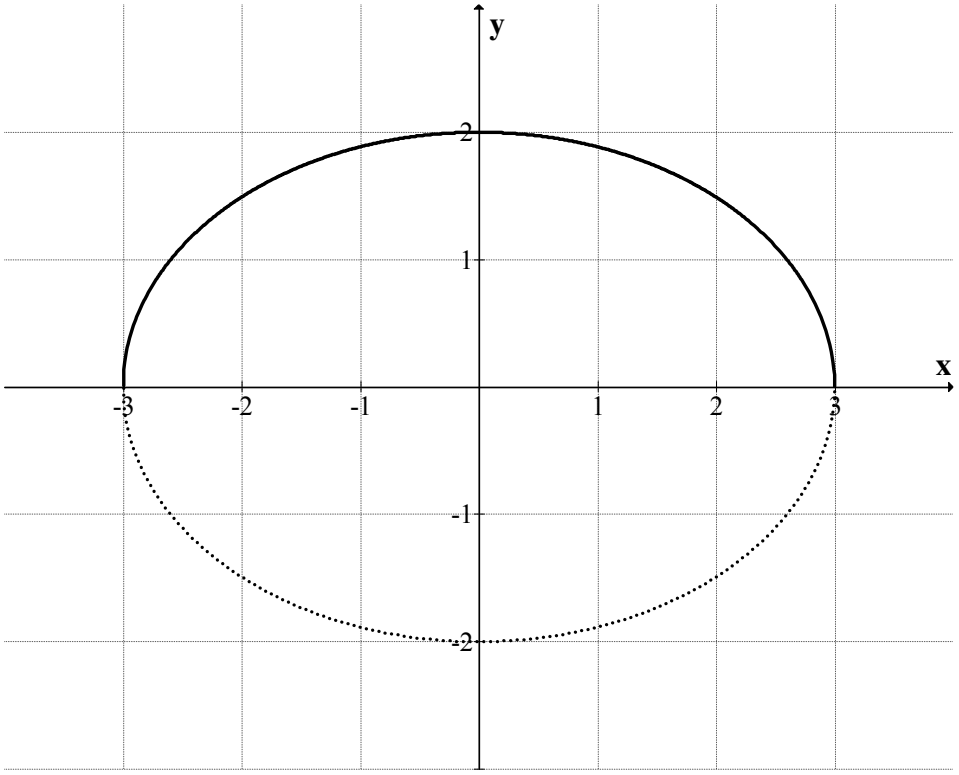


Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Aus der Achsensymmetrie des Graphen folgt, dass jeder Graph auf der y-Achse einen Extrempunkt hat, und zwar (0 | 4). *Diese Teilaufgabe kann auch auf andere Weise oder auch zusammen mit der Teilaufgabe b) gelöst werden.*	5		
b)	Berechnung der Extremstellen: $f'_{a;b}(x) = 4ax^3 + 2bx = x \cdot (4ax^2 + 2b)$ $f''_{a;b}(x) = 12ax^2 + 2b$ $x \cdot (4ax^2 + 2b) = 0$, d.h. eine Extremstelle liegt bei $x = 0$ (siehe a)). Bei $x = 0$ soll ein Hochpunkt vorliegen, d.h. für die 2. Ableitung muss gelten: $f''_{a;b}(0) = 2b < 0$, woraus $b < 0$ folgt. Berechnung weiterer Extremstellen: $4ax^2 + 2b = 0$ $x^2 = -\frac{b}{2a}$ $x_{2,3} = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$. Damit diese Gleichung zwei Lösungen hat und damit zwei weitere Extremstellen existieren, müssen a und b unterschiedliche Vorzeichen haben. Da $b < 0$, muss $a > 0$ gelten. Nachweis, dass es sich um Tiefpunkte handelt: $f''_{a;b}\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right) = 12a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + 2b = -4b > 0$, da $b < 0$. Zusammenfassung: Die Bedingungen lauten: $a > 0$ und $b < 0$.		15	
c)	Die beiden Bedingungen liefern das folgende Gleichungssystem: $f(3) = 0$: $81a + 9b + 4 = 0$ $f(6) = 0$: $1296a + 36b + 4 = 0$. Multiplikation der ersten Gleichung mit –4 und anschließende Addition liefert $972a - 12 = 0$ und damit $a = \frac{1}{81}$. Durch Einsetzen von a in die erste Gleichung erhält man: $9b + 5 = 0$ und schließlich $b = -\frac{5}{9}$. Damit erhält man für die gesuchte Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{1}{81}x^4 - \frac{5}{9}x^2 + 4$.	10		

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Extrempunkte: $f'(x)=\frac{4}{81}x^3-\frac{10}{9}x=0$. Daraus folgt $\frac{1}{81}x\cdot\left(4x^2-90\right)=0$. $x_1=0$ ist Lösung der Gleichung (siehe a) und b)). Weiterhin gilt $4x^2-90=0$ und damit $x_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{90}{4}}=\pm\frac{3}{2}\sqrt{10}$. Dass 0 Maximalstelle ist, ist bereits bekannt. $f''(x)=\frac{4}{27}x^2-\frac{10}{9}$ und danach $f''\left(\pm\frac{3}{2}\sqrt{10}\right)=\frac{20}{9}>0$, also handelt es sich bei $x_{2,3}=\pm\frac{3}{2}\sqrt{10}$ um Minimalstellen. $f\left(\pm\frac{3}{2}\sqrt{10}\right)=-\frac{9}{4}$. Eine andere Variante der Berechnung der weiteren Extremstellen ergibt sich über die in a) festgestellte Beziehung $x_{2,3}=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$. Setzt man die Werte für *a* und *b* ein, erhält man: $x_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{5}{9}\cdot\frac{81}{2}}=\pm\sqrt{\frac{45}{2}}=\pm\sqrt{\frac{90}{4}}=\pm\frac{3}{2}\sqrt{10}$. Damit sind $T_1\left(\frac{3}{2}\sqrt{10}\middle\vert-\frac{9}{4}\right)$ und $T_2\left(-\frac{3}{2}\sqrt{10}\middle\vert-\frac{9}{4}\right)$ die Tiefpunkte und $H\left(0\middle\vert4\right)$ der Hochpunkt des Graphen. Wendepunkte: $f''(x)=\frac{4}{27}x^2-\frac{10}{9}=0$. Daraus folgt $x^2=\frac{30}{4}$ und schließlich $x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{30}}{2}$. $f'''(x)=\frac{8}{27}x$. $f'''\left(\pm\frac{\sqrt{30}}{2}\right)\neq0$. $f\left(\pm\frac{\sqrt{30}}{2}\right)=\frac{19}{36}$. *Eine Argumentation ohne Zuhilfenahme der 3. Ableitung ist ebenfalls möglich.* Danach sind $W_1\left(\frac{\sqrt{30}}{2}\middle\vert\frac{19}{36}\right)$ und $W_2\left(-\frac{\sqrt{30}}{2}\middle\vert\frac{19}{36}\right)$ die Wendepunkte des Graphen im angegebenen Intervall.	5	20	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Die Tangentengleichung hat die Form: $t(x) = f'(6) \cdot (x-6) + f(6) = 4(x-6) + 0 = 4x - 24.$ Den Radius *r* bestimmt man mit der Gleichung: $t(r) = 4r - 24 = -5$. Es folgt: $r = \frac{19}{4} = 4{,}75$.  		10	
f)	• <u>Bestimmung des Flächeninhaltes:</u> $A = \left\lvert \int_3^6 f(x)dx \right\rvert = \left\lvert \left[\frac{1}{405}x^5 - \frac{5}{27}x^3 + 4x \right]_3^6 \right\rvert = \lvert 3{,}2 - 7{,}6 \rvert = 4{,}4$.		10	
	• <u>Mögliches Näherungsverfahren:</u> Der Randkörper entsteht durch Rotation der Fläche um die *y*-Achse. Der Körper hat näherungsweise die Gestalt eines halben „Reifens“. Denkt man sich den „Reifen“ aufgeschnitten und gestreckt, so nimmt er ungefähr die Form eines „Troges“ mit der Länge $2\pi R$, wobei für *R* der Wert 4,5 (Mittelwert der Intervallgrenzen) angesetzt wird.			5
	• Damit erhalten wir die folgende Näherung für das Volumen: $\tilde{V} = 2 \cdot \pi \cdot 4{,}4 \cdot 4{,}5 \approx 124{,}4$.			5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
g)	Skizze: 			
	Berechnung des Näherungswertes für das Zitronenvolumen: $V = 2\pi \cdot \int_0^3 4 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{9}\right) dx = 8\pi \cdot \left[x - \frac{x^3}{27}\right]_0^3 = 8\pi \cdot 2 = 16\pi \approx 50.$			
	Die Zitrusfrucht hat also tatsächlich ein Volumen von ca. 50 cm^3.		5	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

LA/AG 1

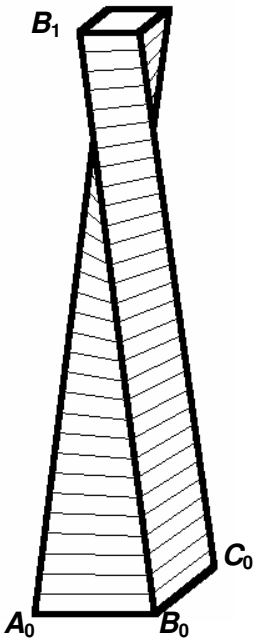
II.1 Quadrille

Der **Turning Torso** ist ein Hochhaus in der schwedischen Stadt Malmö. Der 57 Etagen hohe Wolkenkratzer erreicht eine Höhe von 190 Metern und ist damit der höchste Wolkenkratzer Skandinaviens und das zweithöchste Wohngebäude in Europa. Er wurde im Sommer 2005 eingeweiht und gilt seither als ein Wahrzeichen der Stadt.

Die einzelnen Stockwerke sind gegeneinander verdreht und haben alle eine gleich große, im Wesentlichen quadratische Grundfläche.

Der „Turning Torso“ regte einen anderen Architekten an, das rechts unten skizzierte Hochhaus **„Quadrille“** zu entwerfen, auf das sich alle Aufgabenteile beziehen.

Das Hochhaus „Quadrille“ hat eine quadratische horizontale Grundfläche der Seitenlänge 20 m und schließt in 120 m Höhe ab mit einer dazu parallelen kleineren (im Gegensatz zu Malmö) quadratischen Dachfläche mit der Seitenlänge von nur 10 m.



Die Mittelpunkte von Dach- und Bodenfläche sind lotrecht übereinander und liegen in dieser Aufgabe auf der z-Achse.

Die Dachfläche ist gegenüber der Bodenfläche von oben gesehen um 90° nach rechts gedreht.

Das Hochhaus hat 30 Stockwerke gleicher Höhe mit jeweils waagerechtem Boden und waagerechter Decke.

Alle Hauskanten sind gerade Strecken (dies auch im Gegensatz zu Malmö).

Aus Symmetriegründen folgt, dass alle vier von oben nach unten verlaufenden Gebäudekanten gleich lang sind und dass alle Stockwerke (alle horizontalen Schnittflächen) Quadrate sind.

a) Geben Sie für ein geeignetes Koordinatensystem (Einheit entspricht 1 m), in dem der Eckpunkt A_0 (siehe Abbildung) die Koordinaten $(10 \mid -10 \mid 0)$ hat, die Koordinaten der anderen 7 Eckpunkte des Hochhauses an. **10 P**

Wenn Ihnen das nicht gelingt, verwenden sie für die weiteren Aufgabenteile die folgenden 8 Punkte:

$$A_0(10 \mid 10 \mid 0)\ ,\ B_0(-10 \mid 10 \mid 0)\ ,\ C_0(-10 \mid -10 \mid 0)\ ,\ D_0(10 \mid -10 \mid 0)$$
$$A_1(5 \mid -5 \mid 120)\ ,\ B_1(5 \mid 5 \mid 120)\ ,\ C_1(-5 \mid 5 \mid 120)\ ,\ D_1(-5 \mid -5 \mid 120)$$

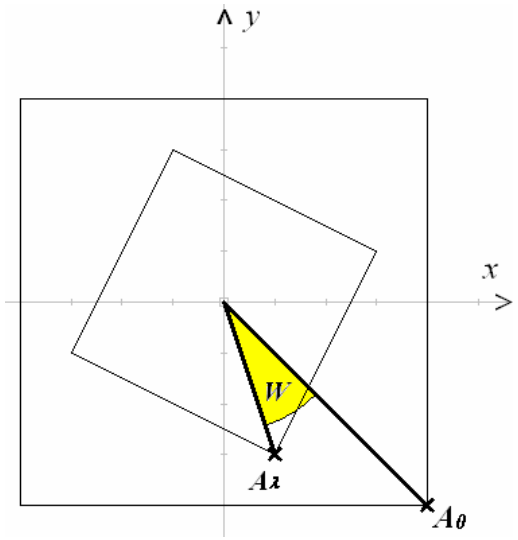
Die Stockwerke werden – wie üblich – von unten nach oben gezählt, und es gelte hier die Verabredung, dass das Erdgeschoss die Nummer 1 trägt, also als erstes Stockwerk bezeichnet wird.

b) – Berechnen Sie die Längen der von oben nach unten verlaufenden Hauskanten.

– Bestätigen Sie, dass in der Höhe h der zugehörige Punkt A_λ auf der Kante $\overline{A_0A_1}$ die Koordinaten $\left(10-\frac{h}{8}\,|\,-10+\frac{h}{24}\,|\,h\right)$ hat.

– Berechnen Sie die Koordinaten der vier Eckpunkte der Bodenfläche in 40 m Höhe, also in Höhe der Bodenfläche des 11. Stockwerkes. **15 P**

c) Es werden in diesem Aufgabenteil die Winkel untersucht, um die – von oben gesehen – die Bodenflächen der einzelnen Stockwerke gegenüber der Bodenfläche des Erdgeschosses nach rechts verdreht sind.
(Die z-Koordinaten brauchen also nicht betrachtet zu werden!)



– Bestimmen Sie den Winkel W, um den die Bodenfläche des 16. Stockwerks in 60 m Höhe gegenüber der des Grundgeschosses (1. Stock) gedreht ist.

– Bestimmen Sie das Stockwerk, bei dem $W = 45°$, bei dem also die Bodenfläche gegenüber der Bodenfläche des Grundgeschosses um 45° gedreht ist. **20 P**

d) Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt der Bodenfläche in der Höhe h – gemessen in m^2 – gilt: $F(h)=\frac{5}{144}\left(h^2-192h+11520\right)$ und dass das 25. Stockwerk ($h = 96$ m) die geringste Bodenfläche hat. **15 P**

e) Die Miete p pro Quadratmeter steigt – wegen der immer schöneren Aussicht – linear mit der Höhe der einzelnen Stockwerke über dem Boden. Im Erdgeschoss – also bei der Höhe 0 m – kostet der Quadratmeter 10 € Miete, im 30. Stockwerk – also in 116 m Bodenhöhe – hat sich die Miete pro Quadratmeter auf 20 € verdoppelt.
Bestimmen Sie das Stockwerk mit der geringsten Miete und das Stockwerk mit der höchsten Miete (dabei sollen Fahrstuhlschächte, Treppenhäuser etc. als Teil der Mietfläche mitgerechnet werden). **15 P**

f) Die Seitenflächen des Hochhauses werden durch die Schar der waagerechten Verbindungsstrecken zwischen den entsprechenden von oben nach unten verlaufenden Hauskanten gebildet. Begründen Sie,

– dass zwei benachbarte von oben nach unten verlaufende Hauskanten windschief sind,

– dass die Punkte P und Q als Endpunkte der kürzesten Verbindungsstrecke zwischen zwei benachbarten Hauskanten nicht auf gleicher Höhe liegen,

zur Kontrolle: Die Punkte haben die Koordinaten $\left(-\frac{1132}{581}\,|\,-\frac{3496}{581}\,|\,\frac{55536}{581}\right)$ bzw. $\left(\frac{3476}{581}\,|\,-\frac{1192}{581}\,|\,\frac{56016}{581}\right)$,

– dass der Mittelpunkt von P und Q genau in Höhe der minimalen Bodenfläche liegt,

– dass der Mittelpunkt von P und Q nicht auf der zugehörigen Seitenfläche liegt, dass die Seitenflächen des Hauses also gekrümmt sein müssen. **25 P**

Erwartungshorizont

Die in a) vorgegebene Alternative wird als Ersatzlösung bezeichnet und im Folgenden bei Abweichungen erwähnt.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Wir wählen die *x*-*y*-Ebene als Erdgeschossebene, dann kann man für die Eckpunkte des Erdgeschossbodens z. B. folgende Punkte wählen: $A_0(10\,|-10\,|\,0)$, $B_0(10\,|10\,|\,0)$, $C_0(-10\,|\,10\,|\,0)$, $D_0(-10\,|-10\,|\,0)$. Als Eckpunkte des Daches kann man wählen: $A_1(-5\,|-5\,|\,120)$, $B_1(5\,|-5\,|\,120)$, $C_1(5\,|\,5\,|\,120)$, $D_1(-5\,|\,5\,|\,120)$. Dabei wurden die von oben nach unten verlaufenden Hauskanten jeweils durch zwei Punkte mit dem gleichen Buchstaben als Bezeichner gekennzeichnet.	10		
b)	– Es genügt, eine der vier gleich langen Kantenlängen zu berechnen: $\left\|\overrightarrow{A_0A_1}\right| = \sqrt{(-5-10)^2+(-5+10)^2+(120-0)^2}$ $= \sqrt{225+25+14400} = \sqrt{14650} = 121{,}037...$ Jede von oben nach unten verlaufende Hochhauskante ist etwa 121 m lang. – Die vier von oben nach unten verlaufenden Kanten haben die Parameterformen: $\overrightarrow{a_\lambda} = \overrightarrow{a_0} + \lambda\cdot\left(\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_0}\right)$ mit $0\le\lambda\le1$, $\overrightarrow{b_\lambda} = \overrightarrow{b_0} + \lambda\cdot\left(\overrightarrow{b_1}-\overrightarrow{b_0}\right)$ mit $0\le\lambda\le1$, $\overrightarrow{c_\lambda} = \overrightarrow{c_0} + \lambda\cdot\left(\overrightarrow{c_1}-\overrightarrow{c_0}\right)$ mit $0\le\lambda\le1$, $\overrightarrow{d_\lambda} = \overrightarrow{d_0} + \lambda\cdot\left(\overrightarrow{d_1}-\overrightarrow{d_0}\right)$ mit $0\le\lambda\le1$. Betrachtet man beispielsweise die Kante $\overline{A_0A_1}$, so erhält man diese in Koordinatenform: $(-15\lambda+10\,|\,5\lambda-10\,|\,120\lambda)$. In der Höhe *h* ist die *z*-Komponente gleich *h* und damit $\lambda = \frac{h}{120}$. Einsetzen ergibt: $\left(10-\frac{h}{8}\,|-10+\frac{h}{24}\,|\,h\right)$, was zu zeigen ist. Da die Bodenfläche des 11. Stockwerkes bei *h* = 40 liegt, erhält man auf der Kante $\overline{A_0A_1}$ den Punkt $\left(5\,|-\frac{25}{3}\,|\,40\right)$ bzw. $\left(5\,|-8{,}\overline{3}\,|\,40\right)$. Auf die gleiche Weise oder durch Ausnutzen der Symmetrie erhält man die Koordinaten aller vier Fußbodeneckpunkte des 11. Stockwerks: $A_{\frac{1}{3}}\left(5\,|-8{,}\overline{3}\,|\,40\right)$, $B_{\frac{1}{3}}\left(8{,}\overline{3}\,|\,5\,|\,40\right)$, $C_{\frac{1}{3}}\left(-5\,|\,8{,}\overline{3}\,|\,40\right)$, $D_{\frac{1}{3}}\left(-8{,}\overline{3}\,|-5\,|\,40\right)$.	10	5	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Ersatzlösung: $A_{\frac{1}{3}}\left(\ 8,\overline{3}\mid 5\mid 40\right)$, $B_{\frac{1}{3}}\left(-5\mid\ 8,\overline{3}\mid 40\right)$, $C_{\frac{1}{3}}\left(-8,\overline{3}\mid -5\mid\ 40\right)$, $D_{\frac{1}{3}}\left(\ 5\mid -8,\overline{3}\mid 40\right)$. <u>Bemerkung:</u> *Diese Werte können entweder durch Einsetzen in alle vier Parameterdarstellungen oder durch Einsetzen in nur eine der vier Parameterdarstellungen und Ausnutzen der Symmetrie gewonnen werden.*			
c)	– Da waagerechte Geschossböden betrachtet werden, spielt die z-Koordinate keine Rolle – der Drehwinkel kann in der x-y-Ebene betrachtet werden (vgl. die in der Aufgabenstellung gegebene Skizze). Die Verbindungslinie von z. B. A_0 zum Ursprung schließt mit der y-Achse einen Winkel von 45° ein. Der eingezeichnete Punkt A_λ hat die Form: $\left(10-\frac{h}{8}\mid -10+\frac{h}{24}\mid h\right)$. Der Fußboden des 16. Stockwerkes liegt auf halber Höhe bei $h = 60$, die entsprechende Ecke A_λ hat also die Koordinaten $(2{,}5\mid -7{,}5\mid 60)$, liegt also – wie in der Skizze – im 4. Quadranten. Für den Winkel α, den der zugehörige Ortsvektor mit der x-Achse bildet, gilt also $tan\,\alpha = 3$, also $\alpha \approx 71{,}6°$. Für den gesuchten Winkel gilt also $W \approx 71{,}6° - 45° = 26{,}6°$. Der Fußbodeneckpunkt im 16. Stockwerk ist also gegenüber dem entsprechenden Eckpunkt im 1. Stockwerk um 26,6° weiter rechts herum um die z-Achse gedreht.		10	
	– Um das Stockwerk zu bestimmen, bei dem die Bodenfläche um $W = 45°$ gegenüber der Bodenfläche des Grundgeschosses gedreht ist, kann man z. B. denjenigen Punkt $\left(10-\frac{h}{8}\mid -10+\frac{h}{24}\mid h\right)$ berechnen, für den der x-Wert Null ist, also $h = 80$. Im 21. Stockwerk ist der Fußboden gegenüber dem Erdgeschoss um 45° nach rechts gedreht.		10	
	<u>Alternativer Lösungsweg:</u> Wir betrachten im 16. Stockwerk – also in der Höhe 60 m – die Fußbodenkante, die zwischen der „A-Kante“ und der „B-Kante“ verläuft, also zwischen $\overrightarrow{a_0}+\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_0}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_0}\right)=(2{,}5\mid -7{,}5\mid 60)$ und $\overrightarrow{b_0}+\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{b_1}-\overrightarrow{b_0}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{b_1}+\overrightarrow{b_0}\right)=(7{,}5\mid 2{,}5\mid 60)$. *Ersatzlösung:* $(7{,}5\mid 2{,}5\mid 60)$ *bzw.* $(-2{,}5\mid 7{,}5\mid 60)$. Der Differenzvektor $(\ 5\mid 10\mid 0\ )$ (Ersatzlösung: (–10 | 5 | 0)) ist also ein Richtungsvektor der betrachteten Fußbodenkante.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Im 1. Stockwerk (Erdgeschoss) ist $\overrightarrow{b_0}-\overrightarrow{a_0}=(0\,|\,20\,|\,0)$ (Ersatzlösung: $(-20\,|\,0\,|\,0)$) ein Richtungsvektor der entsprechenden Fußbodenkante. Diese beiden Richtungsvektoren bilden einen Winkel von $arccos\left(\frac{(5\,|\,10\,|\,0)\cdot(0\,|\,20\,|\,0)}{|(5\,|\,10\,|\,0)|\cdot|(0\,|\,20\,|\,0)|}\right)\approx 26{,}6°$. *Ersatzlösung:* $arccos\left(\frac{(-10\,|\,5\,|\,0)\cdot(-20\,|\,0\,|\,0)}{|(-10\,|\,5\,|\,0)|\cdot|(-20\,|\,0\,|\,0)|}\right)\approx 26{,}6°$.			
d)	Der Flächeninhalt $F(h)$ einer Bodenfläche als Funktion von h ist das Quadrat des Abstandes von zwei zugehörigen benachbarten Bodenecken. Solche zwei Ecken haben z. B. die Koordinaten $a_0+\frac{h}{120}\cdot\left(\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_0}\right)=\left(10-\frac{h}{8}\;|-10+\frac{h}{24}\;|\;h\right)$ und $\overrightarrow{b_0}+\frac{h}{120}\cdot\left(\overrightarrow{b_1}-\overrightarrow{b_0}\right)=\left(10-\frac{h}{24}\;|\;10-\frac{h}{8}\;|\;h\right)$. *Ersatzlösung:* $\left(10-\frac{h}{24}\;|10-\frac{h}{8}\;|\;h\right)$ *und* $\left(-10+\frac{h}{8}\;|\;10-\frac{h}{24}\;|\;h\right)$. Ein Geschoss hat eine quadratische Grundfläche. Der Betrag des Differenzvektors gibt die Seitenlänge an. Zur Bestimmung des Flächeninhalts muss diese also quadriert werden. Differenzvektor: $\left(\frac{h}{12}\,|-\frac{h}{6}+20\,|\,0\right)$. Quadrat: $F(h)=\frac{5}{144}\cdot\left(h^2-192h+11520\right)$. Die quadratische Funktion F hat ihr Minimum bei $h = 96$, also hat das 25. Stockwerk in der Höhe von 96 m die minimale Bodenfläche. <u>*Alternative:*</u> Es genügt, das Quadrat des Abstandes von $\left(10-\frac{h}{8}\,|-10+\frac{h}{24}\,|\,h\right)$ von der z-Achse zu betrachten (halbe Diagonale im entsprechenden Bodenquadrat) und (wenn man will, zu verdoppeln), denn $2F(h)=\left(10-\frac{h}{8}\right)^2+\left(-10+\frac{h}{24}\right)^2$. So erhält man auch den Term für $F(h)$ bzw. $\frac{F(h)}{2}$.		15	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Aus d) hat man die Flächenfunktion $F(h)=\frac{5}{144}\left(h^2-192h+11520\right)$ und somit gilt für die Miete: $mi(h)=\frac{5}{144}\left(h^2-192h+11520\right)\cdot 10\cdot\left(1+\frac{h}{116}\right)$ $=\frac{50}{144}\left(\frac{1}{16}h^3-\frac{19}{29}h^2-\frac{2688}{29}h+11520\right)$. Die Ableitung dieser Funktion ist $mi'(h)=\frac{50}{16704}\left(3h^2-152h-10752\right)$. Das einzige innere Extremum dieser Funktion liegt bei $h_E=\frac{1}{3}\cdot\left(4\sqrt{2377}+76\right)$ $\approx 90{,}34$, und es handelt sich um ein Minimum. Das diesem Wert nächste Geschoss – das 24. – liegt bei $h = 92$ m. (Die zugehörige Miete beträgt 1444,44 €, im 23. Geschoss bei einer Höhe von 88 m beträgt die Miete 1445,98 €.) Die höchste Miete kann dann nur ein Randwert sein, d. h. für das 1. Stockwerk (Grundgeschoss, Bodenebene in $h = 0$ m) oder das 30. Stockwerk (Bodenebene $h = 116$). Einsetzen ergibt die Werte 4 000 € und 1 878 €. Also ist die Miete im Grundgeschoss am höchsten.		15	
f)	– Man zeigt, dass die beiden von den Hauskanten $\overline{A_0A_1}$ und $\overline{B_0B_1}$ gebildeten Geraden keinen Punkt gemeinsam haben (parallel sind sie offensichtlich nicht). Zu lösen wäre: $\vec{a_0}+\lambda\cdot\left(\vec{a_1}-\vec{a_0}\right)=\vec{b_0}+\mu\cdot\left(\vec{b_1}-\vec{b_0}\right)$ mit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, also das lineare Gleichungssystem $10-15\lambda=10-5\mu$ $-10+5\lambda=10-15\mu$ $120\lambda=120\mu$. *Ersatzlösung:* $10-15\lambda=10-5\mu$ $10-5\lambda=-10+15\mu$ $120\lambda=120\mu$ Die letzte Gleichung ergibt $\lambda=\mu$ und die erste Gleichung zeigt dann sofort, dass das Gleichungssystem nicht lösbar ist. Die beiden Geraden (Kanten) sind also windschief. *Alternative Lösung:* Die Windschiefe ist auch dadurch einzusehen, dass anderenfalls aus Symmetriegründen je zwei benachbarte Kanten einen gemeinsamen Punkt hätten und dass alle diese vier Punkte in gleicher Höhe sein müssten. Dann fielen diese vier Punkte aber in einem Punkt auf der z-Achse zusammen, in einer Spitze also, und der Turm wäre ein(e) gewöhnliche(r) quadratische(r) Pyramide(-nstumpf). Das widerspricht aber der Lage der oberen vier Eckpunkte. Auch die in d) erkannte Existenz einer minimalen Bodenfläche könnte hier als Begründung herangeführt werden.			5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	– Die Bestimmung der Punkte *P* und *Q* kann entweder über Orthogonalitätsbetrachtungen oder über die Minimierung der Abstandsfunktion (mit zwei Variablen, also über partielle Ableitungen) erfolgen. Hier wird der erste Weg dargestellt: $\overrightarrow{PQ}$ muss (z. B.) orthogonal zu $\overrightarrow{A_1A_0}$ und orthogonal zu $\overrightarrow{B_1B_0}$ sein: $\left(\left(\vec{b}_0+\mu\left(\vec{b}_1-\vec{b}_0\right)\right)-\left(\vec{a}_0+\lambda\cdot\left(\vec{a}_1-\vec{a}_0\right)\right)\right)\cdot\left(\vec{a}_1-\vec{a}_0\right)=0$ $\left(\left(\vec{b}_0+\mu\left(\vec{b}_1-\vec{b}_0\right)\right)-\left(\vec{a}_0+\lambda\cdot\left(\vec{a}_1-\vec{a}_0\right)\right)\right)\cdot\left(\vec{b}_1-\vec{b}_0\right)=0$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Einsetzen ergibt: $293\lambda-288\mu=2$ $288\lambda-293\mu=-6$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. mit den Lösungen $\lambda=\frac{2314}{2905}=0,7965...$ und $\mu=\frac{2334}{2905}=0,803...$ und den zugehörigen Punkten $P\left(-\frac{1132}{581}\mid-\frac{3496}{581}\mid\frac{55536}{581}\right)\approx\left(-1,948365\mid-6,017212\mid95,586919\right)$ und $Q\left(\frac{3476}{581}\mid-\frac{1192}{581}\mid\frac{56016}{581}\right)\approx\left(5,982788\mid-2,051635\mid96,413081\right)$. *Ersatzlösung:* $P\left(\frac{3496}{581}\mid-\frac{1132}{581}\mid\frac{55536}{581}\right)\approx\left(6,017212\mid-1,948365\mid95,586919\right)$ und $Q\left(\frac{1192}{581}\mid\frac{3476}{581}\mid\frac{56016}{581}\right)\approx\left(2,051635\mid5,982788\mid96,413081\right)$. *Die Punkte liegen knapp unterhalb bzw. oberhalb der minimalen Bodenfläche.*			10
	– Der Mittelpunkt *M* der Strecke $\overline{PQ}$ hat die Koordinaten $\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{p}+\vec{q}\right)=\left(\frac{1172}{581}\mid-\frac{2344}{581}\mid96\right)\approx\left(2,017212\mid-4,034423\mid96\right)$, liegt also exakt auf der Höhe der minimalen Bodenfläche.		5	
	– Wenn dieser Punkt auf der Seitenfläche läge, müsste er auf der entsprechenden Fußbodenkante liegen, also auf der Strecke $\overline{A_{\frac{96}{120}}B_{\frac{96}{120}}}$. Es gilt: $A_{\frac{96}{120}}\left(-2\mid-6\mid96\right)$ und $B_{\frac{96}{120}}\left(6\mid-2\mid96\right)$. Ersatzlösung: $A_{\frac{96}{120}}\left(6\mid-2\mid96\right)$ und $B_{\frac{96}{120}}\left(2\mid6\mid96\right)$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Es müsste also gelten: $\vec{m} = \overrightarrow{a_{\frac{96}{120}}} + \lambda \cdot \left(\overrightarrow{b_{\frac{96}{120}}} - \overrightarrow{a_{\frac{96}{120}}} \right)$, also $\begin{pmatrix} \frac{1172}{581} \\ -\frac{2344}{581} \\ 96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 96 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \left(\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 96 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 96 \end{pmatrix} \right)$. Dies führt auf die beiden Gleichungen $8\lambda - 2 = \frac{1172}{581}$ und $4\lambda - 6 = -\frac{2344}{581}$, die offensichtlich nicht gleichzeitig erfüllt werden können. Der Punkt *M* liegt also nicht auf der entsprechenden Seitenfläche. Wäre die Seitenfläche eben, dann müsste der Punkt *M* auf ihr liegen. Dies ist aber nicht der Fall. Dass die Seitenflächen nicht eben sind, folgt auch aus der Windschiefe der jeweils zugehörigen zwei von oben nach unten verlaufenden Kanten. Denn diese liegen ja in der Seitenfläche und könnten nicht windschief sein, wenn die Seitenfläche eben wäre.			5
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

LA/AG 2

II.2 Insektenpopulation

In den Tropen legen die Weibchen einer in Deutschland unbekannten Insektenpopulation jedes Jahr kurz vor Beginn der Regenzeit jeweils 90 Eier und sterben bald darauf. Aus den Eiern schlüpfen wenig später Larven. Der Larvenbestand nimmt von Jahr zu Jahr durch Witterungseinflüsse, aber auch durch den Verzehr durch andere Tiere, ab. Im dritten Jahr verpuppen sich die Larven, und aus einem Teil der Puppen entwickeln sich im darauf folgenden Jahr Weibchen, die wieder 90 Eier legen. Die jährliche Entwicklung dieser Insektenpopulation wird durch die nachstehende Populationsmatrix A beschrieben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 90 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Stellen Sie das beschriebene Modell mit einem Übergangsgraphen dar und beschreiben Sie die biologischen Bedeutungen der von Null abweichenden Koeffizienten der Matrix A. **15 P**

b) In der folgenden Tabelle ist eine Anfangspopulation $\vec{p}_0$ der oben genannten Insekten gegeben, die jeweils ihrem Alter entsprechend gegliedert sind:

Alter	**Name**	**Anzahl**
1 Jahr	Larven 1	9000
2 Jahre	Larven 2	3000
3 Jahre	Puppen	900
4 Jahre	Weibchen	700

- Bestimmen Sie den Populationsvektor nach einem Jahr ($\vec{p}_1$).
- Geben Sie an, wie Sie die Population nach 4 Jahren unter ausschließlicher Verwendung des Anfangspopulationsvektors $\vec{p}_0$ und der Matrix A berechnen könnten. **10 P**

Betrachten Sie folgende Übersicht. Dabei ist die Zeit in Jahren angegeben, der Populationsvektor besteht aus den Individuen der in b) genannten Teilgruppen, und die Gesamtpopulation ist die Summe der Individuen in den Teilgruppen, also ohne die männlichen Insekten.

Zeit	**Populationsvektor**	**Gesamtpopulation** (Summe)
0	$\vec{p}_0 = (9000 \mid 3000 \mid 900 \mid 700)$	13 600
1	$\vec{p}_1 = (63000 \mid 3000 \mid 1000 \mid 90)$	67 090
2	$\vec{p}_2 = (8100 \mid 21000 \mid 1000 \mid 100)$	30 200
3	$\vec{p}_3 = (9000 \mid 2700 \mid 7000 \mid 100)$	18 800
4	$\vec{p}_4 = \vec{p}_0 = (9000 \mid 3000 \mid 900 \mid 700)$	13 600

c) • Skizzieren Sie die jeweiligen Werte der Gesamtpopulation in anliegendes Koordinatensystem.

• Beschreiben Sie, wie sich die Populationsvektoren und damit die Gesamtpopulation in den kommenden Jahren nach dem Modell entwickeln werden, und skizzieren Sie entsprechend den weiteren Verlauf der Gesamtpopulation bis zum Jahr 10.

• Bestimmen Sie den Populationsvektor nach 25 Jahren ($\vec{p}_{25}$) und den Populationsvektor im Jahr vor Beginn der Beobachtung ($\vec{p}_{-1}$) (bei Verwendung des bisherigen Modells). **20 P**

d) Die in c) betrachtete Eigenart des verwendeten Modells kann von der Matrix abhängen, aber auch von der Startpopulation.

• Geben Sie begründet die Eigenschaft der Matrix *A* an, die unabhängig von der Startpopulation zu Ergebnissen wie in c) beschrieben führt.

• Untersuchen Sie, ob es Populationsvektoren ($\vec{p}_x$) gibt, die sich jährlich wiederholen, und bestimmen Sie gegebenenfalls einen dieser Populationsvektoren. **15 P**

Zu den eben angesprochenen Ursachen für bestimmte Eigenschaften der Population folgt jetzt ein rein mathematisches Beispiel:

Gegeben ist eine allgemeine Populationsmatrix *P*: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix}$; $a \in \mathbb{N}^*$ und $0 < b, c, d < 1$.

e) Eine quadratische Matrix *M* heißt zyklische Matrix, wenn es eine natürliche Zahl *n* gibt, so dass gilt: $M^n = E$.

• Zeigen Sie, dass die obige Populationsmatrix *P* für $n = 2$ und für $n = 3$ nicht zyklisch sein kann.

• Ermitteln Sie die Bedingungen für *a*, *b*, *c* und *d*, damit gilt: $P^4 = E$. **15 P**

Die folgenden beiden Aufgaben beziehen sich wieder auf das durch die Matrix A beschriebene Modell, das jetzt neuen Situationen angepasst werden soll:

f) Durch eine spürbare Veränderung der Trocken- und Regenzeiten, die von Wissenschaftlern auf den allseits diskutierten Klimawandel zurück geführt wird, halbiert sich seit einigen Jahren bei sonst gleich bleibenden Überlebensraten die Anzahl der von den Weibchen gelegten Eier.

• Bestimmen Sie die neue Populationsmatrix A_{neu} .

• Es gilt: $A_{neu}^4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Interpretieren Sie, wie sich diese Veränderung auf die langfristige Entwicklung der Insektenpopulation auswirkt. **10 P**

g) Inzwischen lässt sich sogar feststellen, dass die schon erwähnten Veränderungen der Trocken- und Regenzeiten nicht nur die Anzahl der von den Weibchen gelegten Eier halbiert hat, sondern auch dazu geführt hat, dass ein Zwölftel der Larven 1 sich bereits verpuppt, also eine Generation überspringt. Damit entwickelt sich nur noch ein Viertel der Larven 1 zu Larven 2, also wie bisher.

• Bestimmen Sie die neue Populationsmatrix A_{neu2} .

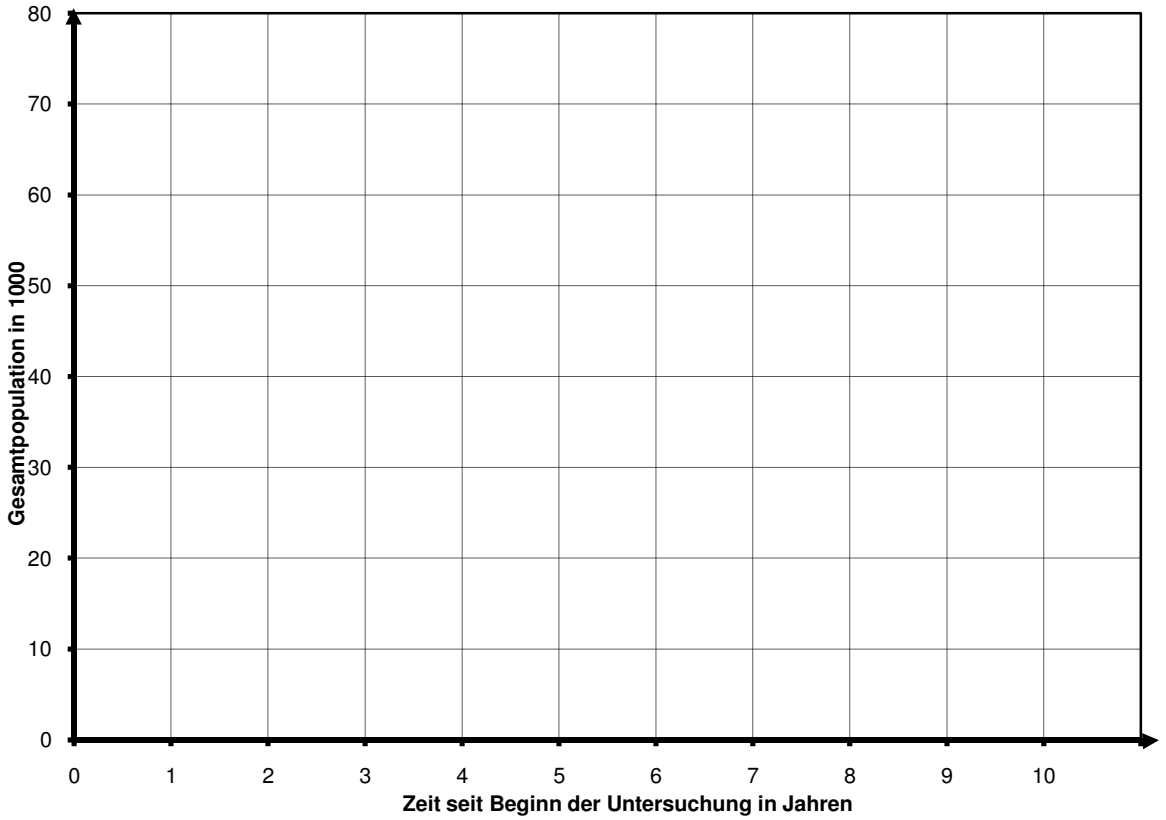
• Begründen Sie, warum bei dieser Populationsentwicklung die Bestimmung von Vorjahresbeständen nicht zu jedem beliebigen Populationsvektor möglich ist, und interpretieren Sie diese Fälle im Sachkontext der Aufgabe. **15 P**

Anlage zur Aufgabe „Insektenpopulation“

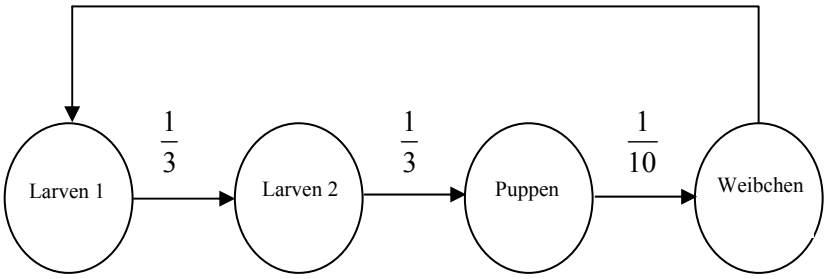
Bitte beachten Sie:

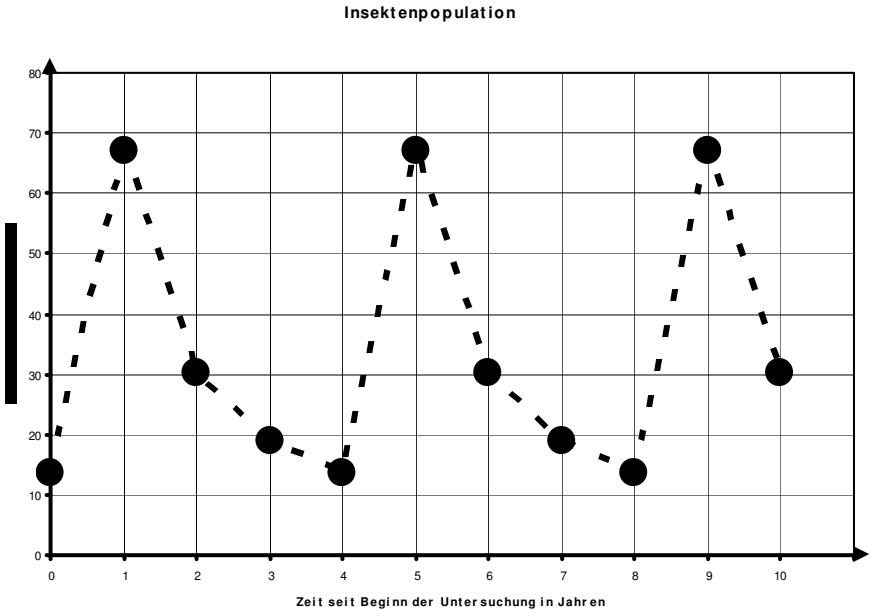
In x-Richtung wird die Zeit der Beobachtung in Jahren aufgetragen, „0“ steht für den Beginn der Beobachtung der Insektenpopulation.

In y-Richtung wird jeweils die Anzahl der Gesamtpopulation (als Summe der Teilgruppen) in 1000 aufgetragen.



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	90  Biologische Bedeutung der Koeffizienten: $a_{14} = 90$ ist die Vermehrungsrate $a_{21} = \frac{1}{3}$ ist die Überlebensrate der Larven im 1. Jahr (Larven 1) $a_{32} = \frac{1}{3}$ ist die Überlebensrate der Larven im 2. Jahr (Larven 2) $a_{43} = \frac{1}{10}$ ist die Überlebensrate der verpuppten Larven im 3. Jahr (Puppen)	10	5	
b)	Bestimmung von $\vec{p}_1$: $\vec{p}_1 = A \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 90 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9000 \\ 3000 \\ 900 \\ 700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63000 \\ 3000 \\ 1000 \\ 90 \end{pmatrix}$. Darstellung des Populationsvektors $\vec{p}_4$ (Population nach 4 Jahren): $\vec{p}_4 = A^4 \cdot \vec{p}_0$.	5	5	
c)	Skizze zur Gesamtpopulation *(Verbindung der Punkte nicht notwendig, sie erhöht aber den optischen Eindruck.)* Nach vier Jahren ist der Populationsvektor identisch mit jenem zu Beginn der Untersuchung und ebenso die Gesamtpopulation. Da die Berechnung der Populationsvektoren nach dem Schema $\vec{p}_{n+1} = A \cdot \vec{p}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ abläuft, wiederholt sich alle 4 Jahre der Populationsverlauf. Die Gesamtpopulation P_{10} nach 10 Jahren ist also gleich der Gesamtpopulation nach 2 Jahren P_2.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	 **Folgerung für $\vec{p}_{25}$:** $\vec{p}_{24} = \vec{p}_0$, da 4 ein Teiler von 24 ist. $\Rightarrow \vec{p}_{25} = \vec{p}_1$. **Bestimmen von $\vec{p}_{-1}$:** Nimmt man an, dass das verwendete Populationsmodell schon vor dem Untersuchungsbeginn gültig war, kann von dem zyklischen Vorgang auch in der Vergangenheit (ausgedrückt durch negative Indizes) ausgegangen werden. Damit ist $\vec{p}_{-1}$ der Populationsvektor vor $\vec{p}_0 = \vec{p}_4$, d. h. $\vec{p}_{-1} = \vec{p}_3$. *Natürlich kann $\vec{p}_{-1}$ auch durch Lösung eines LGS bestimmt werden.*	5	15	
d)	**Eigenschaft der Matrix *A*:** Die Matrix A^4 ist identisch mit der Einheitsmatrix *E*, denn es muss gelten $A^4 \cdot \vec{p}_0 = \vec{p}_4 = \vec{p}_0 (= E \cdot \vec{p}_0)$. **Eigenschaft der Startpopulation:** Die Aufgabenstellung führt zum folgenden LGS: $A \cdot \vec{p}_x = \vec{p}_x$. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 90 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 90x_4 \\ \frac{1}{3}x_1 \\ \frac{1}{3}x_2 \\ \frac{1}{10}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Hieraus ergibt sich die mehrdeutige Lösung: $x_1 = 90x_4,\ x_2 = 30x_4,\ x_3 = 10x_4,\ x_4 \in \mathbb{N}^*$. Die Bedingung ist immer dann erfüllt, wenn die Komponenten des Populationsvektors im Verhältnis 90:30:10:1 stehen. Also lautet eine mögliche Lösung: $\vec{p}_x = \begin{pmatrix} 90 \\ 30 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$.		10	5
e)	Berechnung von P^2, P^3 und P^4: $P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \cdot d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \cdot b \\ b \cdot c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c \cdot d & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $P^3 = P^2 \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \cdot d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \cdot b \\ b \cdot c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c \cdot d & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 0 & a \cdot c \cdot d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \cdot b \cdot d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \cdot b \cdot c \\ b \cdot c \cdot d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Da die Diagonalelemente sowohl bei P^2 als bei P^3 jeweils Null sind, ist eine Einheitsmatrix in beiden Fällen nicht erreichbar. $P^4 = P^2 \cdot P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \cdot d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \cdot b \\ b \cdot c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c \cdot d & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \cdot d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \cdot b \\ b \cdot c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c \cdot d & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $P^4 = \begin{pmatrix} a \cdot b \cdot c \cdot d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a \cdot b \cdot c \cdot d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \cdot b \cdot c \cdot d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \cdot b \cdot c \cdot d \end{pmatrix}$ Also: $P^4 = E$, wenn gilt: $a \cdot b \cdot c \cdot d = 1$.		15	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
f)	Neue Populationsmatrix: $A_{Neu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 45 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}$ Interpretation: Die Veränderung der Trocken- und Regenzeiten führt dazu, dass sich die Insektenpopulation in einem Zyklus von jeweils vier Jahren halbieren wird. Bleibt das Modell gültig, wird die Population langfristig aussterben.		5	5
g)	$A_{Neu2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 45 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}$, denn $\frac{1}{12}$ der Larven 1 geht in die Gruppe „Puppen“ über, $\frac{1}{4}$ der Larven 1 wie bisher in die Gruppe Larven 2. Ermittlung von $\vec{p}_{(a_0)-1}$ aus einer beliebigen Anfangspopulation $\vec{p}_{a_0}$ führt zu dem Ansatz $\vec{p}_{a_0} = A_{Neu2} \cdot \vec{p}_{(a_0)-1}$: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 45 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45x_4 \\ \frac{1}{4}x_1 \\ \frac{1}{12}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \\ \frac{1}{10}x_3 \end{pmatrix}$. Als Lösung ergibt sich: $x_1 = 4a_2,\ x_2 = 3a_3 - a_2,\ x_3 = 10a_4,\ x_4 = \frac{1}{45}a_1$ mit $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0 \ \wedge \ x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Aus $x_2 = 3a_3 - a_2$ ist unmittelbar zu erkennen, dass für die Fälle $a_2 > 3a_3$ die Nichtnegativitätsbedingung für die Anzahl der zweijährigen Larven nicht mehr gegeben ist. Also lässt sich für alle Populationsvektoren, in denen die Anzahl der zweijährigen Larven mehr als dreimal so hoch ist wie die der Puppen, keine Vorjahrespopulation ermitteln. Außerdem muss x_4 ganzzahlig, a_1 (die Anzahl der Larven 1 des Populationsvektors) also ein Vielfaches von 45 sein. Die hier vorliegende Frage der Lösbarkeit des zugehörigen Gleichungssystems kann auch mit anderen Verfahren geklärt werden.		5	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

STOCHASTIK 1

III.1 Falschparker

Der Berliner Senat überlegt, ob er die Parkgebühren (1 € / h) erhöhen muss, damit die Einnahmeverluste durch Parken ohne gültigen Parkschein (so genanntes „Falschparken“) ausgeglichen werden können.
Nach Angabe des Senats beträgt der Anteil der Falschparker gemäß einer Studie aus dem Frühjahr ca. 15 %. Die mittlere Parkdauer beträgt zwei Stunden.

a) Zwei Politessen überprüfen zunächst den Parkplatz „Kudamm-Karree“ mit 34 Autos, dann den Parkplatz „Wertheim Kurfürstendamm“ mit 48 Autos.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Politessen auf dem Parkplatz „Kudamm-Karree“ genau drei Falschparker aufschreiben.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Politessen auf beiden Parkplätzen zusammen mindestens vier Falschparker aufschreiben.
- Geben Sie an, mit wie vielen Falschparkern die Politessen auf beiden Parkplätzen zusammen rechnen sollten.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Politessen beim Kudamm-Karree genau fünf und bei Wertheim genau sechs Falschparker finden. **25 P**

b) In der Senatsverwaltung wird überlegt und anschließend eine Stichprobe von 500 überprüften Autos ausgewertet.

- Berechnen Sie zunächst, wie viele parkende Autos hätten überprüft werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99 % mindestens einen Falschparker zu erwischen.
- Bestimmen Sie für die Stichprobe den kleinstmöglichen Bereich für die Zahl an Falschparkern symmetrisch zum Erwartungswert, in dem diese Zahl mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % liegt. Verwenden Sie dabei die Normalverteilungs-Näherung. **15 P**

c) Es gibt nicht überall und jederzeit Politessen. Deswegen kann man davon ausgehen, dass nur etwa 10 % von allen Falschparkern durch Kontrollen von Politessen gefunden werden. Etwa die Hälfte davon kehrt nach wenigen Minuten zum Wagen zurück. Diese Falschparker werden verwarnt und müssen jeweils 1 € Parkgebühr nachträglich entrichten. Die andere Hälfte muss ein Bußgeld von 15 € pro Falschparker bezahlen.

- Zeigen Sie, dass ein Falschparker durch sein Verhalten im Mittel 1,15 € Mindereinnahmen für die Stadt Berlin verursacht.
- Bestimmen Sie den Betrag, auf den der Berliner Senat das Bußgeld erhöhen müsste, damit Falschparker keine Mindereinnahmen verursachen. **15 P**

d) Der Senat entschloss sich stattdessen zu einer drastischen Erhöhung der Parkgebühren. Im Gegensatz zum Senat befürchten die Medien, dass (deswegen) der Anteil der Falschparker deutlich angestiegen sein könnte.

- Leiten Sie ein Testverfahren für eine Kontrolle von 2400 Fahrzeugen her, mit dem man die Befürchtung der Medien gegebenenfalls statistisch (auf dem 5 %-Niveau) begründen kann.

- Nehmen Sie an, dass der Falschparkeranteil nach der Gebührenerhöhung tatsächlich bei (etwa) 17 % liegt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der obige Test trotzdem kein signifikantes Ergebnis liefert. Kann sich in einem solchen Falle der Senat in seiner Ansicht bestätigt fühlen? Begründen Sie Ihre Antwort. **20 P**

e) Die Falschparker-Daten der Frühjahrs-Studie wurden vom Verwaltungsreferat Touristik ausgewertet. Die beobachteten Merkmale waren

B := Auto mit Berliner Kennzeichen
$\overline{B}$:= Auto mit einem Kennzeichen außerhalb Berlins („Tourist“)
F := Falschparker
$\overline{F}$:= Richtigparker.

- Geben Sie die fehlenden Werte in folgender Vierfeldertafel an:

	B	$\overline{B}$	Summe
F	5 %		15 %
$\overline{F}$			
Summe	70 %		

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein erwischter Falschparker ein „Tourist“ ist. **15 P**

f) Aus der Sommer-Studie ist auch bekannt, dass die Anzahl der Fahrzeuge mit einem Kennzeichen außerhalb Berlins im Sommer um 20 % angestiegen ist. Gleichzeitig ist der Anteil der Falschparker auf 18 % gestiegen (vgl. Teil d). Das Parkverhalten der „Touristen“ hat sich dabei im Vergleich zum Frühjahr nicht verändert.

- Bestimmen Sie für die neue Situation im Sommer eine vollständige Vierfeldertafel.
- Interpretieren Sie die beiden Vierfeldertafeln im Hinblick auf das Parkverhalten der Berliner Autofahrer. **10 P**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	• Die Anzahl der Falschparker unter den 34 kontrollierten Fahrzeugen ist $B_{34;0,15}$-verteilt: $\binom{34}{3} \cdot 0{,}15^3 \cdot 0{,}85^{31} \approx 13\%$. • Die Anzahl der Falschparker unter den 82 kontrollierten Fahrzeugen ist $B_{82;0,15}$-verteilt: P(„mind. 4 Falschparker“) = 1 – P(„höchstens 3 Falschparker“) = $1 - P(X \le 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) \approx$ $1 - 0{,}0000016 - 0{,}000024 - 0{,}000169 - 0{,}000794 \approx 0{,}999$. Die Wahrscheinlichkeit, mindestens 4 Falschparker zu ertappen, ist ca. 99,9%. • $E(X) = 82 \cdot 0{,}15 = 12{,}3$. Die Politessen müssen mit ca. 12 Falschparkern rechnen. • Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Politessen beim Kudamm-Karree genau fünf und bei Wertheim genau sechs Falschparker finden, beträgt $\binom{34}{5} \cdot 0{,}15^5 \cdot 0{,}85^{29} \cdot \binom{48}{6} \cdot 0{,}15^6 \cdot 0{,}85^{42} \approx 0{,}1897 \cdot 0{,}1517 \approx 0{,}0288 \approx 2{,}9\%$.	15	10	
b)	• Y: Anzahl der ertappten Falschparker bei n überprüften Autos; Y ist $B_{n;0,15}$-verteilt. P(mindestens ein Falschparker) = $P(Y \ge 1)$ = $1 - P(Y = 0) > 0{,}99$, also $P(Y = 0) < 0{,}01$, d.h. $\binom{n}{0} \cdot 0{,}15^0 \cdot 0{,}85^n < 0{,}01 \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}85)} \approx 28{,}34$. Man müsste mindestens 29 Autos kontrollieren. • Kleinstmöglicher Bereich symmetrisch zum Erwartungswert: $n = 500$ und $p = 0{,}15 \Rightarrow \mu = 75$ und $\sigma = \sqrt{500 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85} \approx 7{,}984$. Es gilt: $P(\lvert X - \mu \rvert \le d) = 2 \cdot \Phi(\frac{d}{\sigma}) - 1 \ge 0{,}80 \Leftrightarrow \Phi(\frac{d}{\sigma}) \ge \frac{1{,}8}{2} = 0{,}9$. Mit Hilfe einer Tabelle für die Normalverteilung folgt: $\frac{d}{\sigma} \approx 1{,}28 \Rightarrow d \approx 10{,}22 \Rightarrow d \ge 11$. Somit lautet das kleinstmögliche Intervall: [64; 86].	5	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	Es ist G die „Einnahmedifferenz“, die ein Falschparker gegenüber einem regelgerechten Verhalten verursacht. | | Falschparker nicht ertappt | Falschparker verwarnt | Falschparker ertappt | | g_i (in €) | –2 | 0 | 15–2 = 13 | | $P(G=g_i)$ | 0,9 | 0,05 | 0,05 | Erwartungswert $E(G) = (-2)\cdot 0{,}90 + 13\cdot 0{,}05 = -1{,}15$, d.h. pro Falschparker macht die Stadt im Durchschnitt einen Verlust von 1,15 €. Man müsste also eine Erhöhung des Bußgeldes beschließen, um mindestens ohne Verlust für die Stadt zu arbeiten. Ist B das erhöhte Bußgeld, so gilt: $E(G) = (-2)\cdot 0{,}90 + (B-2)\cdot 0{,}05 = 0 \Leftrightarrow B\cdot 0{,}05 = 1{,}9 \Rightarrow B = 38$. Damit kein Verlust entsteht, müsste das Bußgeld mindestens auf 38 € erhöht werden		10	5
d)	• Die Medien könnten ihre Behauptung statistisch belegen, wenn die Nullhypothese $H_0 : p \le 0{,}15$ verworfen werden könnte, d.h. wenn die Anzahl X der in der Stichprobe auftretenden Falschparker genügend groß ist. Wir bestimmen eine möglichst kleine Schranke K so, dass $P(\{X > K\} \mid H_0) \le 5\%$. Zunächst können wir abschätzen: $P(\{X > K\} \mid H_0) \le P(\{X > K\} \mid p = 0{,}15)$. Unter der Bedingung $p = 0{,}15$ ist $\frac{X - \mu + 0{,}5}{\sigma}$ in guter Näherung standardnormalverteilt mit $\mu = 2400\cdot 0{,}15 = 360$ und $\sigma = \sqrt{2400\cdot 0{,}15\cdot 0{,}85} \approx 17{,}49$. Der Tabelle entnimmt man für eine standard-normalverteilte Zufallsvariable N: $P(N > 1{,}645) \approx 5\%$. Also $P\left(\frac{X - \mu + 0{,}5}{\sigma} > 1{,}645 \mid p = 0{,}15\right) \le 5\%$ $\Leftrightarrow P(X > \mu - 0{,}5 + 1{,}645\cdot\sigma \mid p = 0{,}15) \le 5\%$ $\Leftrightarrow P(X > 388{,}3 \mid p = 0{,}15) \le 5\%$ Die Nullhypothese kann also auf dem 5 %-Niveau verworfen werden, wenn in der Stichprobe mehr als 389 Falschparker angetroffen werden. In diesem Falle könnten die Medien sich – statistisch begründet – bestätigt fühlen.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	• Es gilt $P\left(\{X \le 389\} \mid p = 0{,}17\right)$ zu bestimmen, also die Wahrscheinlichkeit für einen speziellen Fehler 2. Art. Auch bei $p = 0{,}17$ können wir mit der Normalverteilung approximieren: $\mu = 2400 \cdot 0{,}17 = 408$ und $\sigma = \sqrt{2400 \cdot 0{,}17 \cdot 0{,}83} \approx 18{,}40$. $P\left(X \le 389 \mid p = 0{,}17\right)$ $\approx P\left(\frac{X - \mu + 0{,}5}{\sigma} \le \frac{389 - \mu + 0{,}5}{\sigma} \mid p = 0{,}17\right)$ $= P\left(\frac{X - \mu + 0{,}5}{\sigma} \le -1{,}005 \mid p = 0{,}17\right)$ $\approx \Phi(-1)$ $\approx 16\%$ Das ist ein ziemlich hoher Wert, es kann also leicht passieren, dass der obige Test kein signifikantes Ergebnis liefert, aber dann sind die Testergebnisse für beide Seiten wertlos: Mit solider Argumentation kann der Berliner Senat dann <u>nicht</u> behaupten, dass der Anteil an Falschparkern <u>nicht</u> gestiegen sei.		15	5
e)	<u>Vierfeldertafeln:</u> B = Auto mit Berliner Kennzeichen $\overline{B}$ = Auto mit einem Kennzeichen außerhalb Berlins („Tourist“) F = Falschparker $\overline{F}$ = Richtigparker <u>Vierfeldertafel – Frühling:</u> Von allen Falschparkern sind zwei Drittel „Touristen“, also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $p \approx 67\%$.	5	10	

	B	$\overline{B}$	Summe
F	0,05	0,10	0,15
$\overline{F}$	0,65	0,20	0,85
Summe	0,70	0,30	1

<table>
<tr><th></th><th>Lösungsskizze</th><th>Zuordnung Bewertung</th><th></th><th></th></tr>
<tr><th></th><th></th><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>f)</td><td>
<u>Vierfeldertafeln:</u>
B = Auto mit Berliner Kennzeichen
$\overline{B}$ = Auto mit einem Kennzeichen außerhalb Berlins („Tourist“)
F = Falschparker
$\overline{F}$ = Richtigparker
Wenn die Anzahl der Touristen um 20% gestiegen ist, hat man eine größere Gesamtheit und damit geänderte Anteile:
Touristen: $\frac{36}{106} \approx 34\%$ Berliner: $\frac{70}{106} \approx 66\%$
Ein Drittel der Touristen parken nach wie vor falsch, das sind gerundet 11,3 %, zwei Drittel parken richtig, also gerundet 22,6 %. Die restlichen Werte ergeben sich durch Subtraktion bzw. Addition, da die rechte Spalte gegeben ist.
Es sind auch andere Begründungen für die Bestimmung der Werte möglich.
<u>Vierfeldertafel – Sommer:</u>
<table>
<tr><td></td><td>B</td><td>$\overline{B}$</td><td>Summe</td></tr>
<tr><td>F</td><td>0,067</td><td>0,113</td><td>0,18</td></tr>
<tr><td>$\overline{F}$</td><td>0,594</td><td>0,226</td><td>0,82</td></tr>
<tr><td>Summe</td><td>0,661</td><td>0,339</td><td>1</td></tr>
</table>
Interpretation:
Während im Frühjahr jedes 14. Berliner Fahrzeug falsch geparkt hatte (also ein Anteil von $ant = \frac{0,05}{0,70} \approx 7,1\%$), war dieser Anteil in der Sommeruntersuchung auf über 10,1% gestiegen, und das bei gleich bleibenden Verhalten der Touristen. Liegt dies möglicherweise an einer Verknappung des Parkraums im Sommer durch die höhere Zahl der Touristen?
</td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>55</td><td>20</td></tr>
</table>

STOCHASTIK 2

III.2 Rund um den HSV

Der Hamburger SV trägt seine Heimspiele in der 57 000 Zuschauer fassenden Arena im Volkspark aus (siehe nebenstehende Abbildung).

Arena des HSV

a) In der ersten Reihe eines Sitzbereichs befinden sich 31 Plätze, von denen im letzten Saisonspiel 29 besetzt werden.

- Berechnen Sie die Anzahl aller Möglichkeiten, wie sich die 29 (unterscheidbaren) Personen auf die 31 Plätze verteilen können.
- Berechnen Sie die Anzahl aller Möglichkeiten, wie sich die freien Plätze verteilen könnten. **15 P**

b) Die Bundesligastatistik über viele Jahre weist aus, dass im Mittel etwa 3 Tore pro Spiel (Spieldauer: 90 Minuten) fallen.

Ein Zuschauer verlässt während der Spielzeit für 3 Minuten seinen Sitzplatz, um die Toilette aufzusuchen. Auf dem Weg überlegt er sich, ob er bis zu seiner Rückkehr ein Tor „verpasst“ haben wird. Sie sollen deshalb gleich die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass ausgerechnet in diesen 3 Minuten mindestens ein Tor fällt. Bitte lesen Sie aber vorher den folgenden Hinweis:

Hinweis: Nehmen Sie an, dass der Erwartungswert μ der Anzahl T der in einem fest ausgewählten Zeitintervall fallenden Tore während eines Bundesligaspiels nur von der Länge dieses Zeitintervalls abhängig ist und zu dieser proportional ist.

Dann kann man für T die Poissonverteilung verwenden: $P(\{T=k\}) = \frac{1}{e^{\mu}} \cdot \frac{\mu^k}{k!}$.

- Bestimmen Sie das hier passende μ und ermitteln Sie nun damit die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass ausgerechnet in der Toilettenpause mindestens ein Tor fällt.
- Untersuchen Sie auch, ob die Annahmen aus dem Hinweis realistisch sind. **15 P**

Ein Busunternehmen aus Flensburg bietet den Transport zum Stadion an. Es setzt dazu zwei Busse mit insgesamt 92 Plätzen ein. Man kann einen Busplatz telefonisch oder per Internet buchen, braucht aber erst beim Fahrtantritt zu zahlen. Der Andrang bei Fußballspielen ist erfahrungsgemäß groß, und das Angebot ist stets ausgebucht. Allerdings werden im Mittel nur 90 % der gebuchten Plätze tatsächlich wahrgenommen. Wegen des Nichtwahrnehmens von gebuchten Fahrten bietet das Unternehmen deshalb 101 Plätze – also mehr als vorhanden – zur Buchung an. Nehmen Sie an, dass die Anzahlen der nicht kommenden bzw. kommenden Bucher binomialverteilt sind.

Für die folgenden Teile c) und d) können Sie die Tabelle in der Anlage 1 zur Hilfe nehmen oder näherungsweise mit der Normalverteilung rechnen.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei Fahrtantritt mehr als 92 Fahrgäste erscheinen, dass also mindestens eine Person mit gebuchten Plätzen abgewiesen werden muss. **10 P**

d) Bestimmen Sie die Maximalzahl der Buchungen, die das Unternehmen zulassen kann, so dass es mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % zu keinen Überbuchungen kommt. **15 P**

Das Busunternehmen will erreichen, dass der Anteil der Absagen sinkt. Deshalb ändert es seine Vertragsbedingungen dahingehend, dass schon gleich bei der Buchung eine Anzahlung von 5 € zu zahlen ist, die bei Nichterscheinen nicht zurückgezahlt wird.

e) Während der nächsten 1000 Buchungen soll untersucht werden, ob die neue Regelung zu einer Senkung der Absagerquote führt.
Leiten Sie dazu eine Entscheidungsregel her. (Ermitteln Sie die Anzahl K von Absagen so, dass man gerade noch – statistisch begründet – behaupten kann, dass die Maßnahme erfolgreich war. Gehen Sie dabei von einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$ aus, d.h. die Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art soll höchstens 5 % sein). **15 P**

Für die Aufgabenteile f) und g) gehen Sie nun von folgenden Daten aus:

- Tatsächlich werden im Mittel nur noch **6 %** der gebuchten Plätze nicht in Anspruch genommen.
- Der Fahrpreis beträgt 20 €. Ein gebuchter Kunde, der nicht kommt, bringt dem Unternehmer also eine Einnahme von 5 € ein, ein gebuchter Kunde, der mitfährt, bringt eine Einnahme von 20 €.

f) Berechnen Sie die erwarteten Einnahmen, wenn das Busunternehmen keine Überbuchungen zulässt. **10 P**

g) Das Unternehmen lässt nun immerhin 5 Überbuchungen zu, nimmt also immer 97 Buchungen an. Kunden, welche die gebuchte Fahrt wegen Überbuchung nicht antreten können, bekommen die Anzahlung zurückerstattet und verursachen zusätzliche Entschädigungskosten von 25 €.

- Ermitteln Sie – je nachdem wie viele Absagen anfallen – die maximal mögliche und die minimal mögliche Einnahme des Unternehmens für eine Fahrt zu einem HSV-Spiel.
- Um eine Bilanz aufzustellen, begründen Sie die folgenden Aussagen:
  - Das Unternehmen hat sichere Einnahmen E_1 von 485 €.
  - Stellen Sie sich vor, dass alle Bucher, die zur Fahrt erscheinen, zunächst die fehlenden 15 € bezahlen.
    Der Erwartungswert E_2 für diese Einnahmen beträgt dann 1367,70 €.
  - Erst kurz vor der Abfahrt erhalten diejenigen Kunden, die wegen Überbuchung nicht mitfahren können, ihre Fahrtkosten von 20 € zurück und außerdem 25 € Entschädigung. Der Erwartungswert dieser Auszahlungen beträgt:

$$K = 45€ \cdot \begin{pmatrix} 5 \cdot B(97;0{,}06\,;\,0) + 4 \cdot B(97;0{,}06\,;\,1) + 3 \cdot B(97;0{,}06\,;\,2) \\ +2 \cdot B(97;0{,}06\,;\,3) + 1 \cdot B(97;0{,}06\,;\,4) \end{pmatrix}$$

    Dennoch lohnt es sich finanziell für das Unternehmen, die 5 Überbuchungen zuzulassen. **20 P**

Anlage 1 zur Aufgabe „Rund um den HSV“, Aufgabenteile c) und d)

Tabellenauszug für <u>akkumulierte</u> Binomialverteilungswerte

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i}$$

$p = 0{,}1$

		n											
		92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103
	0	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0007	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
	2	0,0039	0,0036	0,0033	0,0030	0,0028	0,0025	0,0023	0,0021	0,0019	0,0018	0,0016	0,0015
	3	0,0145	0,0134	0,0125	0,0115	0,0107	0,0099	0,0092	0,0085	0,0078	0,0072	0,0067	0,0062
	4	0,0408	0,0382	0,0357	0,0334	0,0312	0,0291	0,0272	0,0254	0,0237	0,0221	0,0206	0,0192
k	5	0,0922	0,0870	0,0821	0,0775	0,0731	0,0689	0,0649	0,0612	0,0576	0,0542	0,0510	0,0479
	6	0,1750	0,1667	0,1587	0,1511	0,1437	0,1366	0,1299	0,1234	0,1172	0,1112	0,1055	0,1000
	7	0,2880	0,2767	0,2657	0,2550	0,2446	0,2345	0,2247	0,2152	0,2061	0,1972	0,1886	0,1803
	8	0,4214	0,4081	0,3949	0,3820	0,3693	0,3568	0,3446	0,3326	0,3209	0,3094	0,2982	0,2872
	9	0,5598	0,5459	0,5321	0,5184	0,5048	0,4912	0,4778	0,4645	0,4513	0,4382	0,4254	0,4126
	10	0,6874	0,6746	0,6617	0,6488	0,6358	0,6227	0,6095	0,5963	0,5832	0,5700	0,5568	0,5437
	11	0,7931	0,7825	0,7717	0,7607	0,7495	0,7381	0,7266	0,7149	0,7030	0,6910	0,6789	0,6667
	12	0,8723	0,8644	0,8562	0,8478	0,8391	0,8301	0,8209	0,8115	0,8018	0,7919	0,7819	0,7716
	13	0,9265	0,9211	0,9154	0,9095	0,9033	0,8969	0,8902	0,8833	0,8761	0,8687	0,8610	0,8531

Anlage 2 zur Aufgabe „Rund um den HSV“, Aufgabenteil g)

Tabellenauszug für Binomialverteilungswerte

$$\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

$p = 0{,}06$

		n								
		92	93	94	95	96	97	98	99	100
	0	0,0034	0,0032	0,0030	0,0028	0,0026	0,0025	0,0023	0,0022	0,0021
	1	0,0198	0,0188	0,0179	0,0170	0,0161	0,0153	0,0145	0,0138	0,0131
	2	0,0575	0,0552	0,0530	0,0509	0,0489	0,0469	0,0450	0,0432	0,0414
	3	0,1101	0,1069	0,1038	0,1008	0,0978	0,0949	0,0920	0,0892	0,0864
	4	0,1564	0,1536	0,1508	0,1480	0,1451	0,1423	0,1394	0,1366	0,1338
k	5	0,1756	0,1745	0,1732	0,1719	0,1705	0,1689	0,1673	0,1657	0,1639
	6	0,1626	0,1634	0,1640	0,1646	0,1650	0,1653	0,1656	0,1657	0,1657
	7	0,1275	0,1296	0,1316	0,1336	0,1354	0,1372	0,1389	0,1405	0,1420
	8	0,0865	0,0889	0,0914	0,0938	0,0962	0,0985	0,1008	0,1031	0,1054
	9	0,0515	0,0536	0,0557	0,0579	0,0600	0,0622	0,0644	0,0666	0,0687
	10	0,0273	0,0287	0,0302	0,0318	0,0333	0,0349	0,0366	0,0382	0,0399
	11	0,0130	0,0138	0,0147	0,0157	0,0166	0,0176	0,0187	0,0197	0,0209
	12	0,0056	0,0060	0,0065	0,0070	0,0075	0,0081	0,0086	0,0092	0,0099
	13	0,0022	0,0024	0,0026	0,0029	0,0031	0,0034	0,0036	0,0039	0,0043

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Die zuerst ankommende Person hat 31 Plätze zur Auswahl, die zweite 30, usw. und die letzte noch 3. Aufstellen des Terms liefert: $31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot ... \cdot 3 = \frac{31!}{2!} \approx 4{,}1 \cdot 10^{33}$. (Es gibt ungefähr $4{,}1 \cdot 10^{33}$ Möglichkeiten für die Belegung.) Da man den freien Plätzen nicht verschiedene Personen zuordnen kann, gibt es $\binom{31}{2} = 465$ Möglichkeiten für die freien Plätze.	15		
b)	Wenn man annimmt, dass in fest gewählten Spielzeitintervallen, die erwarteten Anzahlen an Toren proportional zur Läge der Intervalle ist, dann hat man aus der gegebenen Statistik für ein ganzes Spiel von 90 Minuten den Erwartungswert von 3 Toren, also für ein Zeitintervall von 3 Minuten den Erwartungswert von $\mu = 3 \cdot \frac{3}{90} = 0{,}1$ (Toren). Die angenommene Poissonverteilung für $\mu = 0{,}1$ ist teilweise in folgender Tabelle berechnet: K | 0 | 1 | 2 | 3 $P(\{T=k\})$ | 0,905 | 0,090 | 0,005 | Praktisch Null Die Wahrscheinlichkeit für „mindestens ein Tor“ beträgt also: $P = 1 - P(\{T=0\}) \approx 9{,}5\%$. *Mögliche Argumente:* Die Annahmen sind nicht unproblematisch: Handelt es sich um ein „normales“ Bundesligaspiel, für das der erwartete Wert 3 Tore insgesamt beträgt? Sicher ist die erwartete Torzahl in gleichlangen Intervallen auch nicht immer gleich, z.B. nehmen führende Mannschaften schon mal einen Gang heraus. Zum Spielende kann die Kondition nachlassen, andererseits fallen häufig in der letzten Spielminute noch Tore, weil die Konzentration der Verteidigung nachlässt oder weil eine Mannschaft unter Zeitdruck besonders offensiv spielt. Die erwartete Torausbeute kann auch zum Spielende abnehmen, weil eine Mannschaft sich schon mit einem Spielergebnis abgefunden hat oder weil eine Mannschaft unter Zeitdruck besonders offensiv spielt.		10	5
c)	Es erscheinen bei Fahrtantritt mehr als 92 Fahrgäste, wenn zu wenig Personen absagen, genauer, wenn die Anzahl der absagenden Personen kleiner als 9 ist. Die Anzahl der absagenden Personen kann als $B(101 ; 0.1)$ verteilt angenommen werden:			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III

$p = 0{,}1$

k \ n	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103
0	0,0001	**0,0001**	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,0007	0,0006	**0,0006**	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
2	0,0039	0,0036	0,0033	**0,0030**	0,0028	0,0025	0,0023	0,0021	0,0019	0,0018	0,0016	0,0015
3	0,0145	0,0134	0,0125	0,0115	**0,0107**	0,0099	0,0092	0,0085	0,0078	0,0072	0,0067	0,0062
4	0,0408	0,0382	0,0357	0,0334	0,0312	**0,0291**	0,0272	0,0254	0,0237	0,0221	0,0206	0,0192
5	0,0922	0,0870	0,0821	0,0775	0,0731	0,0689	**0,0649**	0,0612	0,0576	0,0542	0,0510	0,0479
6	0,1750	0,1667	0,1587	0,1511	0,1437	0,1366	0,1299	**0,1234**	0,1172	0,1112	0,1055	0,1000
7	0,2880	0,2767	0,2657	0,2550	0,2446	0,2345	0,2247	0,2152	**0,2061**	0,1972	0,1886	0,1803
8	0,4214	0,4081	0,3949	0,3820	0,3693	0,3568	0,3446	0,3326	0,3209	**0,3094**	0,2982	0,2872
9	0,5598	0,5459	0,5321	0,5184	0,5048	0,4912	0,4778	0,4645	0,4513	0,4382	**0,4254**	0,4126
10	0,6874	0,6746	0,6617	0,6488	0,6358	0,6227	0,6095	0,5963	0,5832	0,5700	0,5568	**0,5437**
11	0,7931	0,7825	0,7717	0,7607	0,7495	0,7381	0,7266	0,7149	0,7030	0,6910	0,6789	0,6667
12	0,8723	0,8644	0,8562	0,8478	0,8391	0,8301	0,8209	0,8115	0,8018	0,7919	0,7819	0,7716
13	0,9265	0,9211	0,9154	0,9095	0,9033	0,8969	0,8902	0,8833	0,8761	0,8687	0,8610	0,8531

Also beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P = \sum_{k=0}^{8} \binom{101}{k} \cdot 0{,}1^k \cdot 0{,}9^{101-k} \approx 31\% .$$

Das ist der fette Wert in der Tabelle bei $n = 101$.

Wegen $n \cdot p \cdot (1-p) = 101 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 \approx 9{,}1$ kann das Ergebnis auch näherungsweise mit Hilfe der Normalverteilung bestimmt werden:

$$P(Y \le 8) \approx \Phi\left(\frac{8{,}5 - 10{,}1}{\sqrt{9{,}09}}\right) \approx 0{,}3 .$$

10

d) Es wird der größte Wert für n gesucht, für den der Ausdruck $\sum_{k=0}^{n-92-1} \binom{n}{k} \cdot 0{,}1^k \cdot 0{,}9^{n-k}$ kleiner als 5% ist. Dazu muss man die fetten Werte in der obigen Tabelle nach rechts durchgehen, bis der Wert gerade noch $\le 5\%$. Das ist für $n = 97$ der Fall.

Will man hier wieder mit normalverteilten Näherungen arbeiten, wählt man am besten als Zufallsvariable Y die möglichen Anzahlen der n Personen, die tatsächlich an der Fahrt teilnehmen wollen. Die Frage ist für welches n der Wert $P(\{Y \le 92\})$ noch ≥ 95 % ist. Die Variable Y ist n-0,9-binomialverteilt.

Die Laplace-Bedingung ist ab $n = 94$ erfüllt. Man wird ein n schätzen, das größer als 93 ist. Somit rechnen wir:

$P(\{Y \le 92\}) \approx \Phi\left(\frac{92{,}5 - 0{,}9n}{\sqrt{0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot n}}\right)$. Der rechte Wert muss also noch gerade $\ge$ 95% sein, also muss das Argument $\ge 1{,}645$ sein. Mit der Substitution $m = \sqrt{n}$ und Rundungen auf vier Dezimalen folgt $n \le 97{,}3...$.

15

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	Die Frage zielt auf die Bestimmung des Ablehnungsbereichs eines einseitigen Hypothesentests über den Parameter *p* einer Binomialverteilung mit $H_0 : p \geq 0{,}1$ und $H_1 : p < 0{,}1$. *p* sei dabei die Wahrscheinlichkeit, dass eine Buchung abgesagt wird. Wenige Absagen sprechen gegen H_0. Die Testvariable *T* beschreibe die möglichen Anzahlen von Absagen. Wir nehmen auch hier an, dass *T* binomialverteilt ist. Es ist also der größte Wert K zu bestimmen für den gilt $\sum_{k=0}^{K} B(1000;0{,}1;k) \leq 5\%$. *T* sei *B*(100 ; 0.1) binomialverteilt. Dann ist $\frac{T-100+0{,}5}{\sqrt{90}}$ annähernd 0-1-normalverteilt. Mit Hilfe der Tafel erhält man: $P\left(\frac{X-100+0{,}5}{\sqrt{90}} \leq -1{,}645\right) \approx 0{,}05 \Leftrightarrow P(T \leq 83{,}9) \approx 0{,}05$. Wenn also unter 1 000 Buchungen nur 83 oder weniger Absagen auftreten, kann man von einer auf dem 5 %-Niveau signifikanten Senkung der Absagerquote ausgehen.		15	
f)	Wir rechnen den Erwartungswert für die Einnahmen aus, wobei keine Überbuchungen zugelassen werden: Die Einnahmen setzen sich dann zusammen aus den Anzahlungen und den Restzahlungen. Wir berechnen die zugehörigen Erwartungswerte: $E_1 = 92 \cdot 5\,€ = 460\,€$ und $E_2 = 92 \cdot 0{,}94 \cdot 15\,€ = 1297{,}20\,€$. Die Addition ergibt ***E* = 1757,20 €**.	10		
g)	• Wenn genau 5 Personen absagen, sind die Einnahmen von $92 \cdot 20\,€ + 5 \cdot 5\,€ = 1\,865\,€$ offenbar maximal: Sagen nämlich weniger ab, entfallen für Überbuchungen die betreffenden 5 € und es fallen zusätzlich Kulanzkosten an. Sagt z. B. keiner ab, so ist die Einnahmebilanz $92 \cdot 20\,€ - 5 \cdot 25\,€ = 1\,715\,€$. Sagen mehr als 5 Personen ab, so werden bei jeder weiteren absagenden Person die Einnahmen von 20 € durch nur 5 € ersetzt. Der Extremfall, (der auch extrem unwahrscheinlich ist) besteht darin, dass alle absagen, dann gäbe es nur noch Einnahmen in Höhe von $97 \cdot 5\,€ = 485\,€$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	<u>Bemerkung:</u> Abgesehen davon, dass dieser Fall praktisch unmöglich ist, wäre es natürlich noch schlimmer für das Busunternehmen, wenn nur eine Person nicht absagt, weil dann ein Bus fahren müsste. Ähnliches gilt, wenn so viele Personen absagen, dass man mit dem größeren Bus nicht auskommt, aber das sind Gewinnfragen, um die es hier nicht geht. • Die Einnahmen setzen sich dann zusammen aus den Anzahlungen, den Restzahlungen und den negativ gerechneten Kulanzkosten für die abzuweisenden Kunden. Die Rechnung wird dabei einfacher, wenn man sich – wie vorgeschlagen – vorstellt, dass die abzuweisenden Kunden erst die (5+15) € zahlen und dann nicht (25+5) €, sondern 45 € zurückbekommen. $E_1 = 97 \cdot 5 € = 485 €$, $E_2 = 97 \cdot 0{,}94 \cdot 15 € = 1367{,}70 €$, $K = \left(\sum_{i=0}^{4} (5-i)\ B(97;0{,}06,i) \right) \cdot 45 € = 24{,}60 €$. Die 5 Werte der Binomialverteilung können schnell aus der Tabelle für $n = 97$ entnommen werden, also $K = (5 \cdot 0025 + 4 \cdot 0{,}0153 + 3 \cdot 0{,}0469 + 2 \cdot 0{,}0949 + 1 \cdot 0{,}1423) \cdot 45 € \approx 24{,}60 €$. Die Addition ergibt ***E* = 1828,10 €.** Der Vergleich mit f) zeigt, dass es sich für das Unternehmen finanziell lohnt, die 5 Überbuchungen zuzulassen.			20
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Bildung und Sport

Schriftliche Abiturprüfung
Schuljahr 2007/2008

27. März 2008, 9.00 Uhr

Leistungskurs Mathematik

Gymnasien, Gesamtschulen, Berufliche Schulen

Unterlagen für die Lehrerinnen und Lehrer – Zweittermin

Diese Unterlagen sind nicht für die Prüflinge bestimmt.

Diese Unterlagen enthalten:

1 Allgemeines
2 Rückmeldebogen
3 Hinweise für die Auswahl der Aufgaben
4 Hinweise zum Korrekturverfahren
5 Aufgaben, Erwartungshorizonte und die Bewertung für jede Aufgabe

1 Allgemeines

- Weisen Sie bitte die Schülerinnen und Schüler auf die allgemeinen Arbeitshinweise am Anfang der Schülermaterialien hin.
- Die Schülerinnen und Schüler kennzeichnen ihre Unterlagen nur mit der Kursnummer und ihrer Schülernummer, nicht mit ihrem Namen.
- Die Arbeitszeit beträgt **300 Minuten.**
- Erlaubte Hilfsmittel: Nichtprogrammierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner, Formelsammlung „Das große Tafelwerk interaktiv“, Cornelsen-Verlag, Operatorenliste, Rechtschreiblexikon.

2 Rückmeldebogen für die Zweitkorrektur

Bitte umgehend ausfüllen und an B 1-Z faxen!

Behörde für Bildung und Sport
B 1-Z

Fax 42 79 67-006

Schulchiffre:

Aufgabenstatistik und Information für die Zweitkorrektoren

in Fächern mit zentraler Aufgabenstellung

Fach: Mathematik, Leistungskurs **Kurs-Nummer:** _____

Bearbeitet wurden die folgenden Aufgaben:

Aufgabe Nr.	Anzahl	
I.1	von	Prüflingen
I.2	von	Prüflingen
II.1	von	Prüflingen
II.2	von	Prüflingen
III.1	von	Prüflingen
III.2	von	Prüflingen

Datum: _____

Unterschrift: _____

3 Aufgabenauswahl

- Sie erhalten **sechs** Aufgaben – **I.1, I.2** (Analysis) und **II.1, II.2** (Lineare Algebra / Analytische Geometrie) und **III.1, III.2** (Stochastik).
- Sie wählen **genau zwei Aufgaben aus genau den zwei Sachgebieten I und II** oder **I und III** aus und reichen diese an die Schülerinnen und Schüler weiter.
- Sie überprüfen gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Vollständigkeit der Arbeitsunterlagen.
- Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten beide Aufgaben.
- Sie vermerken auf der Reinschrift, welche Aufgabe sie bearbeitet haben.

4 Korrekturverfahren

- Die Korrekturen werden gemäß der „Richtlinie für die Korrektur und Bewertung der Prüfungsleistungen im schriftlichen Teil der Abiturprüfung“ vorgenommen.
- Die Bewertung und Benotung der Arbeiten wird auf einem gesonderten Blatt vorgenommen, siehe Anlagen „Bewertungsbögen für die Erst- und die Zweitkorrektur“ (S. 4 und 5).
- Die Bewertungsbögen verbleiben in der Schule.
- Die Originale der Schülerarbeiten werden zusammen mit dem Bewertungsbogen für die Zweitkorrektur und einer Kursliste, die nur die Schülernummern enthalten darf, sowie einem Exemplar der Lehrermaterialien zu einem Päckchen gepackt.
- Zu den Zeitvorgaben, Warnmeldungen und dem weiteren Verlauf des Verfahrens siehe den „Ablaufplan für die Durchführung der schriftlichen Prüfungen“.

Bei der Korrektur der Schülerarbeiten kann es auf Grund von unterschiedlichen didaktischen Konzepten oder Verkürzungen auf Grund von Verabredungen zu unterschiedlichen Bewertungen von Schülerleistungen kommen, insbesondere im formalen Bereich. Bisher ließen sich solche unterschiedlichen Sichtweisen im Gespräch zwischen Referent und Korreferent klären.

Im Abitur mit zentralen Anteilen ist eine solche Klärung wegen des anonymisierten Korrekturverfahrens nicht möglich. Deshalb ist insbesondere auf Seiten des Korreferenten ein sensibles Vorgehen gefordert. Auch wenn der Korreferent eine andere Korrektheit von seinen Schülerinnen und Schülern fordern würde, sollte er darauf achten, ob der Referent bei seinen Korrekturen durchgängig anders verfahren ist. Es gilt der Grundsatz, dass die Schülerinnen und Schüler durch unterschiedliche Sichtweisen nicht benachteiligt werden dürfen.

Die Lösungsskizzen in den Erwartungshorizonten zu den einzelnen Aufgaben geben Hinweise auf die erwarteten Schülerleistungen. Oft sind aber Lösungsvarianten möglich, die in der Skizze nur zum Teil beschrieben werden konnten. Grundsätzlich gilt deshalb, dass alle Varianten, die zu richtigen Lösungen führen, mit voller Punktzahl bewertet werden, unabhängig davon, ob die gewählte Variante in der Lösungsskizze aufgeführt ist oder nicht.

5 Aufgaben, Erwartungshorizonte und Bewertungen

Erwartungshorizont:

Kursiv gedruckte Passagen sind Hinweise an die korrigierenden Lehrkräfte. Sie sind nicht Bestandteile der erwarteten Schülerleistung.

Bewertung:

Jeder Aufgabe sind 100 Bewertungseinheiten (BWE) zugeordnet, insgesamt sind also 200 BWE erreichbar. Bei der Festlegung von Notenpunkten gilt die folgende Tabelle.

Bewertungs-einheiten	Erbrachte Leistung	Notenpunkte
≥ 190	≥ 95 %	15
≥ 180	≥ 90 %	14
≥ 170	≥ 85 %	13
≥ 160	≥ 80 %	12
≥ 150	≥ 75 %	11
≥ 140	≥ 70 %	10
≥ 130	≥ 65 %	9
≥ 120	≥ 60 %	8

Bewertungs-einheiten	Erbrachte Leistung	Notenpunkte
≥ 110	≥ 55 %	7
≥ 100	≥ 50 %	6
≥ 90	≥ 45 %	5
≥ 80	≥ 40 %	4
≥ 66	≥ 33 %	3
≥ 52	≥ 26 %	2
≥ 38	≥ 19 %	1
< 38	< 19 %	0

Die Note „ausreichend“ (5 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd die Hälfte (mindestens 45 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden ist. Dazu muss mindestens eine Teilaufgabe, die Anforderungen im Bereich II aufweist, vollständig und weitgehend richtig bearbeitet worden sein.

Die Note „gut“ (11 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd vier Fünftel (mindestens 75 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden sind. Dabei muss die Prüfungsleistung in ihrer Gliederung, in der Gedankenführung, in der Anwendung fachmethodischer Verfahren sowie in der fachsprachlichen Artikulation den Anforderungen voll entsprechen. Ein mit „gut“ beurteiltes Prüfungsergebnis setzt voraus, dass neben Leistungen in den Anforderungsbereichen I und II auch Leistungen im Anforderungsbereich III erbracht worden sind.

Bei erheblichen Mängeln in der sprachlichen Richtigkeit sind bei der Bewertung der schriftlichen Prüfungsleistung je nach Schwere und Häufigkeit der Verstöße bis zu drei Notenpunkte abzuziehen. Dazu gehören auch Mängel in der Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen sowie falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text.

Abiturprüfung 2008

Bewertungsbogen Erstkorrektur

Schulchiffre		**BeBo EKo M**	
Fach	Mathematik	**Schüler-Nummer**	
Kurstyp	LK		
Kurs-Nummer			

Aufgaben Nummer (z.B. I.2) ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)							BWE pro Aufgabe ↓
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	
							Summe der BWE ➔	

Bewertungstext

	Notenpunkte ➔

Dieser Bogen kann auch aus dem Internet unter **www.hera.bbs.hamburg.de** mit dem Anmeldenamen **abschluss** und dem Passwort **pruefung** zum rechnergestützten Ausfüllen heruntergeladen werden.

Abiturprüfung 2008

Bewertungsbogen Zweitkorrektur

Schulchiffre		**BeBo ZKo M**	
Fach	Mathematik	**Schüler-Nummer**	
Kurstyp	LK		
Kurs-Nummer			

Aufgaben Nummer (z.B. I.2) ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)							BWE pro Aufgabe ↓
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	
							Summe der BWE ➔	

Bewertungstext

	Notenpunkte ➔

Dieser Bogen kann auch aus dem Internet unter **www.hera.bbs.hamburg.de** mit dem Anmeldenamen **abschluss** und dem Passwort **pruefung** zum rechnergestützten Ausfüllen heruntergeladen werden.

ANALYSIS 1

I.1 Kettenlinie

Bei vielen technischen Problemen treten Kombinationen von Exponentialfunktionen auf. Zwei von ihnen, die besondere Namen tragen, sollen hier näher betrachtet werden.

Sinus hyperbolicus: $f_1(x) = \sinh(x) := \frac{1}{2} \cdot \left(e^x - e^{-x}\right)$

Cosinus hyperbolicus: $f_2(x) = \cosh(x) := \frac{1}{2} \cdot \left(e^x + e^{-x}\right)$

a) Untersuchen Sie die Funktionen sinh und cosh auf Nullstellen, Symmetrien und Asymptoten. Zeichnen Sie die Graphen dieser beiden Funktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem ein $\left(-3 \le x \le 3\right)$. **20 P**

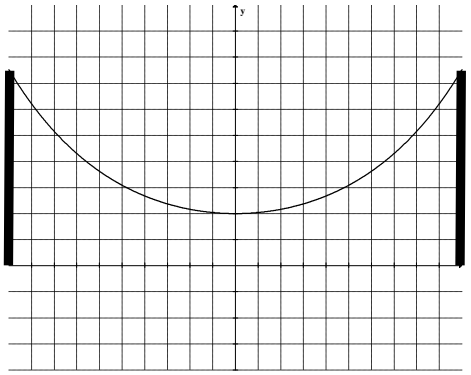
b) Die Namen dieser Funktionen erinnern nicht zufällig an die Funktionen Sinus und Cosinus; es gibt formale Ähnlichkeiten.

Zeigen Sie:

- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- $f_1'(x) = f_2(x)$ und $f_2'(x) = f_1(x)$
- sinh und cosh erfüllen die Differentialgleichung $f'' - f = 0$.

Geben Sie jeweils die entsprechenden Beziehungen für die Funktionen Sinus und Cosinus an. **10 P**

Spannt man ein Seil (oder eine Kette) zwischen zwei gleich hohen Türmen auf, so folgt seine Linie der so genannten Kettenlinie $y = k(x) = a \cdot \cosh\left(b \cdot x\right)$ mit $a, b > 0$.



c) Begründen Sie, dass a dabei die Höhe des tiefsten Seilpunktes über der Grundebene ist.
Untersuchen Sie, wie sich die Kettenlinie ändert, wenn sich bei festgehaltenem a der Parameter b vergrößert. **10 P**

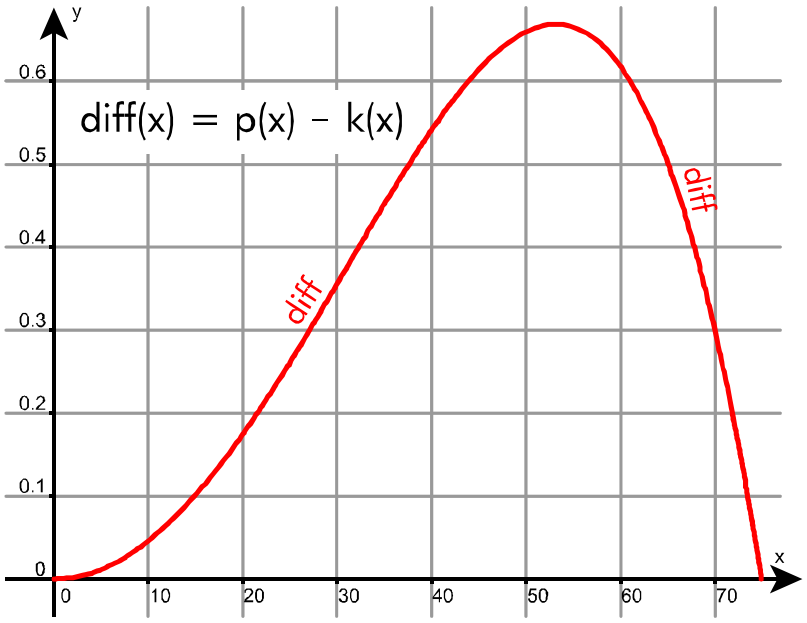
d) Ein Seil wird zwischen zwei jeweils 117,8 m hohen Türmen gespannt. Die Türme sind 150 m voneinander entfernt. Das Seil hat in der Mitte einen Bodenabstand von 80 m.

- Weisen Sie nach, dass die Kettenlinie für dieses Seil der Gleichung $k(x) = 80 \cdot \cosh\left(0{,}0125 \cdot x\right)$ folgt.
- Berechnen Sie den Winkel zwischen Seil und Turm am Befestigungspunkt des Seils.
- Untersuchen Sie, wie sich die Parameter a und b sowie der eben berechnete Winkel ändern, wenn man das Seil straffer spannt. **20 P**

e) Bestimmen Sie die Länge des bereits betrachteten Seils zwischen den Türmen. (Es folgt der Funktion mit der Gleichung $k(x) = 80 \cdot \cosh(0{,}0125 \cdot x)$.)

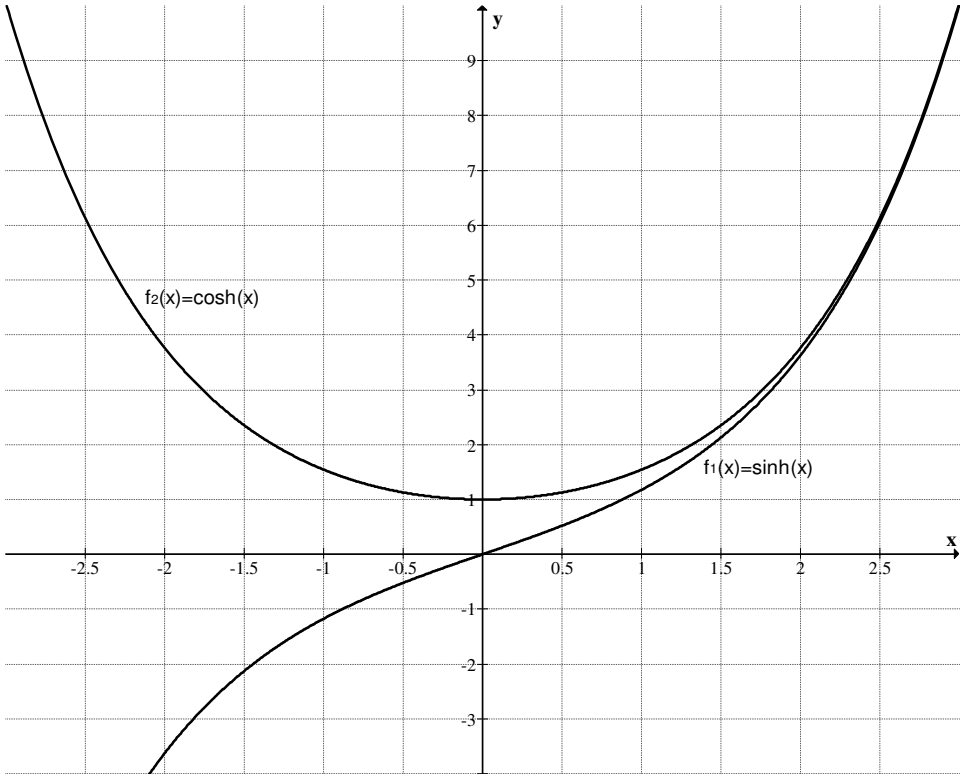
Hinweis: Für eine im Intervall [*c*; *d*] stetig differenzierbare Funktion f berechnet sich die Bogenlänge *l* des Graphen von *f* über [*c*; *d*] durch $l = \int_c^d \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$. **20 P**

f) Man kann *k* durch eine einfache quadratische Funktion *p* annähern, z. B. durch $p(x) = 80 + 0{,}00672 \cdot x^2$. Um eine hinreichend genaue Näherung für das gegebene Problem zu erreichen, sollte die Differenz der Seilhöhen, die durch *p(x)* und *k(x)* berechnet werden, zwischen den Türmen nie einen halben Meter überschreiten.



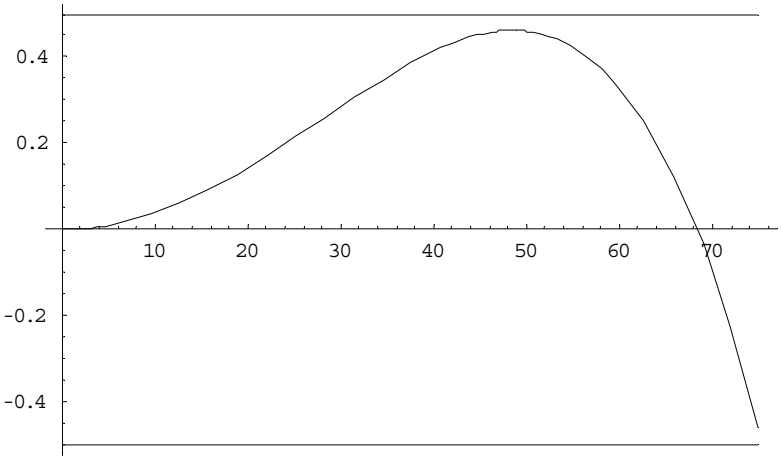
Entscheiden Sie, auch mithilfe der obigen Abbildung, ob *p* in diesem Sinn hinreichend genau ist, und ermitteln Sie gegebenenfalls eine Verbesserung der quadratischen Näherungsfunktion. Beurteilen Sie die erreichte Verbesserung. **20 P**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	<u>Sinus hyperbolicus:</u> $\frac{1}{2}\left(e^{x_0}-e^{-x_0}\right)=0 \Rightarrow e^{x_0}=e^{-x_0} \Rightarrow e^{2x_0}=1 \Rightarrow x_0=0$, Nullstelle bei $x_N=0$. Da $\sinh(-x)=0{,}5\cdot(e^{-x}-e^{x})=-\sinh(x)$, ist Sinus hyperbolicus eine ungerade Funktion und sein Graph damit zum Ursprung punktsymmetrisch. Mit $x\to\infty$ geht $e^{-x}\to 0$, und damit gilt $\sinh(x)\to 0{,}5\cdot e^{x}$. <u>Cosinus hyperbolicus:</u> Keine Nullstelle, da der Term in der Klammer als Summe zweier positiver Zahlen immer positiv ist. Da $\cosh(-x)=0{,}5\cdot(e^{-x}+e^{x})=\cosh(x)$, ist der Cosinus hyperbolicus eine gerade Funktion und sein Graph damit zur *y*-Achse spiegelsymmetrisch. Mit $x\to\infty$ geht $e^{-x}\to 0$, und damit gilt $\cosh(x)\to 0{,}5\cdot e^{x}$. Aufgrund der Geradheit des cosh ist dies auch die Asymptote für $x\to-\infty$. <u>Graphen der Funktionen:</u>  	10	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
b)	Nachrechnen liefert: • $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 0{,}5^2\left(\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2\right)$ $= 0{,}25 \cdot (2+2) = 1$. • $\sinh'(x) = 0{,}5 \cdot (e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$ und $\cosh'(x) = 0{,}5 \cdot (e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$. • Die beiden hyperbolischen Funktionen sind damit mit ihrer 2. Ableitung identisch. Damit sind sie Lösungen der angegebenen Differentialgleichung. Für die Winkelfunktionen gilt (Tafelwerk!) • $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. • $\sin'(x) = -\cos(x)$ und $\cos'(x) = -\sin(x)$. Die beiden Winkelfunktionen sind damit mit ihrer 4. Ableitung identisch. • Die entsprechende Differentialgleichung lautet damit $f'' + f = 0$.	5	5	
c)	Mit der Beachtung der Symmetrie der Kettenlinie und der Tatsache, dass das Seil in der Mitte am tiefsten hängt: $k(0) = a \cdot \cosh(b \cdot 0) = a \cdot 0{,}5 \cdot (2e^0) = a \cdot 0{,}5 \cdot 2 = a$. Dies ist das gewünschte Resultat. Wenn bei festgehaltenem *a* der Parameter *b* vergrößert wird, so ändert sich bei $x = 0$ nichts. Der Tiefpunkt der Funktion bleibt also erhalten. Für größere *x*-Werte vergrößern sich der Betrag der Argumente in der Exponentialfunktion. Da e^x im Wesentlichen den Funktionswert bestimmt, weil e^{-x} für große *x*-Werte sehr klein ist, wird auch der Funktionswert größer: Der Graph wird bei gleichem Minimum nach beiden Seiten steiler; er erreicht bei festgehaltenem *x* größere Höhen.		10	
d)	• Mit dem gegebenen Bodenabstand in der Mitte ergibt sich sofort $a = 80$. Einsetzen liefert: $80 \cdot 0{,}5 \cdot \left(e^{0{,}0125 \cdot 75} + e^{-0{,}0125 \cdot 75}\right) \approx 117{,}808$. Da vorausgesetzt war, dass es sich um eine Kettenlinie handelt, ist damit alles gezeigt. • Der Winkel ergibt sich aus der Steigung der Kettenlinie an der Stelle $x = 75$: $k'(75) = 80 \cdot \sinh(0{,}0125 \cdot 75) \cdot 0{,}0125 \approx 1{,}08099$. Damit ergibt sich das Winkelmaß zu $\alpha = 90° - \arctan(k'(75)) \approx 42{,}77°$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	• Wenn das Seil straffer gespannt wird, so hängt es in der Mitte höher. Also wächst der Parameter *a*. Da zugleich das Höhenwachstum zwischen Mitte und Türmen abnimmt, muss (mit dem Ergebnis von c) oder z.B. durch Nachrechnen an einem Beispiel) der Parameter *b* abnehmen. Da das Seil „waagerechter" in den Aufhängungspunkten ankommt, wird der Winkel größer, bleibt aber unter 90°.	5	15	
e)	Da hier $k'(x) = (80 \cdot \cosh(0{,}0125 \cdot x))' = \sinh(0{,}0125 \cdot x)$, ist $\sqrt{1 + (k'(x))^2} = \cosh(0{,}0125 \cdot x)$. Damit ergibt sich $l = 2 \cdot \int_0^{75} \cosh(0{,}0125 \cdot x)dx = 2 \cdot 80 \cdot \left[\sinh(0{,}0125 \cdot x)\right]_0^{75}$ $\approx 172{,}96$ Das Seil ist also fast 173 m lang *(und damit etwa 23 m länger als die direkte Verbindung zwischen den Aufhängungspunkten)*.		15	5
f)	Sei $diff(x) := p(x) - k(x)$. Gefragt ist, ob der Betrag von *diff* im Intervall [0, 75] immer unter 0.5 bleibt. Ersichtlich ist *diff*(0) = 0 und *diff* (75) ≈ 0. Weiter erkennt man an der Skizze, dass etwa im Intervall [37 , 65] die Genauigkeit nicht ausreicht. So ist z.B. $diff(50) \approx 0{,}66$ - hier ist die maximale Abweichung also weit überschritten. *(Die Methode, diff abzuleiten, dann z.B. mit dem Newton-Verfahren die Nullstelle der Ableitung zu finden – diese Extremstelle liegt bei $x_E \approx 53{,}15$ – und schließlich den Funktionswert an dieser Stelle zu bestimmen – er beträgt etwa 0,669, ist ebenso sinnvoll.)* Zur Verbesserung der Näherung gibt es mehrere Möglichkeiten. • Zunächst kann man die beiden Parameter von *p* verändern. Leicht einzusehen ist, dass die veränderte quadratische Funktion p_1 mit $p_1(x) = 79{,}7 + 0{,}00672x^2$ die Differenzfunktion einfach um 30 cm nach unten schiebt; damit bleibt das Maximum der Differenz mit knapp 40 cm im genügenden Bereich, während in der Mitte (mit –30 cm Differenz) und am Rand (mit -31 cm Differenz) ebenfalls noch eine genügende Genauigkeit erreicht wird. Allerdings stimmt p_1 mit *k* gerade an den „empfindlichen" Stellen nicht mehr so gut überein.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	• Möchte man die Übereinstimmung bei $x = 0$ erhalten, so muss der Koeffizient des quadratischen Terms verändert werden – genauer gesagt, er muss kleiner werden. Aber Vorsicht! Hiermit wird der „genäherte“ Aufhängungspunkt am Turm nach unten verlegt! Deswegen ist der Raum für die Anpassung klein. Die folgende Abbildung zeigt die Differenz für $p_2(x) = 80 + 0{,}00664x^2$:  • Ebenso sinnvoll ist es, statt einer Funktion 2. Grades eine gerade Funktion 4. Grades zu verwenden und hier z.B. $x = 0$, $x = 50$ und $x = 75$ als Stützstellen zu verwenden. Bei diesen Stützstellen ergibt sich für die Näherungsfunktion (durch Lösung des zugehörigen 2 x 2 LGS) $p_4(x) = 80 + 0{,}006244 \cdot x^2 + 8{,}49 \cdot 10^{-8} \cdot x^4$. Diese Funktion weicht übrigens um höchstens 6 mm von der Kettenlinie ab. Generell ist die Kettenlinie durch eine ganzrationale Funktion 4. Grades deutlich besser zu nähern! *Hinweis: Die Aufgabenstellung verlangt nicht die Angabe mehrerer Verbesserungsmöglichkeiten für die Näherung von k. Auch die „einfachste“ Lösung ist, wenn sie denn richtig begründet ist, eine vollständige Aufgabenlösung.*		5	15
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

ANALYSIS 2

I.2 Hecken

Für jedes $c \neq 0$ ist eine Funktion f_c gegeben durch $f_c(x) = \dfrac{c \cdot e^x}{\left(e^x + 10\right)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen von f_c mit den Koordinatenachsen.

Untersuchen Sie den Graphen von f_c auf Extrempunkte.
Hinweis: Argumentieren ohne die zweite Ableitung ist möglich.
Entscheiden Sie, für welches c Hochpunkte vorliegen.
Geben Sie c so an, dass $H(\ln 10 \mid 11)$ Hochpunkt des Graphen von f_c ist. **20 P**

b) Im Koordinatensystem in der Anlage sind der Graph der Funktion f_{440} und der Graph der Funktion g mit $g(x) = 40 \cdot e^{-x}$ eingezeichnet. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Graphen von f_{440} und g.
Zur Kontrolle: Für die Schnittstelle x_s gilt $x_s = \ln\left(1 + \sqrt{11}\right) \approx 1{,}46$. **10 P**

Für eine große Zierhecke pflanzt eine Landschaftsgärtnerin verschiedene Sträucher der Sorten F und G in einer Reihe abwechselnd ein. Zum Zeitpunkt des Pflanzens sind die Sträucher jeweils 4 Dezimeter hoch. Die Funktionen f_{440} und g beschreiben vereinfachend die momentanen Wachstumsgeschwindigkeiten der Sträucher F und G (in Dezimeter pro Jahr) in Abhängigkeit von der Zeit x, gemessen in Jahren ab dem Zeitpunkt des Einpflanzens.

c) Ermitteln Sie die Stammfunktionen F und G, die die Strauchhöhen der Sorten F bzw. G in Abhängigkeit von der Zeit x darstellen.
Hinweis: Die Substitution $u = e^x + 10$ kann hilfreich sein.
Berechnen Sie die Strauchhöhen beider Sorten zum Zeitpunkt gleicher momentaner Wachstumsgeschwindigkeiten. **25 P**

Arbeiten Sie in jedem Fall mit folgenden Funktionen für die Strauchhöhe weiter:

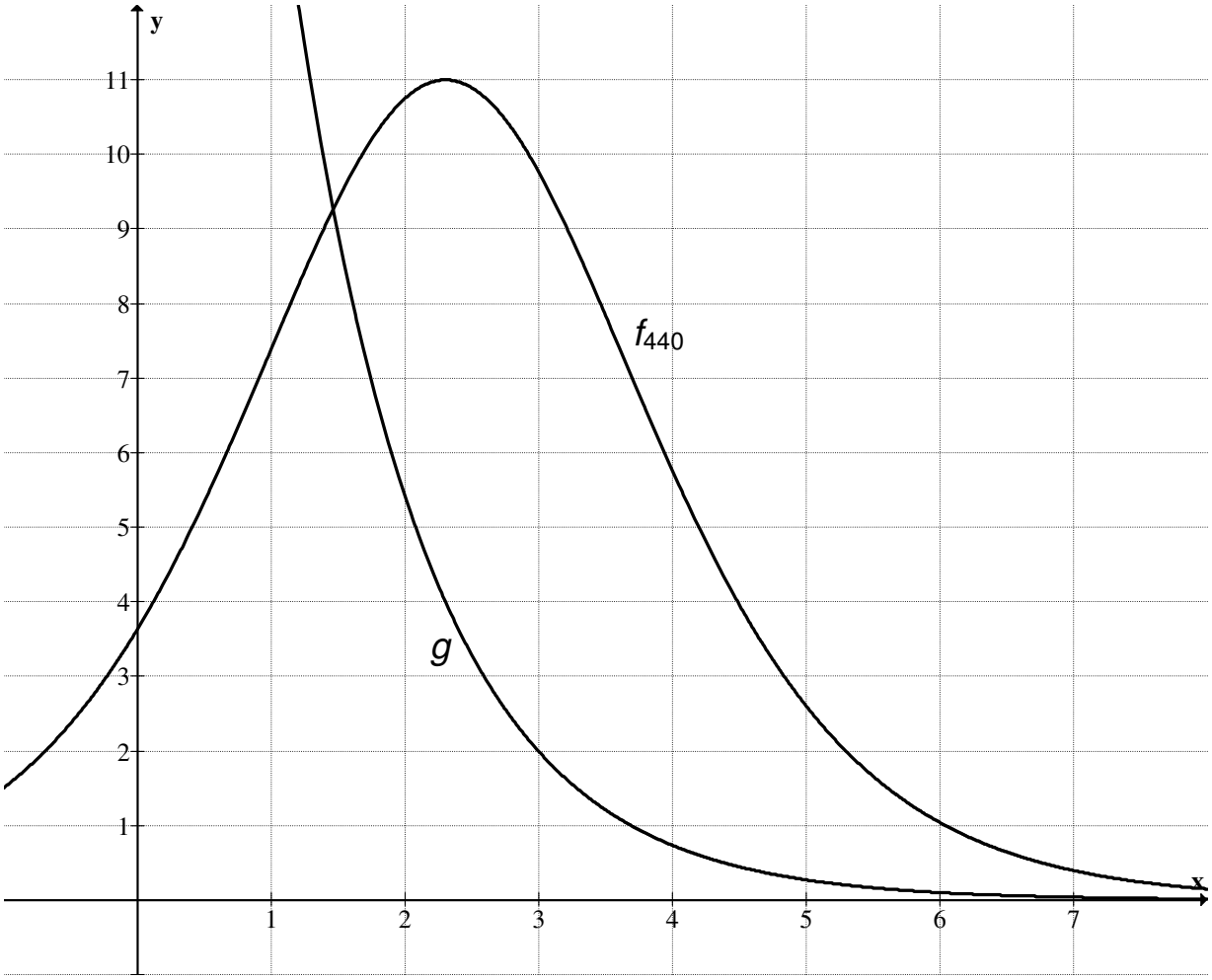
$$\text{Sorte } F\text{: } F(x) = \frac{44}{10 \cdot e^{-x} + 1}, \qquad \text{Sorte } G\text{: } G(x) = 44 - 40 \cdot e^{-x}.$$

d) Begründen Sie, dass beide Sträucher nach 8 Jahren als ausgewachsen gelten. **15 P**

e) Vergleichen Sie das Wachstumsverhalten beider Sorten (Wachstumsgeschwindigkeit und Höhenentwicklung). Weisen Sie nach, dass die beiden Sorten zu jenem Zeitpunkt den größten Höhenunterschied aufweisen, an dem sich die Graphen der Funktionen f_{440} und g schneiden. **20 P**

f) Die relative Wachstumsgeschwindigkeit w ist definiert als Quotient aus der momentanen Wachstumsgeschwindigkeit eines Strauches und seiner Höhe.
Ermitteln Sie für beide Strauchsorten $w(x)$ und stellen Sie die Funktionsterme möglichst einfach dar. **10 P**

Anlage zur Aufgabe „Hecken“



Erwartungshorizont:

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen: Mit der *x*-Achse gibt es keinen Schnittpunkt, da der Zähler nie Null wird. Schnittpunkt mit der *y*-Achse: Durch Einsetzen $S_y(0 \mid \frac{1}{121}c)$. Extrempunkte: Ableiten liefert $f_c'(x) = \frac{c \cdot e^x \cdot (e^x+10)^2 - c \cdot e^x \cdot 2 \cdot (e^x+10) \cdot e^x}{(e^x+10)^4}$ $= \frac{c \cdot e^x \cdot (e^x+10-2e^x)}{(e^x+10)^3}$ $= \frac{c \cdot e^x}{(10+e^x)^3} \cdot (10-e^x).$ Die einzige Nullstelle dieser Funktion liegt bei $x_E = \ln 10 \approx 2{,}30$. Wegen der Monotonie der Exponentialfunktion ist dies eine Durchgangsnullstelle, deswegen handelt es sich bei $E\left(\ln 10 \mid \frac{c}{40}\right)$ um einen Extrempunkt. *Selbstverständlich ist auch eine Argumentation mit* $f_c''(\ln 10) = -\frac{1}{80}c \neq 0$ *möglich.* Fallunterscheidung: Für $c > 0$ gilt: Nenner ist positiv, $c \cdot e^x > 0$, $10 - e^x$ monoton fallend, Vorzeichenwechsel $+ \to -$. *E* ist somit Hochpunkt. Für $c < 0$ gilt: Nenner ist positiv, $c \cdot e^x < 0$, $10 - e^x$ monoton fallend, Vorzeichenwechsel $- \to +$. *E* ist somit Tiefpunkt. Der Graph besitzt den Hochpunkt $E_H\ (ln10 \mid 11)$ für $c = 440$.	10	10	
b)	Schnittpunktbestimmung: $\frac{440 \cdot e^x}{(e^x+10)^2} = 40 \cdot e^{-x} \Leftrightarrow 440 \cdot e^{2x} = 40 \cdot (e^x+10)^2 \Leftrightarrow 11 \cdot e^{2x} = e^{2x} + 20e^x + 100$ $\Leftrightarrow e^{2x} - 2 \cdot e^x - 10 = 0$. Nach Substitution $z = e^x$ erhält man die quadratische Gleichung $z^2 - 2z - 10 = 0$ mit den Lösungen $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{11}$ und damit $e^x = 1 \pm \sqrt{11}$. Da e^x nicht negativ sein kann, lautet die einzige Schnittstelle $x_s = \ln\left(\sqrt{11}+1\right) \approx 1{,}46$. Damit ist $f\ (\ln\left(\sqrt{11}+1\right) = 4\sqrt{11} - 4 \approx 9{,}27$. Die Graphen schneiden sich in $S(\ln\left(\sqrt{11}+1\right) \mid 4\sqrt{11}-4)$ bzw. $S(1{,}46 \mid 9{,}27)$.		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III

c) <u>Berechnung der Stammfunktionen von *f*:</u>

Substitution: $u(x) = e^x + 10 \Leftrightarrow e^x = u(x) - 10,\ du = e^x\,dx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{e^x}$.

Damit folgt für das unbestimmte Integral

$$\int f_{440}(x)\,dx = \int \frac{440e^x}{\left(e^x+10\right)^2}\,dx = \int \frac{440\cdot(u-10)}{u^2\cdot(u-10)}\,du = \int \frac{440}{u^2}\,du = -\frac{440}{u} + c_0$$

$$= -\frac{440}{e^x+10} + c_0\,.$$

Bemerkung: Dass die angegebene Stammfunktion von f wirklich eine solche ist, kann durch Ableiten oder durch Umrechnung entsprechend zu a) gezeigt werden. Dies ist aber nicht gefordert!

Die Stammfunktion F von f_{440} gibt die Höhe der Sträucher F zum Zeitpunkt x an. Mit der Anfangsbedingung $F(0) = 4$ erhält man:

$$F(0) = \frac{-440}{e^0+10} + c_0 = -40 + c_0 = 4 \Rightarrow c_0 = 44\,.$$

Die gesuchte Funktion F lässt sich somit folgendermaßen darstellen:

$$F(x) = \frac{-440}{e^x+10} + 44 = \frac{-440+44e^x+440}{e^x+10} = \frac{44e^x}{e^x+10} = \frac{44}{1+10e^{-x}}\,.$$

<u>Berechnung der Stammfunktionen von *g*:</u>

$$\int 40\cdot e^{-x}dx = -40\cdot e^{-x} + c_0\,.$$

Es folgt für die gesuchte Funktion G:

$$G(x) = -40e^{-x} + 44\,.$$

<u>Momentane Wachstumsgeschwindigkeiten:</u>

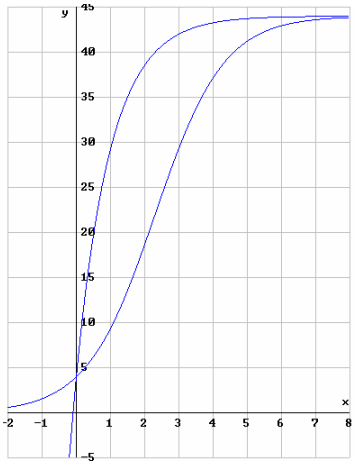
Die momentanen Wachstumsgeschwindigkeiten werden durch die erste Ableitung F' bzw. G', also durch f und g, berechnet. Durch Gleichsetzen von f und g erhält man den Zeitpunkt x; die Lösung ($x \approx 1{,}46$) wurde bereits im Teil b) berechnet.

Nach etwa eineinhalb Jahren sind also die Wachstumsgeschwindigkeiten beider Straucharten gleich.

<u>Strauchhöhen zum Zeitpunkt gleicher Wachstumsgeschwindigkeiten:</u>

$$F\left(\ln\left(\sqrt{11}+1\right)\right) = \frac{44}{\frac{10}{1+\sqrt{11}}+1} = \frac{44\cdot\left(1+\sqrt{11}\right)}{10+1+\sqrt{11}} = \frac{44\cdot\left(1+\sqrt{11}\right)}{11+\sqrt{11}}$$

$$= \frac{44\cdot\left(1+\sqrt{11}\right)\left(11-\sqrt{11}\right)}{110} = \frac{44\cdot\left(10\cdot\sqrt{11}\right)}{110} = 4\sqrt{11} \approx 13{,}27\,.$$

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	$G\left(\ln\left(\sqrt{11}+1\right)\right)=\frac{-40}{\sqrt{11}+1}+44=\frac{-40\left(\sqrt{11}-1\right)}{\left(\sqrt{11}+1\right)\left(\sqrt{11}-1\right)}+44=\frac{-40\left(\sqrt{11}-1\right)}{10}+44$ $=-4\sqrt{11}+4+44=48-4\sqrt{11}\approx 34{,}73\,.$ Die Sträucher der Sorte *F* haben also eine Höhe von ca. 1,30 m, die der Sorte *G* eine Höhe von ca. 3,50 m. *Zur Information rechts die (nicht geforderten) Graphen der Funktionen F und G.* 	10	15	
d)	Strauchhöhen im ausgewachsenen Zustand: Strauchsorte F: $F(8)\approx 43{,}85$ und $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{44}{10\cdot e^{-x}+1}=44\,.$ Strauchsorte G: $G(8)\approx 43{,}98$ und $\lim\limits_{x\to\infty}G(x)=44\,.$ Im Alter von 8 Jahren weichen beide Strauchsorten nur noch geringfügig von ihren endgültigen Höhen im ausgewachsenen Zustand ab.		15	
e)	Das Wachstumsverhalten beider Sorten unterscheidet sich deutlich: Während Sorte *F* logistisch wächst, wächst Sorte *G* exponentiell beschränkt. Im Laufe der Zeit ändert sich der Höhenunterschied der Sträucher in der Hecke gravierend. Zum Zeitpunkt des Pflanzens sind beide Sträucher gleich hoch. Wegen der unterschiedlichen Wachstumsgeschwindigkeiten nimmt der Höhenunterschied in der Folgezeit deutlich zu. Da beide Sorten aber nach 8 Jahren als ausgewachsen gelten und dann die gleiche Höhe erreicht haben (vgl. Teil e)), kann der Höhenunterschied nach acht Jahren nur sehr klein sein. Hier könnten exemplarisch einige Differenzen $F(x) - G(x)$ berechnet werden. Um den Zeitpunkt des größten Höhenunterschied zu ermitteln, wird zunächst die Differenzenfunktion $D(x) := F(x) - G(x)$ bestimmt. Die notwendige Bedingung $D'(x) = 0$ führt auf das bereits gelöste Problem $f(x_s)=g(x_s)$ mit der bekannten Lösung $x_s=\ln\left(\sqrt{11}+1\right)\approx 1{,}46$ *(vgl. Teil b)).* Nach etwa eineinhalb Jahren haben also die Sträucher den größten Höhenunterschied.		5	15

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	Laut Definition ist die Wachstumsgeschwindigkeit $w_F = \frac{f}{F}$ *bzw.* $w_G = \frac{g}{G}$. Durch Einsetzen ergibt sich $w_F(x) = \frac{10}{e^x + 10}$ und $w_G(x) = \frac{10}{11 \cdot e^x - 10}$. Die Funktion *w* gibt die relative Wachstumsgeschwindigkeit an; ihre Werte tragen die Einheit (Jahre^{-1}).		5	5
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

LA/AG 1

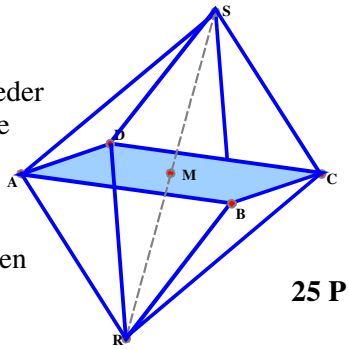
II.1 Oktaeder

In einem kartesischen Koordinatensystem sind folgende Punkte gegeben:

$$A\,(\,2\,|\,0\,|\,4\,),\ B\,(\,-2\,|\,5\,|\,1\,)\ \text{und}\ C\,(\,2\,|\,10\,|\,4\,).$$

a)
- Berechnen Sie einen vierten Punkt D so, dass die Punkte A, B und C durch diesen Punkt D zu einem Quadrat ergänzt werden.
- Bestätigen Sie, dass der Vektor $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ senkrecht zur Ebene $\boldsymbol{E_1}$ ist, in der die vier Punkte A, B, C und D liegen, und berechnen Sie seine Länge. **20 P**

b) Auf dem Quadrat $ABCD$ lässt sich ein reguläres (regelmäßiges) Oktaeder $\boldsymbol{O} = ABCDRS$ aufbauen (siehe Abbildung). Regulär bedeutet, dass alle Kanten gleich lang sind.

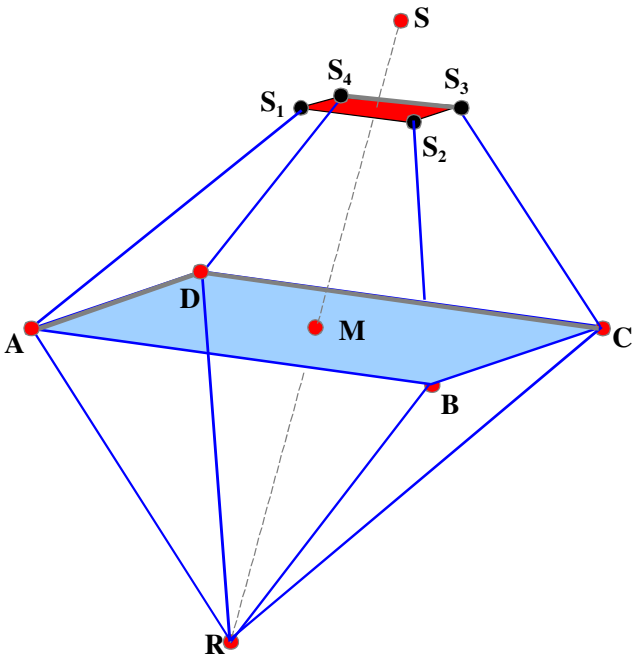


- Berechnen Sie den Abstand der Punkte R und S.
- Bestimmen Sie die Koordinaten dieser beiden Punkte und skizzieren Sie das Oktaeder im Koordinatensystem in der Anlage. **25 P**

c) Als regulärer Körper besitzt $\boldsymbol{O}$ eine so genannte Inkugel $\boldsymbol{K_I}$, also eine einbeschriebene Kugel, die alle Seitenflächen berührt.
- Begründen Sie argumentativ unter Ausnutzung der Regularität, in welchem charakteristischen Punkt die Inkugel $\boldsymbol{K_I}$ die jeweilige Seitenfläche berührt.
- Bestimmen Sie den Berührpunkt P von $\boldsymbol{K_I}$ mit der Seitenfläche BRC.
  (Hinweis: Sollten Sie in b) den Punkt R nicht errechnet haben, verwenden Sie $R(\,5\,|\,5\,|\,0\,)$.)
- Bestimmen Sie den Radius von $\boldsymbol{K_I}$ und geben Sie ihren Mittelpunkt an. **15 p**

d) Gegeben ist jetzt noch die Ebenenschar $\boldsymbol{F_t}$ mit $F_t : t \cdot x_1 + (7t-1) \cdot x_3 + (4-30t) = 0$ $(t \in \mathbb{R})$.
- Zeigen Sie, dass jede Ebene dieser Ebenenschar die Gerade g_{AC} durch A und C enthält.
- Bestimmen Sie das Intervall I der Werte von t, für die die Ebene $\boldsymbol{F}_t$ die Kante $\overline{BR}$ des Oktaeders schneidet. Bestimmen Sie auch das entsprechende Intervall bezogen auf die Kante $\overline{SD}$.
- Ermitteln Sie die Form der Schnittfigur, die jede Ebene $\boldsymbol{F}_t$ mit dem Oktaeder $\boldsymbol{O}$ aufweist, falls der Parameter t aus dem eben bestimmten Intervall I ist.
  Benennen Sie dabei die Schnittpunkte von F_t mit $\overline{BR}$ bzw. $\overline{SD}$ mit T und U.
- Untersuchen Sie, für welchen Wert von t aus dem Intervall I die zugehörige Schnittfigur den kleinsten Flächeninhalt aufweist, und geben Sie diesen an.
  Skizzieren Sie die zugehörige Schnittfigur. **30 P**

e) In dieser Teilaufgabe geht es um einen Oktaederstumpf. Dabei wird jede der Ecken A, B, C; D, R und S entfernt, wie es beispielhaft für S im Schrägbild dargestellt ist.



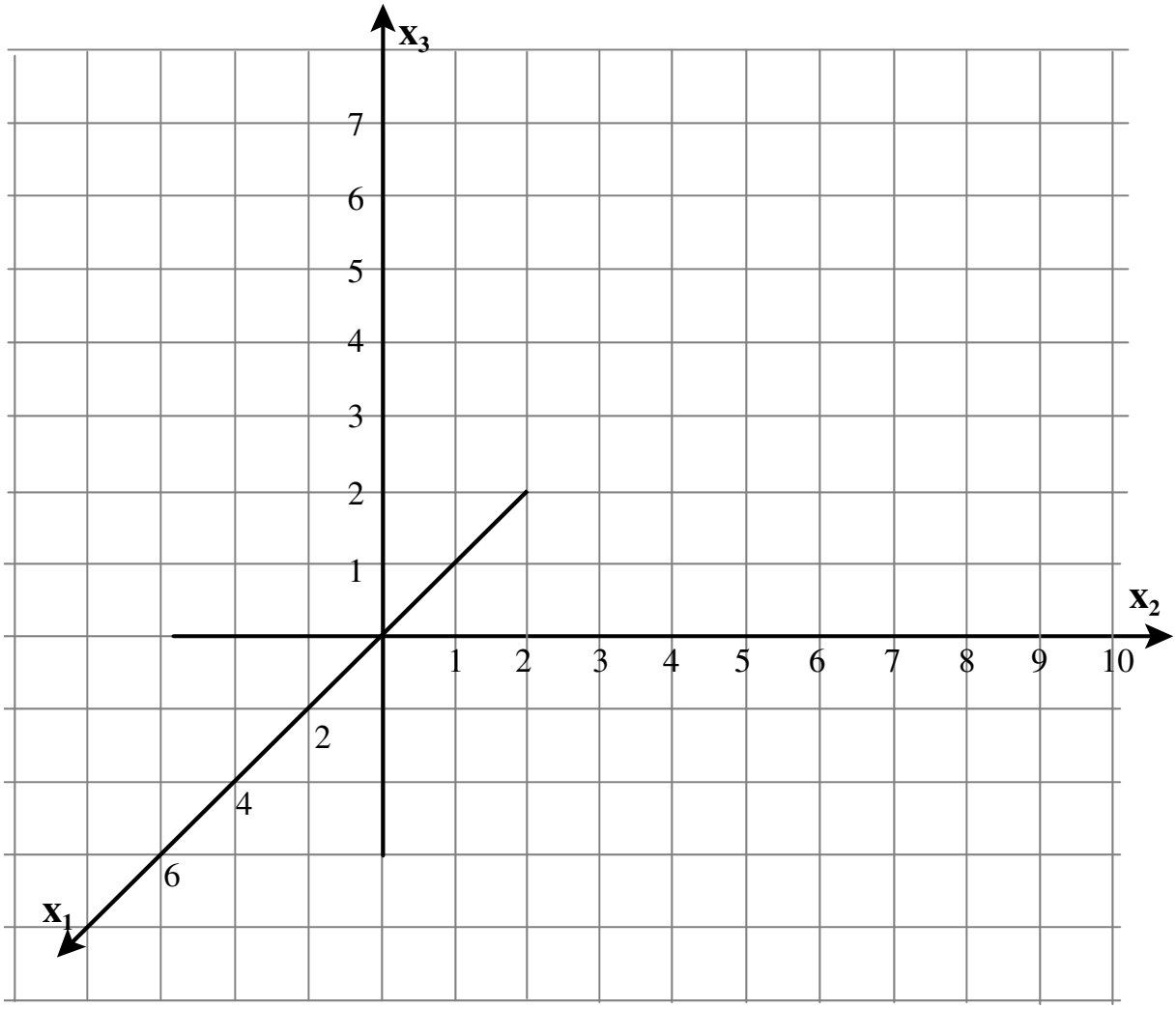
Die Schnittebene $\boldsymbol{E_2}$, welche die vier Punkte S_1, S_2, S_3 und S_4 enthält, ist parallel zur Ebene $\boldsymbol{E_1}$ aus Teilaufgabe a), in der die Punkte A, B, C, D und M liegen.

Der Abstand der Ebene $\boldsymbol{E_2}$ von S betrage 1 LE.

- Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S_2 und dessen Abstand zu S.
- Begründen Sie, von welcher Art das Viereck S_1, S_2, S_3, S_4 ist.
- Alle Eckpunkte werden nun auf die geschilderte Art entfernt.
  Geben Sie begründet an, welche Form die ursprünglichen gleichseitigen Dreiecke dann angenommen haben.

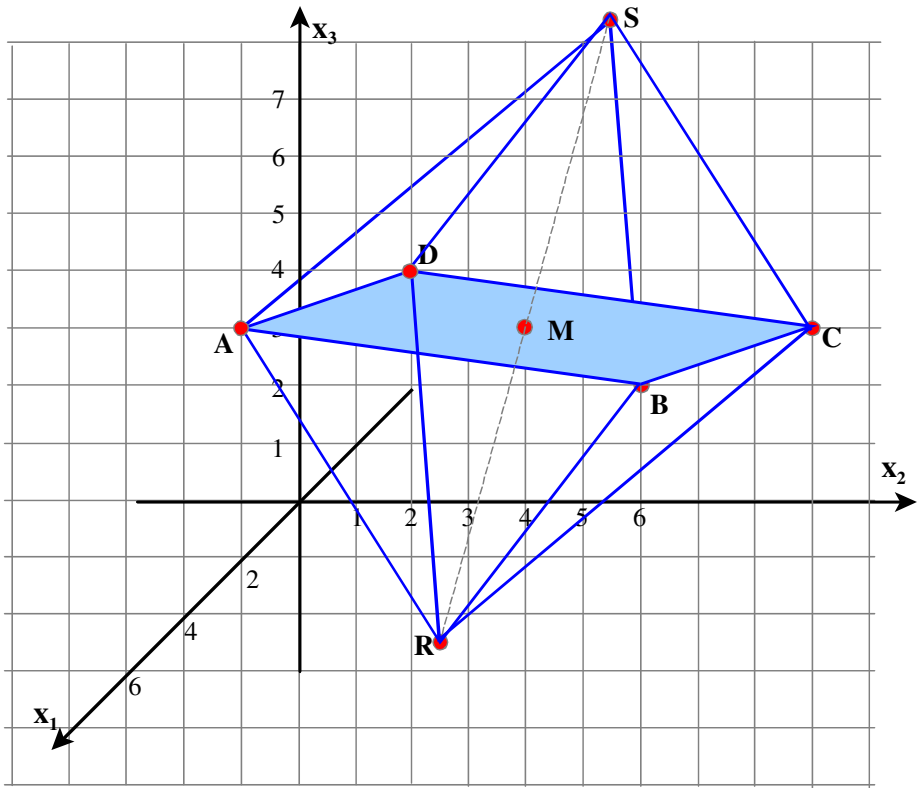
10 P

Anlage zur Aufgabe „Oktaeder“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Ergänzung zum Quadrat:			
	$d(A,B)=\sqrt{4^2+5^2+3^2}=\sqrt{50}$; $d(B,C)=\sqrt{4^2+5^2+3^2}=\sqrt{50}=5\cdot\sqrt{2}$			
	$\overrightarrow{BA}=\begin{pmatrix}4\\-5\\3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \Rightarrow \overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BC}$			
	Beide Bedingungen sichern die Möglichkeit der Ergänzung zum Quadrat.			
	Der Punkt D errechnet sich dann aus $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$ zu D (6 | 5 | 7).			
	Vektor senkrecht zur Ebene:			
	Nachweis der Eigenschaft senkrecht z.B. über Ebene E_1, die aufgespannt wird durch die Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$. Es ist dann zu zeigen $\vec{n}_E\perp\overrightarrow{BA}$ und $\vec{n}_E\perp\overrightarrow{BC}$: $\begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-5\\3\end{pmatrix}=-12+0+12=0$ und $\begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix}=0$.			
	Länge des Vektors:			
	$\|\overrightarrow{n_E}\|=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$.	10	10	
b)	Abstand der Punkte *R* und *S*:			
	Die Strecke *MS* ist die Höhe *h* der oberen quadratischen Pyramide, also in dem rechtwinkligen Dreieck *CMS* eine Kathete. Die Hypotenuse *CS* hat dieselbe Länge wie alle Kanten, nämlich $5\cdot\sqrt{2}$, und aus d(*A,C*) = 10 folgt d(*M,C*) = 5. Damit gilt für die Höhe *h*: $h^2 = 2\cdot 25 - 25 = 25$, also *h* = d(*M,S*) = 5. *R* liegt aus Symmetriegründen auf der Geraden durch *S* und *M* und es gilt analog d(*M,R*) = 5. Daraus folgt insgesamt d(*R,S*) = 10.			
	Koordinaten der Punkte *R* und *S*:			
	Der Mittelpunkt des Quadrats liegt bei *M*(2 | 5 | 4). Mit dem bekannten Normalenvektor (der Länge 5) und dem ebenfalls bekannten Abstand von 5 der beiden Punkte zur Ebene ergibt sich aus (2 | 5 | 4)+(–3 | 0 | 4) der Punkt *S*(–1 | 5 | 8) und aus (2 | 5 | 4)–(–3 | 0 | 4) der Punkt *R*(5 | 5 | 0).			
	Skizze			
	folgende Seite			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
		15	10	
c)	**Berührpunkte der Kugel mit den Seitenflächen** Regularität hat hier zur Folge, dass alle Seitenflächen des Oktaeders gleichseitige Dreiecke sind. Sie hat auch zur Folge, dass der Mittelpunkt der Inkugel in *M* liegt. Die Pyramide aus je einer Seitenfläche und *M* basiert also auf einem gleichseitigen Dreieck; da die Inkugel die Seitenfläche genau am Fußpunkt der Raumhöhe dieser Pyramide berührt, ist der Berührpunkt der Schwerpunkt S_D des gleichseitigen Dreiecks. *(Hinweis: Es gibt andere Argumentationswege, die die Symmetrie anders ausnutzen und zum gleichen Punkt, aber mit anderen Eigenschaften kommen. S_D ist gleichzeitig Höhenschnittpunkt und Inkreismittelpunkt des Dreiecks.)* **Bestimmen von *P* und *r*** Für die Berechnung von *P* kann man das Wissen über die besondere Lage des Schwerpunkts (bei zwei Dritteln der Höhe, von der Spitze aus) ausnutzen. Dies ergibt den Ansatz $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OR} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{RC} + \overrightarrow{RB}\right)$ und damit $P\left(\frac{5}{3} \mid \frac{20}{3} \mid \frac{5}{3}\right)$. Der Radius r_i der Inkugel ist nun einfach der Abstand von *M* – denn *M* ist aus Symmetriegründen auch Mittelpunkt der Inkugel – und *P* und ergibt sich zu $r_i = \frac{5}{3}\sqrt{3}$.		10	5

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	Jede Ebene enthält Gerade durch *A* und *C*			

Wenn zwei Punkte in einer Ebene liegen, liegt auch die gesamte Gerade durch diese Punkte in der Ebene. Also reicht es zu zeigen, dass die Koordinaten von *A* und *C* die Gleichung der Ebenenschar erfüllen:

Für $A: t \cdot 2 + (7t-1) \cdot 4 + (4-30t) = 0$; für $C: t \cdot 2 + (7t-1) \cdot 4 + (4-30t) = 0$.
Damit ist alles gezeigt.

Intervall des Parameters, sodass Kante *BR* geschnitten wird

Die Strecke $\overline{BR}$ lässt sich darstellen als $\overline{BR}: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + \lambda \cdot \overrightarrow{BR}$ mit $\lambda \in [0,1]$

bzw. $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+7\lambda \\ 5 \\ 1-\lambda \end{pmatrix}$. Damit ist

$\overline{BR} \cap F_t: t(-2+7\lambda) + (7t-1)(1-\lambda) + 4 - 30t = 0$

$\Leftrightarrow -25t + 3 + \lambda = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3+\lambda}{25}$.

Mit den bekannten Intervallgrenzen für λ *(und der impliziten Voraussetzung der Stetigkeit der Drehung der Ebenen mit stetiger Variation von λ)* ergibt sich

$t \in \left[\frac{3}{25}, \frac{4}{25}\right]$.

Schnittfigur mit ***O***

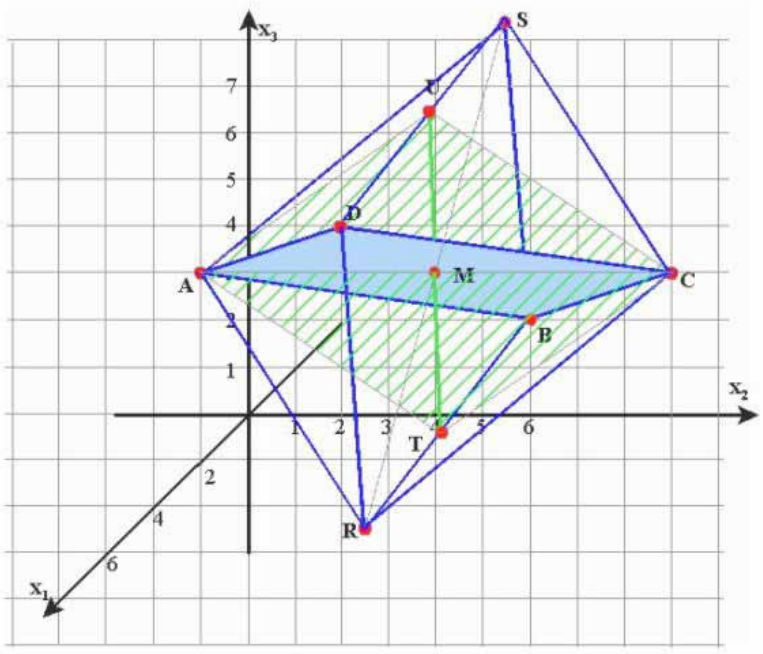
Seien *T* und *U* die Schnittpunkte von F_t mit $\overline{BR}$ bzw. $\overline{SD}$. Dann ist *ATCU* nicht nur ein Viereck, sondern wegen der Regularität des Oktaeders eine Raute mit Diagonalen, die jeweils eine positive Länge aufweisen. Also haben die Rauten jeweils einen nichtleeren Flächeninhalt.

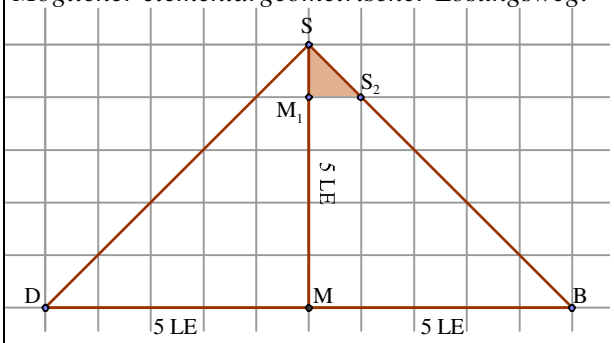
Schnittfigur mit kleinstem Flächeninhalt

Alle diese Rauten haben die Länge der Diagonalen $\overline{AC}$, die Änderung des Flächeninhalts kann nur aus der Länge der anderen Diagonalen $\overline{TU}$ kommen. Diese ist aus geometrischen Gründen maximal an den Rändern und aus Symmetriegründen minimal, wenn *T* der Mittelpunkt von $\overline{BR}$ ist. Damit ist $T(1{,}5 \mid 5 \mid 0{,}5)$.

Den Parameter *t* in F_t für den Punkt *T* ergibt sich z.B. aus der Beziehung
$t = \frac{3+\lambda}{25}$; da $\lambda_T = 0{,}5$, ist $t_T = \frac{7}{50}$.

Die gesuchte Fläche ergibt sich z.B. durch $A = d(AC) \cdot d(MT)$ zu
$A = 5\sqrt{50} \approx 35{,}3533$

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Skizze:  		20	10
e)	Koordinaten von S_2 und Abstand zu S: *Möglicher Lösungsweg mit Mitteln der Analytischen Geometrie:* Die Ebenengleichung ergibt sich aus dem Normalenvektor aus a) und einem Punkt der Ebene. Dazu kann man denjenigen Punkt M_1 der Raumdiagonalen $\overline{RS}$ wählen, der 1 LE von S entfernt liegt. Es ist $g_{MS}: \vec{x} = \overrightarrow{0M} + \lambda \cdot \overrightarrow{MS}$. Aus früheren Teilaufgaben ist bekannt, dass der Abstand von M und S 5 LE ist. Man erhält also M_1, wenn man setzt $\lambda = \frac{4}{5} = 0{,}8$: $M_1 = (2–2{,}4 \mid 5 \mid 4+3{,}2) = (–0{,}4 \mid 5 \mid 7{,}2)$. Die Ebenengleichung lautet vorläufig $–3x_1 + 4x_3 = c$. Die Koordinaten von M_1 eingesetzt ergibt 1,2 + 28,8 = 30 = c und damit $E_2: -3x_1 + 4x_3 - 30 = 0$. Die Gerade durch B und S hat die Gleichung $g_{BS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$. Eingesetzt in die Ebenengleichung: 6–3μ+4+28μ–30 = 25μ–20 = 0. Daraus folgt μ = 0,8. Eingesetzt in g_{BS} erhält man $S_2 = (–1{,}2 \mid 5 \mid 6{,}6)$. Für den Abstand gilt: $\left\|\overline{S_2S}\right\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1{,}2 \\ 5 \\ 6{,}6 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0 \\ 1{,}4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{0{,}04 + 1{,}96} = \sqrt{2}$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Möglicher elementargeometrischer Lösungsweg:  Aus dem Dreieck $S\,S_2\,M_1$ kann man ablesen $\left\|\overline{S_2S}\right\| = \sqrt{2}$. Um die Koordinaten von S_2 zu erhalten, setzt man wie oben in die Geradengleichung μ = 0,8 ein, denn $\left\|\overline{BS}\right\| = \sqrt{50} = 5 \cdot \sqrt{2}$. Viereck S_1, S_2, S_3, S_4 ist Quadrat Das liegt an der Regelmäßigkeit des Oktaeders, sodass die Quadratform von *ABCD* erhalten bleibt. Änderung der Dreiecksform Jeder Eckpunkt des gleichseitigen Dreiecks wird bei der Entfernung der Spitzen des Oktaeders ersetzt durch zwei neue Eckpunkte, deren Verbindungslinie in der Schnittebene liegt. Es wird also ein Sechseck *(mit symmetrisch angeordneten Ecken)*		5	5
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

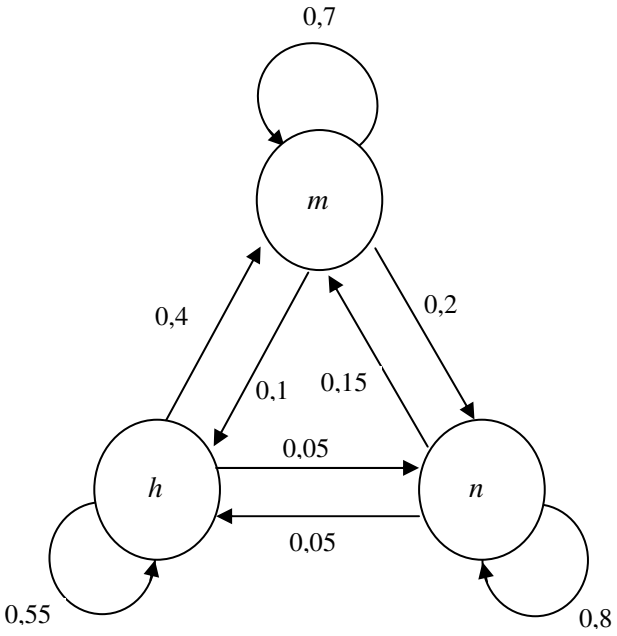
LA/AG 2

II.2 Einkommensgruppen

Die Familien eines fiktiven Landes werden einer der drei angegebenen Einkommensgruppen zugeordnet. In statistischen Erhebungen hat man festgestellt, dass Kinder der Eltern einer bestimmten Einkommensgruppe nach ihrer Ausbildung auch einer anderen Einkommensgruppe angehören können. Es wird angenommen, dass 10 % der Einkommensgruppe hoch (*h*), 60 % der Einkommensgruppe mittel (*m*) und 30 % der Einkommensgruppe niedrig (*n*) angehören. Vereinfachend wird angenommen, dass jede Familie genau zwei Kinder hat und in der nächsten Generation jedes Kind mit einem Kind einer anderen Familie wieder eine Familie gegründet hat.

a) Es werden 4200 Familien nach repräsentativen Grundsätzen ausgewählt.
Berechnen Sie die Anfangsverteilung $\vec{p}_0$ der ausgewählten Bevölkerungsgruppe. **5 P**

Die nachfolgende Abbildung gibt für jede Einkommensgruppe an, welche Anteile dieser Gruppe von einer Generation zur nächsten die Gruppe wechseln bzw. in der Gruppe bleiben.



$$P = \begin{pmatrix} \frac{11}{20} & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} \\ \frac{2}{5} & \frac{7}{10} & \frac{3}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 2 & 1 \\ 8 & 14 & 3 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

b) Begründen Sie anhand des Graphen, dass dieser Prozess durch die Übergangsmatrix *P* beschrieben werden kann und berechnen Sie die Einkommensverteilung $\vec{p}_1$ in der nächsten Generation.

20 P

c) Ermitteln Sie die Einkommensverteilung $\vec{p}_{-1}$ der Elterngeneration der ersten Gruppe.
Setzen Sie dabei voraus, dass obiges Modell auch schon bei dieser Generation galt. **20 P**

Nach einigen Jahren stellt man fest, dass Eltern der hohen Einkommensgruppe durchschnittlich nur ein Kind bekommen, in der mittleren Einkommensgruppe dagegen zwei Kinder und in der niedrigen Einkommensgruppe drei Kinder geboren werden.

d) Ermitteln Sie die modifizierte Übergangsmatrix und begründen Sie Ihre Vorgehensweise. **15 P**

(*Hinweise:*
Überlegen Sie, welche Matrixelemente jeweils die Entwicklung einer Gruppe repräsentieren.

Kontrollergebnis: $P_{Mod} = \begin{pmatrix} \frac{11}{40} & \frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} & \frac{9}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{40} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 4 & 3 \\ 8 & 28 & 9 \\ 1 & 8 & 48 \end{pmatrix}$)

e) Berechnen Sie die Einkommensverteilung in den nächsten beiden Generationen.
Vergleichen Sie das modifizierte Modell hinsichtlich der Entwicklung der Gesamtzahl der Familien mit dem ursprünglichen Modell. **20 P**

Bei einigen Populationsmatrizen A erhält man die Einheitsmatrix E durch Mehrfachmultiplikation der Matrix A mit sich selbst, also $A^n = E$ *für bestimmte* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Die Einheitsmatrix E erhält man aber auch durch Multiplikation der Matrix A mit ihrer „inversen Matrix“ A^{-1}, sofern diese existiert, also $A \cdot A^{-1} = E$.

Gegeben ist nun die allgemeine Populationsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$.

f) Bestimmen Sie die Matrizen A^2 und A^3 und ermitteln Sie die Bedingungen für a, b und c, damit gilt: $A^3 = E$.
Interpretieren Sie für diesen Fall die Bedeutung der Matrix A^2. **15 P**

g) Interpretieren Sie dieses Phänomen für die Entwicklung einer zugehörigen Population. **5 P**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Aus der prozentualen Verteilung ergibt sich die Anzahl der Familien in den drei Einkommensgruppen als Bestandsvektor $\vec{p}_0$: $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 420 \\ 2520 \\ 1260 \end{pmatrix}$	5		
b)	In der ersten Spalte von P steht die Zuordnung der Kinder der Einkommensgruppe h in der nächsten Generation: 55 % von ihnen bleiben in Gruppe h, 40 % wechseln in Gruppe m, 5 % wechseln in Gruppe n. In der zweiten Spalte von P steht die Zuordnung der Kinder der Einkommensgruppe m in der nächsten Generation: 10 % von ihnen wechseln in Gruppe h, 70 % bleiben in Gruppe m, 20 % wechseln in Gruppe n. In der dritten Spalte von P steht die Zuordnung der Kinder der Einkommensgruppe n in der nächsten Generation: 5 % von ihnen wechseln in Gruppe h, 15 % wechseln in Gruppe m, 80 % bleiben in Gruppe n. Die Übergangsmatrix P enthält die angegebenen Prozentsätze: $\vec{p}_1 = P \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} \frac{11}{20} & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} \\ \frac{2}{5} & \frac{7}{10} & \frac{3}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 420 \\ 2520 \\ 1260 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 546 \\ 2121 \\ 1533 \end{pmatrix}$.	10	10	
c)	Möglicher Ansatz: $P \cdot \vec{p}_{-1} = \vec{p}_0$ bzw. $\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 11 & 2 & 1 \\ 8 & 14 & 3 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 \\ 2520 \\ 1260 \end{pmatrix}$ Multiplikation mit 20 ergibt das folgende Lineare Gleichungssystem: $\left(\begin{array}{ccc\|c} 11 & 2 & 1 & 8400 \\ 8 & 14 & 3 & 50400 \\ 1 & 4 & 16 & 25200 \end{array}\right) \xrightarrow[-III+16\cdot I]{II-3\cdot I} \left(\begin{array}{ccc\|c} 11 & 2 & 1 & 8400 \\ -25 & 8 & 0 & 25200 \\ 175 & 28 & 0 & 109200 \end{array}\right) \xrightarrow{III+7\cdot II}$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 11 & 2 & 1 & 8400 \\ -25 & 8 & 0 & 25200 \\ 0 & 84 & 0 & 285600 \end{array}\right)$ x_1, x_2 eingesetzt $\Rightarrow x_3 = 720$ x_2 eingesetzt liefert $x_1 = 80$ Division durch 84 $\Rightarrow x_2 = 3400$ Damit gilt für die Einkommensverteilung der Elterngeneration der ersten Gruppe, vorausgesetzt das obige Modell trifft auch hier noch zu: $\vec{p}_{-1} = (80 \mid 3400 \mid 720)$		20	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Ein zweiter Lösungsweg ist über die Inverse der Populationsmatrix möglich.			
d)	Die Übergangsfaktoren der Familien aus der Einkommensgruppe h müssen gegenüber der vorherigen Matrix halbiert werden; die Übergangsfaktoren der Familien aus der Einkommensgruppe n müssen gegenüber der vorherigen Matrix mit $\frac{3}{2}$ multipliziert werden. Also wird die erste Spalte der ursprünglichen Übergangsmatrix durch zwei geteilt und die dritte Spalte mit $\frac{3}{2}$ multipliziert. $P_{Mod} = \begin{pmatrix} \frac{11}{40} & \frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} & \frac{9}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$.		10	5
e)	$\vec{p}_{Mod1} = P_{Mod} \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} \frac{11}{40} & \frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} & \frac{9}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 420 \\ 2520 \\ 1260 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 462 \\ 2131{,}5 \\ 2026{,}5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 462 \\ 2132 \\ 2027 \end{pmatrix}$. $\vec{p}_{Mod2} = P_{Mod} \cdot \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} \frac{11}{40} & \frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} & \frac{9}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 462 \\ 2132 \\ 2027 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 492{,}275 \\ 2040{,}875 \\ 2870{,}35 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 492 \\ 2041 \\ 2870 \end{pmatrix}$ *Da in der Realität keine Bruchteile von Familien vorkommen, muss hier im Kontext der Aufgabenstellung gerundet werden. Dabei ist auch konsequentes Abrunden sinnvoll.* Da bei dem ursprünglichen Modell aus jedem Elternpaar wieder ein Kinderpaar, aus jedem Kinderpaar wieder ein Elternpaar entsteht usw., bleibt in diesem Modell die Gesamtzahl der Familien von Generation zu Generation konstant. Dagegen steigt die Gesamtzahl der Familien in dem modifizierten Modell von Generation zu Generation an, weil die Anzahl der Kinder in der größeren Gruppe n der Familien mit niedrigem Einkommen von zwei auf drei gestiegen ist, während die Anzahl der Kinder in der kleineren Gruppe h der Familien mit hohem Einkommen von zwei auf eins gesunken ist.	10	5	5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
f)	Ermitteln von A^2 und A^3: $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \\ bc & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \\ bc & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abc & 0 & 0 \\ 0 & abc & 0 \\ 0 & 0 & abc \end{pmatrix}$ Also: $A^3 = E$, wenn gilt: $a \cdot b \cdot c = 1$. Die Matrix A^2 ist in diesem Fall gleich der zu A inversen Matrix.		10	5
g)	Für die Entwicklung der Population bedeutet dieses Phänomen, dass sich in einem Zyklus von drei Jahren stets wieder die Ausgangspopulation einstellt.			5
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

STOCHASTIK 1

III.1 „Handygefahren“

Um die Unfallgefahr zu verringern, ist in Deutschland die Benutzung eines Handys im Auto durch den Fahrer nur mit einer Freisprecheinrichtung erlaubt. Weil eine gut funktionierende Freisprecheinrichtung aber relativ teuer ist, telefonieren viele Fahrer trotzdem unerlaubt während der Fahrt mit dem Handy.
Im Folgenden soll stets unter „Ein Fahrer telefoniert“ verstanden werden: Dieser Fahrer telefoniert während der Fahrt mit seinem Handy, ohne eine Freisprechanlage zu verwenden (er begeht also eine Ordnungswidrigkeit).

Auf einer belebten Straße soll der Anteil p der Autofahrer untersucht werden, die zum Zeitpunkt einer Kontrolle telefonieren. Der Anteil p hängt von Ort und Zeitpunkt der Kontrolle ab. Dabei wird angenommen, dass die Fahrer sich in ihrem Telefonierverhalten gegenseitig nicht beeinflussen.

a) Berechnen Sie in Abhängigkeit von p die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
- A: Bei 10 vorbeifahrenden Autos telefonieren genau die Fahrer des 3. und des 5. Autos.
- B: Bei 10 vorbeifahrenden Autos telefonieren die Fahrer der ersten vier Autos nicht, aber trotzdem telefonieren genau zwei Fahrer. **10 P**

b)
- Berechnen Sie, wie groß der Anteil p der telefonierenden Fahrer an einer bestimmten Kontrollstelle mindestens sein muss, wenn unter 100 vorbeifahrenden Autos mit mehr als 95 % Wahrscheinlichkeit mindestens eines von einem telefonierenden Fahrer gelenkt wird.
- Auf der Schlossallee wird an einem Mittwoch zwischen 15 Uhr und 16 Uhr eine Kontrolle durchgeführt. Während dieser Zeit gelte für den Anteil p jener Fahrer, die zu einem beliebigen Zeitpunkt während dieser Zeitspanne gerade telefonieren, $p = 3\ \%$.

  Bestimmen Sie die Anzahl der Autos, die mindestens kontrolliert werden müssen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 80 % mindestens einen telefonierenden Fahrer erwischt. **20 P**

c) Nun kontrolliert man auf einer Zufahrt zu einer beliebten Diskothek zwischen 21 Uhr und 23 Uhr. Hier ist die Telefonierwahrscheinlichkeit außergewöhnlich hoch, nämlich $p = 20\ \%$. Die Polizisten wetten untereinander, beim wievielten Auto sie erstmals einen Telefonierer erwischen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass dieses
- beim sechsten,
- beim zehnten,
- nach dem zehnten Auto passiert.

Einer der Polizisten behauptet, dass im Mittel beim fünften Auto der erste Telefonierer zu erwarten ist.
- Beschreiben Sie diese Behauptung mit Begriffen der Stochastik und begründen Sie diese:

  (1) entweder unter Verwendung der Formel $1+2q+3q^2+4q^3+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}=\frac{1}{(1-q)^2}$.

  (2) oder indem Sie erkennen, dass nach dem ersten Auto entweder der erste Telefonierer aufgetreten ist oder die erwartete Anzahl der Autos bis zum ersten Telefonierer sich gegenüber der Situation am Anfang um 1 erhöht hat. **25 P**

d) Nach einigen Unfällen, bei denen Autofahrer telefoniert hatten, will die örtliche Polizei in ihrer Stadt verstärkte Kontrollen durchführen, wenn der Anteil der telefonierenden Autofahrer mehr als 15 % beträgt. Dazu überprüft sie in der Stadt 1000 fahrende Autos.

Bestimmen Sie mithilfe der Normalverteilung die Anzahl der telefonierenden Fahrer, die die Kontrolle mindestens passieren müssen, um auf einem Signifikanzniveau von 5 % gute Argumente für verstärkte Kontrollen zu haben. **20 P**

e) Wenn bei einer Umfrage 20 % der Befragten angeben, beim Fahren zu telefonieren, so ergeben sich bei einer Kontrolle dennoch viel geringere Anteile. Dieses liegt daran, dass die Telefonierer nicht ständig telefonieren. Um zu einem differenzierteren Bild zu gelangen, ist es erforderlich, Klasseneinteilungen nach der durchschnittlichen (nach wie vor illegalen) Telefonierdauer pro Stunde vorzunehmen. In sehr starker Vereinfachung ergibt sich bei einer Befragung von Autofahrern das folgende Bild, das als repräsentativ gelten möge:

	Wenig	Normal	Viel	Dauernd
Durchschnittliche Telefonierzeit pro Stunde [in Minuten]	5	10	15	30
Anteil der Autofahrer	7 %	10 %	2 %	1%

Ein Autofahrer passiert eine Kontrolle.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er bei der Kontrolle erwischt wird, wenn man weiß, dass er ein Wenigtelefonierer ist.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er gerade telefoniert, wenn man gar nichts über ihn weiß.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er gerade telefoniert, wenn man weiß, dass er ein Telefonierer ist (die Frage also nach der Wahrscheinlichkeit, ob ein Telefonierer erwischt wird).
- Der Autofahrer telefoniert gerade bei der Kontrolle. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei ihm um einen Wenigtelefonierer handelt. **25 P**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	• $P(A) = p^2 \cdot (1-p)^8$, da die Einzelereignisse unabhängig sind. • Es gibt $\binom{6}{2}$ Möglichkeiten für die telefonierenden Fahrer. Daher gilt: $P(B) = \binom{6}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^8 = 15 \cdot p^2 \cdot (1-p)^8$ bzw. $P(B) = (1-p)^4 \cdot B(6, p, 2)$.	10		
b)	• Es ist die Gleichung $(1-p)^{100} = 0{,}05$ zu lösen, also $p = 1 - 0{,}05^{\frac{1}{100}} \approx 0{,}0295 = 3\,\%$ Der Anteil der telefonierenden Fahrer muss über 3% liegen. Man kann den Lösungsweg auch formaler beschreiben: Ist X die Zufallsgröße „Anzahl der telefonierenden Fahrer“, so ist X binomialverteilt. Daher gilt: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^{100} > 0{,}95 \Leftrightarrow (1-p)^{100} < 0{,}05 \Leftrightarrow$ $(1-p) < \sqrt[100]{0{,}05} \Leftrightarrow p > 1 - \sqrt[100]{0{,}05} \approx 0{,}0295$ Im ersten Fall muss der Anteil der telefonierenden Fahrer über 3% liegen. • Es ist die Gleichung $0{,}97^n = 0{,}2$ $(0 < p < 1)$ zu lösen, also $n = \frac{ln\,0{,}2}{ln\,0{,}97} \approx 52{,}8$ Es müssen also mindestens 53 Autos kontrolliert werden.	5	15	
c)	• $P(\text{"beim sechsten Auto"}) = 0{,}8^5 \cdot 0{,}2 \approx 6{,}55\%$, • $P(\text{"beim zehnten Auto"}) = 0{,}8^9 \cdot 0{,}2 \approx 2{,}68\%$, • $P(\text{"nach dem zehnten Auto"}) = 0{,}8^{10} \approx 10{,}74\%$, • Es ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:			

k	$P(X = k)$
1	0,2
2	$0{,}2 \cdot 0{,}8$
3	$0{,}2 \cdot 0{,}8^2$
4	$0{,}2 \cdot 0{,}8^3$
⋮	⋮

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Die Anzahl *N* der Kontrollen, bis die Polizisten zum ersten Mal einen Telefonierer erwischen, ist eine Zufallsvariable. Die Behauptung des Polizisten kann dann präzisiert werden zu *E(N)* = 5. Weg (1): $E(N) =$ $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^{k-1} = 0{,}2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 0{,}8^{k-1} = 0{,}2 \cdot \frac{1}{(1-0{,}8)^2} = 5$ Der Erwartungswert für die Anzahl der zu kontrollierenden Autos, bis man erstmals einen Telefonierer erwischt, beträgt also tatsächlich 5. Weg (2): Es sei $e = E(N)$ der zu berechnende Erwartungswert. Die gemachte Beobachtung kann wie folgt in eine lineare Gleichung übersetzt werden: $e = 1 \cdot 0{,}2 + (1+e) \cdot 0{,}8$ mit der Lösung *e* = 5	10	10	5
d)	Es sei *X* die Anzahl der Telefonierer, die die Kontrolle passieren. Nullhypothese H_0: „Der Anteil der Telefonierer beträgt höchstens 15%“. Fehler 1. Art: H_0 wird verworfen, obwohl richtig. Die Wahrscheinlichkeit für diesen Fehler soll höchstens 5% betragen. Ist *k* die Anzahl der telefonierenden Fahrer, die man mindestens beobachten muss, so soll also gelten $P(X \geq k \mid H_0) \leq 5\%$ und $P(X \geq k-1 \mid H_0) > 5\%$. Dies ist äquivalent zu: $P(X \leq k-1 \mid H_0) \geq 95\%$ und $P(X \leq k-2 \mid H_0) < 95\%$, bei Approximation durch die Normalverteilung löst man die Gleichung $\Phi\left(\frac{k-149{,}5}{\sqrt{127{,}5}}\right) = 0{,}95$. Es folgt: $\frac{k-149{,}5}{\sqrt{127{,}5}} = 1{,}645$ $\Leftrightarrow k \approx 169$. Die Polizisten müssen im Rahmen der hier entwickelten Logik also mindestens 169 Telefonierer beobachten, um (bei Signifikanzniveau von 5 %) gute Argumente für verstärkte Kontrollen zu haben.		15	5

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	Es sei *T* das Ereignis: „Der Autofahrer telefoniert zum Zeitpunkt der Kontrolle“ *W* das Ereignis „Der Autofahrer ist Wenigtelefonierer“. $P(W) = 7\%$ *N* das Ereignis „Der Autofahrer ist Normaltelefonierer“. $P(N) = 10\%$ *V* das Ereignis „Der Autofahrer ist Vieltelefonierer“. $P(V) = 2\%$ *D* das Ereignis „Der Autofahrer ist Dauertelefonierer“. $P(D) = 1\%$ *H* das Ereignis „Der Autofahrer ist Telefonierer“. $P(H) = 20\%$ • Da der Autofahrer als Wenigtelefonierer durchschnittlich 5 Minuten pro Stunde telefoniert, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass er gerade zum Zeitpunkt der Kontrolle telefoniert: $P(T \mid W) = \frac{5}{60} = \frac{1}{12} \approx 8{,}33\%$. • Mit dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit oder mit Hilfe eines Baumdiagramms erhält man: $P(T) = P(W) \cdot P(T \mid W) + P(N) \cdot P(T \mid N) + P(V) \cdot P(T \mid V) + P(D) \cdot P(T \mid D)$ $= \frac{7}{100} \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{400} \approx 3{,}3\ \%$ Die Wahrscheinlichkeit, dass der Autofahrer gerade telefoniert, beträgt ungefähr 3 %. • Gesucht ist $P(T\mid H)$. Es gilt: $P(T \mid H) = \frac{P(T \cap H)}{P(H)} = \frac{P(T)}{P(H)} = \frac{\frac{13}{400}}{\frac{1}{5}} = \frac{13}{80} \approx 16\ \%$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Telefonierer erwischt wird, beträgt also ca. 16 %. • Es ist $P(W\mid T)$ zu bestimmen. Dies kann entweder mit dem Satz von Bayes geschehen oder unter Verwendung des vorvoriger Ergebnisses (, das gerade der „Bayes-Nenner“ ist): $P(W \mid T) = \frac{P(W) \cdot P(T \mid W)}{P(T)} = \frac{\frac{7}{100} \cdot \frac{1}{12}}{\frac{13}{400}} = \frac{7}{39} \approx 18\ \%$ Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei einer erwischten Person um einen Wenigtelefonierer handelt, liegt bei 18 % .		15	10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

STOCHASTIK 2

III.2 Lübecker Verkehrsbetriebe

Öffentliche Verkehrsbetriebe sind in der Regel hoch defizitär. Daran haben auch Schwarzfahrer ihren Anteil. So ist es erfreulich, dass der Anteil der Schwarzfahrer im Busverkehr der Lübecker Verkehrsbetriebe auf 8 % gesenkt werden konnte, weil alle Fahrgäste vorn beim Fahrer einsteigen müssen. Ein Kontrolleurteam kann pro Tag etwa 800 Fahrgäste überprüfen, die Personalien der entdeckten Schwarzfahrer aufnehmen und die Strafgebühr in Höhe von 40 € kassieren.

a) • Beschreiben Sie, unter welchen Umständen es sinnvoll ist, unter 800 kontrollierten Fahrgästen die Anzahl X der Fahrgäste ohne gültigen Fahrschein als binomialverteilt anzunehmen.
• Geben Sie eine Situation an, in der diese Voraussetzungen für eine Binomialverteilung nicht erfüllt sind. **10 P**

In den Aufgabenteilen b) bis d) sei die in a) genannte Zufallsvariable X binomialverteilt mit $p = 0{,}08$.

b) • Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei von 50 Fahrgästen keinen Fahrschein besitzen.
• Bestimmen Sie die Gruppengröße, ab der die Wahrscheinlichkeit, dass kein Schwarzfahrer dabei ist, unter 10% sinkt. **20 P**

c) Bestimmen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 800 kontrollierten Fahrgästen höchstens 50 Schwarzfahrer befinden. **15 P**

d) Es werden nun die zwei Personengruppen betrachtet: Fahrgäste ohne Fahrschein (S) und Fahrgäste mit gültigem Fahrschein (F). Dabei gilt nach wie vor die vor Schwarzfahrerquote von $p = 8$ %. Von den Schwarzfahrern sind 60 % unter 30 Jahren (Ereignis U) und von den Fahrgästen mit gültigem Fahrschein sind 50% unter 30 Jahren.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass
• ein unter 30-Jähriger ein Schwarzfahrer ist,
• ein über 30-Jähriger ein Schwarzfahrer ist,
• ein über 30-Jähriger kein Schwarzfahrer ist. **25 P**

e) Durch die Möglichkeit, einen Fahrschein mit dem Handy zu kaufen, soll der Anteil der Schwarzfahrer weiter gesenkt werden (fehlendes Kleingeld fällt als Grund zum Schwarzfahren weg). Dieses mit hohem Verwaltungsaufwand verbundene Angebot wird realisiert und von vielen Kunden gern angenommen. Es lohnt sich für die Stadtwerke Lübeck aber finanziell nur dann, wenn sich der Anteil der Schwarzfahrer dadurch auf unter 6 % reduziert. Dazu soll eine Untersuchung von 2000 Fahrgästen durchgeführt werden.
Verwenden Sie für alle drei Punkte dieses Aufgabenteils das übliche Signifikanzniveau 5%:

- Ein Mitarbeiter der Lübecker Verkehrsbetriebe möchte zeigen, dass das Angebot sich lohnt. Untersuchen Sie für einen geplanten Hypothesentest, wie viele Personen ohne Fahrschein bei der Kontrolle höchstens entdeckt werden dürfen, damit der Mitarbeiter begründet behaupten kann, dass sich das Angebot lohnt.
- Ein anderer, eher skeptischer Mitarbeiter ist überzeugt, dass das Handy-Angebot nicht einmal zu irgendeiner Senkung der Schwarzfahrerquote geführt hat. Beurteilen Sie, wie er die Daten auswerten würde.
- Tatsächlich werden 139 Schwarzfahrer bei der Kontrolle entdeckt. Eigentlich müssten nun beide Mitarbeiter frustriert auf einen neuen Test mit einer größeren Stichprobe drängen.
  Aber es ist in der Statistik nicht unüblich – wenn auch logisch nicht ganz korrekt, im Nachhinein das Testdesign zu ändern, um doch noch zu schwächeren signifikanten Aussagen zu kommen (dabei wird so getan, als ob man das Ergebnis noch nicht kennen würde).
  Beurteilen Sie, welche Aussagen die beiden Mitarbeiter – entsprechend ihrem Erkenntnisinteresse – noch begründet treffen könnten. **30 P**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Es wird nur zwischen zwei möglichen Ergebnissen unterschieden werden. Entweder hat ein Fahrgast einen gültigen Fahrschein oder nicht. Die Frage, ob ein Fahrgast einen gültigen Fahrschein hat, muss stochastisch unabhängig von dem Verhalten der (dem Wissen über die) anderen Fahrgäste sein. Unter dieser Voraussetzung ist es sinnvoll X ist als binomialverteilt anzunehmen. Eine Situation, in der diese Verteilung nicht gilt, ist z.B. das Auftreten von Fahrgästen in sozialen Gruppen, bei denen alle keinen Fahrschein haben.	10		
b)	$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \left(0{,}92^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92^{49}\right)$ $\approx 1 - 0{,}01547 - 0{,}06725 = 0{,}9173$. Gesucht wird die kleinste natürliche Zahl n, für die gilt: $0{,}92^n < 0{,}1$. $n \cdot \lg 0{,}92 < \lg 0{,}1 \Leftrightarrow$ (wegen $\lg 0{,}92 < 0$) $n > \frac{\lg 0{,}1}{\lg 0{,}92} \approx 27{,}6$. Bei einer Gruppe von 28 Personen ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Schwarzfahrer dabei ist, gerade noch unter 10%, bei kleineren Gruppen ist die Wahrscheinlichkeit größer.	10	10	
c)	Es gilt: $800 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92 \approx 59 > 9$. Die Laplace-Bedingung ist also erfüllt, und die betrachtete Binomialverteilung kann mit Hilfe der Normalverteilung approximiert werden: . $\sigma = \sqrt{800 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92} = \sqrt{58{,}88} \approx 7{,}673$ (>3) $\quad \mu = np = 64$ Mit Hilfe der Formelsammlung kann die Gaußsche Integralfunktion interpoliert werden: $P(X \leq 50) \approx \Phi\left(\frac{50{,}5 - 64}{\sqrt{58{,}88}}\right) \approx \Phi(-1{,}7593) = 1 - \Phi(1{,}7593) \approx 1 - 0{,}961 = 0{,}039$ Die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 800 kontrollierten Fahrgästen nicht mehr als 50 Schwarzfahrer befinden, beträgt weniger als 4%.		15	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III

d) 1. Weg: Man übersetzt die Informationen in eine Vierfeldertafel:

	unter 30	über 29	
Schwarzfahrer	**4,8 %**	3,2 %	**8 %**
keine Schwarzfahrer	**46 %**	46 %	92 %
	50,8 %	49,2 %	100 %

Dabei sind die fett unterstrichenen Daten direkt aus den gegebenen Informationen abzuleiten. Daraus ergeben sich dann die anderen Werte in den Feldern.

Es sei U das Ereignis „unter 30 zu sein“ (der Gesamtanteil der unter 30 Jährigen) und S das Ereignis “Schwarzfahrer zu sein“ (der Gesamtanteil der Schwarzfahrer). Mit der Vierfeldertafel kann man die drei Fragen sofort beantworten:

$P(S \mid U) = \frac{0{,}048}{0{,}508} \approx 9{,}4\%$; $P(S \mid \overline{U}) = \frac{0{,}032}{0{,}492} \approx 6{,}5\%$

$P(S \mid \overline{U}) = \frac{0{,}46}{0{,}492} \approx 93{,}5\%$

2. Weg: Folgende Daten sind bekannt:
$P(S) = 0{,}08$, $P(U \mid S) = 60\ \%$, $P(U \mid \overline{S}) = 50\ \%$

Mit dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit oder einem Baumdiagramm erhält man:
$P(U) = P(S) \cdot P(U \mid S) + P(\overline{S}) \cdot P(U \mid \overline{S}) = 0{,}08 \cdot 0{,}6 + 0{,}92 \cdot 0{,}5 = 0{,}508$.

Damit ergeben sich die gesuchten Wahrscheinlichkeiten zu

- $P(S \mid U) = \frac{P(S) \cdot P(U \mid S)}{P(U)} = \frac{0{,}08 \cdot 0{,}6}{0{,}508} = \frac{0{,}048}{0{,}508} \approx 9{,}4\%$
- $P(S \mid \overline{U}) = \frac{P(S) \cdot P(\overline{U} \mid S)}{P(\overline{U})} = \frac{P(S) \cdot (1 - P(U \mid S))}{1 - P(U)}$
  $= \frac{0{,}08 \cdot 0{,}4}{0{,}492} = \frac{0{,}032}{0{,}492} \approx 6{,}5\%$
  oder auch
  $P(S \mid \overline{U}) = 1 - P(\overline{S} \mid \overline{U}) = 1 - \frac{P(\overline{S}) \cdot P(\overline{U} \mid \overline{S})}{P(\overline{U})} = 1 - \frac{P(\overline{S}) \cdot (1 - P(U \mid \overline{S}))}{1 - P(U)}$
  $= 1 - \frac{0{,}92 \cdot 0{,}5}{0{,}492} = 1 - \frac{0{,}46}{0{,}492} \approx 6{,}5\%$
- $P(\overline{S} \mid \overline{U}) = 1 - P(S \mid \overline{U}) \approx \frac{0{,}46}{0{,}492} \approx 93{,}5\ \%$

25

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	Der <u>erste Mitarbeiter</u> will begründen, dass p unter 0,06 gesunken ist, er wird deshalb versuchen, $H_0 : p \geq 0{,}06$ zu verwerfen durch einen einseitigen Test: X sei die Anzahl der Schwarzfahrer unter den 2000 zu kontrollierenden Fahrgästen. Kleine Werte von X sprechen gegen die Nullhypothese, deshalb suchen wir den größten Wert von k, für den gilt: $P(X \leq k \mid H_0) \leq 5\,\%$. Wir betrachten die 2000-0,06-Binomialverteilung, mit deren Hilfe wir diese bedingte Wahrscheinlichkeit nach oben abschätzen können: Es gilt $\mu = np = 2000 \cdot 0{,}06 = 120$ $\sigma = \sqrt{112{,}8} \approx 10{,}62$. Weil $\sigma > 3$ (Laplace-Bedingung) können wir die Binomialverteilung durch eine passende Normalverteilung approximieren: $P(X \leq k) = P\left(\frac{X - \mu + 0{,}5}{\sigma} \leq \frac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma}\right) \approx \Phi\left(\frac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma}\right)$ Wir suchen also den größten Wert von $k \in \mathbb{N}$, für den $\frac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma} \leq -1{,}64$, das ist k = 102. Wenn $X \leq 102$ könnte der erste Mitarbeiter von Signifikanz (auf dem 5%-Niveau) sprechen, deshalb die Nullhypothese ablehnen und damit begründet behaupten, dass der Schwarzfahreranteil auf unter 6 % gesunken sei. Der <u>zweite Mitarbeiter</u> will zeigen, dass das Handy nicht einmal zu irgendeiner Senkung der Schwarzfahrerquote geführt hat, er müsste versuchen, $H_0 : p < 0{,}08$ in einen ebenfalls einseitigen Test zu verwerfen: Große Werte von X sprechen gegen die Nullhypothese, deshalb suchen wir den kleinsten Wert von k für den gilt: $P(X > k \mid H_0) \leq 5\,\%$. Wir betrachten die 2000-0,08-Binomialverteilung, mit deren Hilfe wir diese bedingte Wahrscheinlichkeit nach oben abschätzen können: Es gilt $\mu = np = 2000 \cdot 0{,}08 = 160$ und $\sigma = \sqrt{147{,}2} \approx 12{,}13$. Weil auch hier $\sigma > 3$ (Laplace-Bedingung), können wir wieder die Binomialverteilung durch eine passende Normalverteilung approximieren: $P(X > k) = 1 - P\left(\frac{X - \mu + 0{,}5}{\sigma} \leq \frac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma}\right)$. Wir suchen den kleinsten Wert von $k \in \mathbb{N}$, für den $1 - \Phi\left(\frac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma}\right) \leq 5\,\%$, d.h. den kleinsten Wert von k, für den $\Phi\left(\frac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma}\right) \geq 95\,\%$, also $\frac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma} \geq 1{,}64$, das ist k = 180. Falls $X > 180$, könnte der zweite Mitarbeiter von Signifikanz (auf dem 5%-Niveau) sprechen, deshalb die Nullhypothese ablehnen und damit begründet behaupten, dass der Schwarzfahreranteil nicht einmal unter 8 % gesunken sei. Falls $102 < X \leq 180$ – also insbesondere bei den tatsächlich ermittelten 139 Schwarzfahrern – hätte keiner der beiden Kontrahenten ein signifikantes Ergebnis, und das Testergebnis ließe keine aus den Daten begründeten neuen Schlüsse zu.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Beide könnten aber ihre Behauptungen abschwächen: Der erste, indem er behauptet, dass immerhin die Quote der Schwarzfahrer überhaupt gesunken sei und der andere, indem er behauptet, dass die Schwarzfahrerquote zumindest nicht kleiner als 0,06 sei. Es müssen dazu alle Argumentationen und Berechnungen wiederholt werden nur mit vertauschten Rollen von $p = 0{,}06$ und $p = 0{,}08$. *(Praktisch heißt das lediglich, dass noch zweimal in der Tabelle nachgesehen werden muss, und dass zwei Ungleichungen nochmals umgestellt werden müssen).* Man erhält: Falls $X \leq 140$ könnte nun der erste Mitarbeiter von Signifikanz (auf dem 5%-Niveau) sprechen, deshalb die Nullhypothese ablehnen und damit begründet behaupten, dass der Schwarzfahreranteil auf unter 8 % gesunken sei. Falls $X > 137$, könnte der zweite Mitarbeiter von Signifikanz (auf dem 5%-Niveau) sprechen, deshalb die Nullhypothese ablehnen und damit begründet behaupten, dass der Schwarzfahreranteil aber nicht unter 6 % gesunken sei. Das tatsächlich eingetretene Untersuchungsergebnis $X = 139$ bestätigt in diesem Sinne beide Mitarbeiter, und man kann mit guten Gründen annehmen, dass der tatsächliche Anteil an Schwarzfahrern tatsächlich irgendwo zwischen 6 % und 8 % liegt.		15	15
	Insgesamt 100 BWE	20	65	15