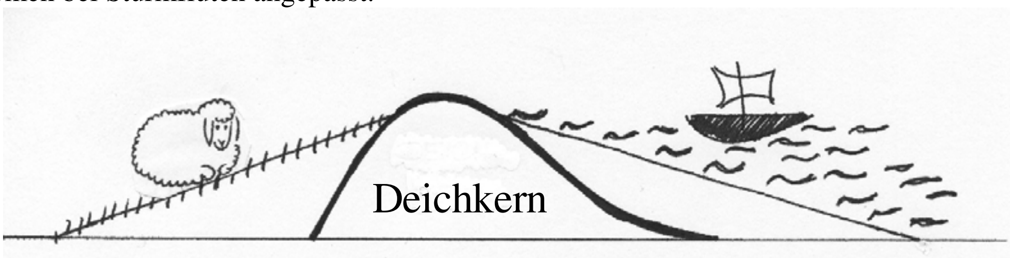
**ANALYSIS 1**

## I.1 Deichbau

Entlang der Küsten sind so genannte Sommerdeiche den Hauptdeichen vorgelagert. Sie sind mit Böschungsneigungen (Neigung = Betrag der Steigung) von 1 : 7 (bis zu 1 : 12) zur See hin und mit Böschungsneigungen von 1 : 5 (bis zu 1 : 10) zum Land hin den besonderen Beanspruchungen durch das Überströmen bei Sturmfluten angepasst.




Die Deiche bestehen aus einem so genannten Deichkern und zum Land und zum Wasser hin auslaufenden Wällen. Der Kern eines solchen Deiches kann durch die Funktion $f_{a;b}$ mit

$$f_{a;b}(x) = (x+a)\cdot e^{b-x} \qquad a,b \in \mathbb{R}$$

beschrieben werden.

a) Ermitteln Sie die Nullstelle, den Extrempunkt und den Wendepunkt des Funktionsgraphen in Abhängigkeit von den Parametern $a$ und $b$. [Kontrollergebnis: $f'(x) = (1-x-a)e^{b-x}$ ].

Ein Sommerdeich in der Nähe von Nordstrand soll eine Deichhöhe von 3,50 m haben. Für die Modellierung soll folgendes gelten:

- Die Deichkrone (das ist die höchste Stelle des Deichkerns) liegt auf der $y$-Achse.
- Die Meerseite des Deiches entspricht dem Funktionsgraphen für $x > 0$.
- Die Landseite des Deiches entspricht dem Funktionsgraphen für $x < 0$.

b) Bestimmen Sie $a$ und $b$ so, dass $f_{a;b}$ den oben genannten Bedingungen entspricht. Geben Sie die Koordinaten von Wendepunkt und Hochpunkt an und skizzieren Sie den Graphen der Funktion. [Kontrollergebnis: $a = 1$, $b = \ln 3{,}5$.]

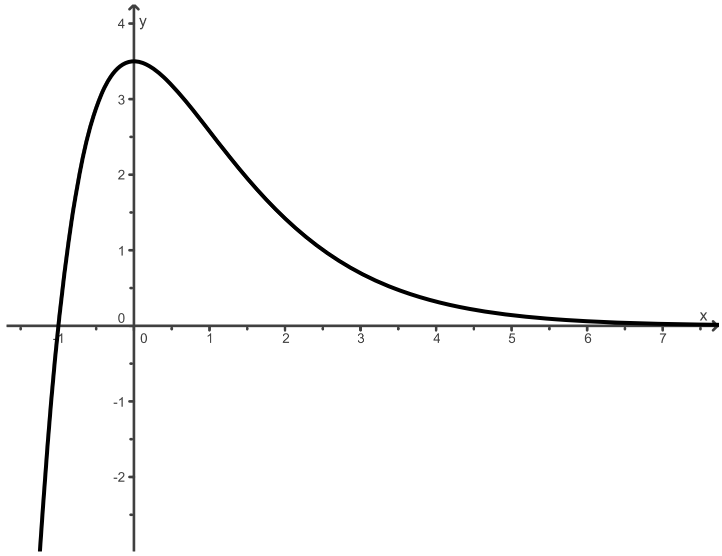
c) Zur Landseite wird der Deichkern mit einem Sand-Kiesel-Gemisch aufgeschüttet. Die Höhe der Aufschüttung kann mit einer linearen Funktion $g$ beschrieben werden, die die $y$-Achse in der Deichkrone trifft und die Höhe NN (Normal Null, also Schnittpunkt mit der $x$-Achse) bei $x = -17{,}5$ erreicht.
Berechnen Sie den Funktionsterm von $g$ und zeigen Sie, dass sich das Gefälle der Aufschüttung in der vorgegebenen Toleranz von 1:5 bis 1:10 befindet.

d) Zur Seeseite hin soll der Deich vom Wendepunkt ab mit einem Gefälle von 1:7 ebenfalls mit einem Sand-Kiesel-Gemisch aufgeschüttet werden.
Berechnen Sie den Term der linearen Funktion $h$, die diese Aufschüttung beschreibt.

e) Ermitteln Sie, wie viel m$^3$ Sand-Kiesel-Gemisch für 10 Meter der seeseitigen Aufschüttung benötigt werden.

## Erwartungshorizont

| | Lösungsskizze | Zuordnung, Bewertung I | II | III |
|---|---|---|---|---|
| a) | Nullstelle:<br>Bedingung: $f_{a,b}(x) = (x+a)e^{b-x} = 0 <=> x = -a$<br>Die Nullstelle liegt bei $x = -a$<br><br>Extrempunkt:<br>$f'_{a;b}(x) = 0 \wedge f''_{a;b}(x) \neq 0$<br>$f'_{a;b}(x) = 0 \Leftrightarrow f'_{a;b}(x) = (1-x-a)\cdot e^{b-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1-a$<br>$f''_{a;b}(x) = (x+a-2)e^{b-x}$<br>$f''_{a;b}(1-a) = -e^{b-(1-a)} < 0$ für alle $a,b \in \mathbb{R}$.<br>Bei $x = 1 - a$ liegt ein lokales Maximum vor.<br>Weiter gilt: $f_{a,b}(1-a) = e^{b+a-1}$.<br>Damit ergibt sich für den Hochpunkt: $H(1-a \mid e^{b+a-1})$<br><br>Wendepunkt:<br>$f''_{a;b}(x) = 0 \wedge f'''_{a;b}(x) \neq 0$<br>Es gilt: $f''_{a;b}(x) = 0 \Leftrightarrow f''_{a;b}(x) = (x+a-2)\cdot e^{b-x} = 0 \Leftrightarrow x = 2-a$<br>$f'''_{a;b}(x) = (-x-a+3)e^{b-x}$<br>$f'''_{a;b}(2-a) = e^{b-2+a} > 0$ für alle $a,b \in \mathbb{R}$.<br>Bei $x = 2 - a$ liegt eine Wendestelle.<br>Mit $f_{a,b}(2-a) = 2\cdot e^{b+a-2}$ ergibt sich für den Wendepunkt $W(2-a \mid 2e^{b+a-2})$ | | 30 | |
| b) | Bedingungen:<br>1. Lokales Maximum bei $x = 0$. Also $x = 1 - a = 0 <=> a = 1$<br>(alternativer Ansatz : $f'_{a;b}(0) = 0$ )<br>2. Maximum $y = 3{,}5$ Also muss gelten:<br>$f_{1;b}(0) = (0+1)e^{b-0} = 3{,}5 <=> b = \ln 3{,}5$.<br>Damit heißt die gesuchte Funktion: $f_{1;1,25}(x) = (x+1)e^{1,25-x}$<br>*oder auch ohne Rundung* $f_{1;\ln 3,5}(x) = 3{,}5\cdot(x+1)e^{-x}$.<br>Wendepunkt $W\left(1 \mid \frac{7}{e}\right)$, Hochpunkt: $(0 \mid 3{,}5)$. | | | |

| | Lösungsskizze | I | II | III |
|---|---|---|---|---|
| |  | 10 | 15 | |
| c) | $g(x) = \frac{3,5}{17,5} \cdot (x + 17,5)$<br>$= 0,2x + 3,5$.<br>Es ergibt sich für die gesuchte Funktion: $g(x) = 0,2x + 3,5$.<br>Die Steigung von 0,2 liegt im Bereich der geforderten Böschungsneigung. | 5 | 5 | |
| d) | Wendepunkt $W\left(1 \mid \frac{7}{e}\right) \approx (1 \mid 2,58)$.<br>Gleichung der seeseitigen Böschung:<br>$h(x) = \frac{7}{e} - \frac{1}{7} \cdot (x-1)$<br>$= -\frac{1}{7}x + \left(\frac{7}{e} + \frac{1}{7}\right)$<br>$\approx -\frac{1}{7}x + 2,72.$ | 5 | | |
| e) | 1. Die Querschnittsfläche des Deichkerns vom Wendepunkt bis zur Nullstelle von $h$ ist zu berechnen:<br>Nullstelle von $h$: $h(x) = 0 \iff x \approx 19,03$.<br>Es kann mit $x = 19$ gerechnet werden.<br>Damit ergibt sich für die Querschnittfläche des Kerns:<br>$A_K = \int_1^{19} f_{1;1,25}(x)dx$. | | | |

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| | Bestimmung einer Stammfunktion $F_{1;1,25}$ mit Hilfe partieller Integration:<br>Es gilt: $f_{1;1,25}(x) = 3,5 \cdot (x+1) \cdot e^{-x}$<br>Sei: $u(x) = 3,5 \cdot (x+1)$ und $v'(x) = e^{-x}$.<br>Dann ergibt sich: $u'(x) = 3,5$ und $v(x) = -e^{-x}$.<br>Wir erhalten folgende Stammfunktion:<br>$F_{1;1,25}(x) = -3,5 \cdot (x+2) \cdot e^{-x}$.<br>Es gilt: $F_{1;1,25}(1) = -3,863$ und $F_{1;1,25}(19) = \frac{147}{2 \cdot e^{19}} \approx 0$.<br>Damit ergibt sich für das Maß der Querschnittfläche des Deichkerns:<br>$A_K = 3,863$.<br><br>2. <u>Die Querschnittsfläche des Dreiecks ist zu berechnen:</u><br>$A_D \approx (18 \cdot 2,58) : 2 = 23,22$.<br><br>3. <u>Die Querschnittfläche *A* des aufgeschütteten Walls ist zu berechnen:</u><br>$A = A_D - A_K = 19,36$.<br>Damit ergibt sich, dass 193,6 $m^3$ Sand-Kies-Gemisch benötigt werden. | | 10 | 20 |
| | Gesamt: | 20 | 60 | 20 |

**ANALYSIS 2**

## I.2 Gezeiten

*Für die gesamte Aufgabe können Sie Ihr Wissen über Eigenschaften der Sinus-Funktion verwenden, Methoden der Differenzialrechnung sind dann kaum nötig.*

Die Deutsche Bucht als Teil der Nordsee unterliegt den Gezeiten. In einem regelmäßigen Rhythmus von gut 6 Stunden verändert sich die Wassertiefe abwechselnd zu einem Hochstand (Hochwasser) und einem Niedrigstand (Niedrigwasser). Es stellen sich also an jedem Tag etwa 2 Hoch- und 2 Niedrigwasser ein.

Hinzu kommt, dass sich im Laufe eines Monats in Abhängigkeit von den Mondphasen die Hoch- und Niedrigwasserstände ändern mit jeweils zwei Maximal- und zwei Minimalwerten. Zur „Springzeit" und in zeitlicher Nähe (ca. ± 4 Tage) sind die Hochwasserstände besonders hoch und die Niedrigwasserstände besonders niedrig und zur „Nippzeit" und in zeitlicher Nähe sind die Hochwasserstände relativ gering und die Niedrigwasserstände relativ hoch.

Auf dem beigelegten Diagrammblatt sind drei Kurven abgebildet. Die $y$-Achsen zeigen an einem festen Ort (Hafen, z.B. Norderney) jeweils den Wasserstand (Pegel) in Metern bezogen auf den mittleren Wasserstand an, die $x$-Achse ist eine Zeitachse mit einer Einteilung in Tagen. Jeder Monat des Jahres wird mit 30 Tagen verrechnet.

a) Die Kurven 1 bis 3 auf dem beigefügten Diagrammblatt haben folgende Funktionsgleichungen:

$$f(x) = \frac{3}{10}\cdot\sin\left(\frac{12}{30}x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{3}{2} \qquad g(x) = \sin(12x) \qquad h(x) = f(x)\cdot g(x)$$

Entscheiden Sie, welche Kurve zu welcher Funktionsgleichung gehört.

Die Funktion $h$ modelliert grob die Gezeiten in dem betreffenden Hafen.
$x = 0$ markiert den Beginn eines Monats.

b) Bestimmen Sie innerhalb der ersten 7 Tage des Monats die genauen Zeitpunkte (in Tagen, Stunden und Minuten) und die zugehörigen Wasserstände zur Springzeit für das höchste Hochwasser und für das niedrigste Niedrigwasser.

Berechnen Sie dabei zunächst die Extremstellen der beiden Funktionen $f$ und $g$ im Intervall $[0;7]$, um mit diesen Ergebnissen die Hoch- und Tiefpunkte der Gezeitenfunktion $h$ zu bestimmen.

Fortsetzung nächste Seite →

Seite 2 der Aufgabe **Gezeiten**

c) Durch die Gezeiten entstehen Strömungen, zum Beispiel in den engen Durchfahrten zwischen den ostfriesischen Inseln. Die Stärke dieser Wasserströmungen (die für die Schifffahrt wichtig ist) wird wesentlich auch davon bestimmt, wie stark das Wasser steigt oder fällt, mit anderen Worten durch die jeweiligen Änderungsraten des Wasserstandes. Deshalb sollen hier die absolut maximalen Änderungsraten des Wasserstandes und zugehörige Zeitpunkte bestimmt werden. Dazu müssten – nach üblichem Verfahren – Nullstellen der 2. Ableitung der Funktion $h$ ( s.o. $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ ) ermittelt werden, was aber – wenn man exakt rechnen will – relativ schwierig bzw. umständlich ist. Nun ändert sich aber die Funktion $f$ im Vergleich zur Funktion $g$ relativ wenig, so dass in der Nähe jedes Zeitpunktes $x_0$ der Wert $f(x_0)$ näherungsweise als konstanter Faktor auf $g(x)$ wirkt.

Betrachten Sie deshalb <u>zunächst</u> vereinfachend Gezeitenfunktionen, bei denen Hoch- und Niedrigwasser jeweils immer den gleichen Wasserstand erreichen, bei denen also der Wasserstand zum Zeitpunkt $x$ durch $k \cdot g(x)$ beschrieben wird mit einer Konstanten $k$ $(k > 0)$ und bestimmen Sie unter dieser Annahme die Stellen (Zeitpunkte), bei denen der Betrag der Änderungsrate des Wasserstandes maximal wird.

Bestimmen Sie nun <u>unter diesen</u> vielen Zeitpunkten die beiden, die benachbart zum ersten Springzeitpunkt sind, und begründen Sie, dass die dem Betrage nach absolut höchsten Änderungsraten ziemlich genau hier zu erwarten sind. Bestimmen Sie deshalb diese beiden Änderungsraten und rechnen Sie das Ergebnis auch in die Einheit cm/min um.

d) Die Funktion $f$ ist vom Typ $f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d$ .

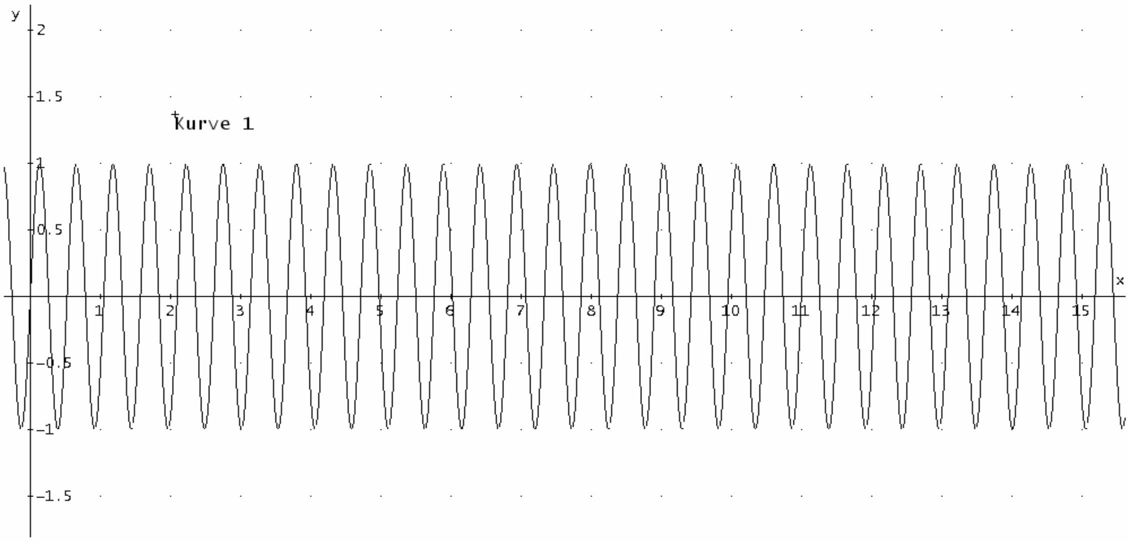
Beschreiben Sie die mathematische Bedeutung der Variablen $a$, $b$, $c$ und $d$ und interpretieren Sie im Kontext der Gezeitenfunktion $h$ die dafür gewählten Zahlen:

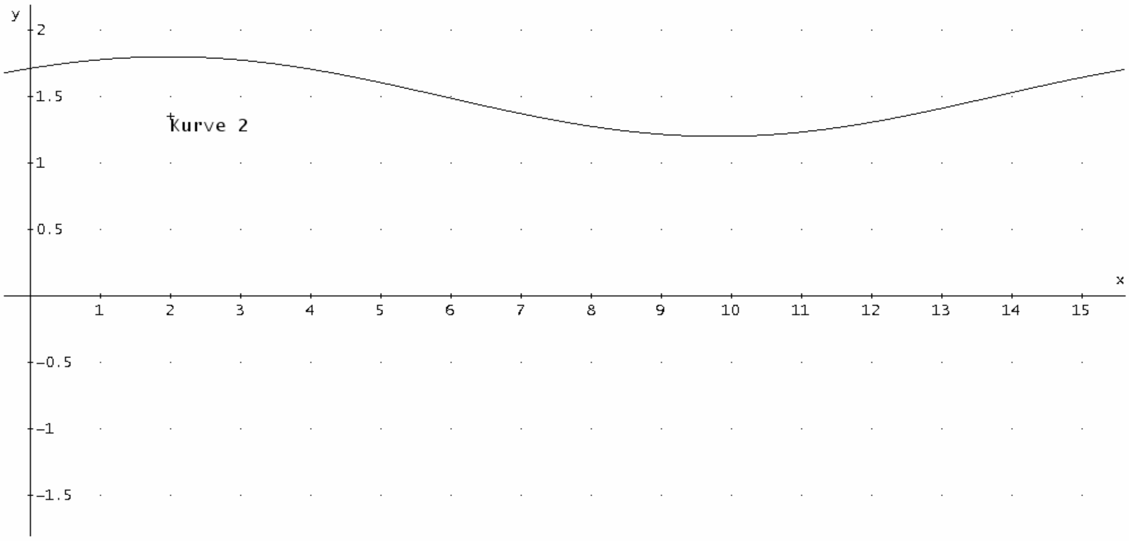
$\frac{3}{10}$ für $a$, $\frac{12}{30}$ für $b$, $\frac{\pi}{4}$ für $c$ und $\frac{3}{2}$ für $d$.

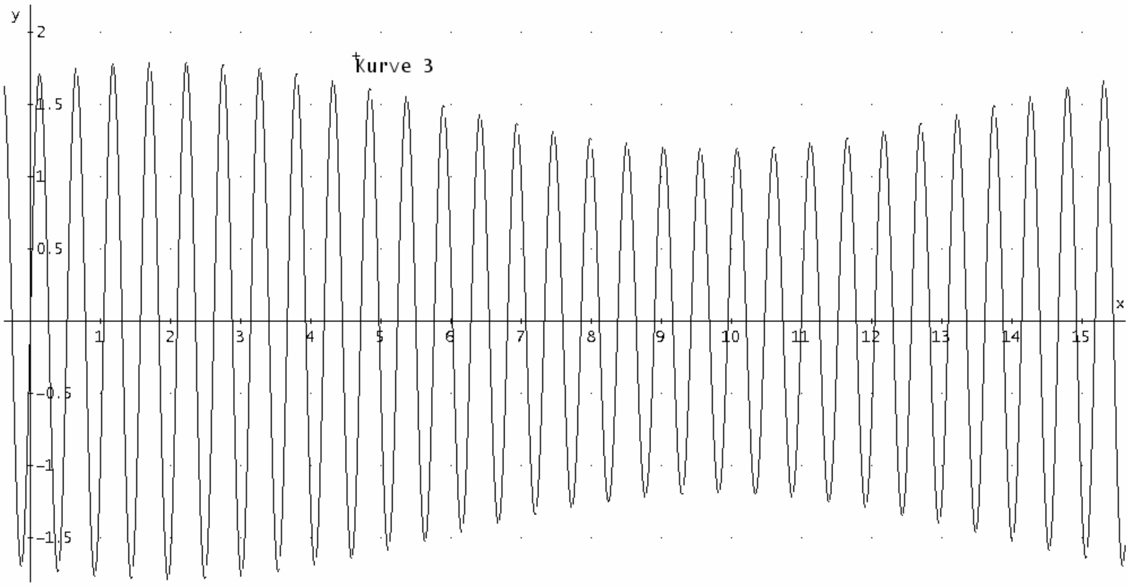
e) Auf Java verhalten sich die Gezeiten aufgrund der geographischen Gegebenheiten und damit verbundenen Wellenüberlagerungen völlig anders. Hier treten eintägige Gezeiten auf, das heißt, dass im Laufe eines Tages lediglich ein Hochwasser und ein Niedrigwasser verzeichnet werden. Das maximale Hochwasser beträgt 0,60 m und das minimale 0,40 m. Am ersten Tag des betrachteten Monats findet das niedrigste Hochwasser statt.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung, die diese Gezeitenkurve wiedergibt.

## Anlage zur Aufgabe „Gezeiten“



## Erwartungshorizont

| | Lösungsskizze | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| a) | • $g$ gehört zur Kurve 1. Der Graph weist auf einer Intervalllänge von $2\pi$ [Tagen] 12 Perioden auf und hat die Amplitude von 1, hat also eine Periodenlänge von $2\pi \cdot \frac{1}{12}$ [Tagen], also von gut einem halben Tag.<br>• $f$ gehört zur Kurve 2. Dieser Graph ist eine Sinusfunktion mit einer Periode von $2\pi \cdot \frac{30}{12}$ [Tagen] also von gut 15 Tagen, oder anders gesagt, in einer Intervalllänge von $2\pi$ *( ≈ 6 )* Tagen sind es etwas weniger als eine halbe (genau $\frac{2}{5}$) Periode. Diese Sinuskurve hat die Amplitude 0,3 und ist um 1,5 angehoben, d.h. ihre Werte schwanken zwischen 1,2 und 1,8.<br>• $h$ bildet das Produkt aus $f$ und $g$. und stellt die Kurve 3 dar. Fasst man $f$ als Faktor auf, der die Ausgangstidenfunktion $g$ multiplikativ verändert, dann schwanken die Hoch- bzw. Niedrigwasser zwischen ±1,2 m und ±1,8 m. Die Nullstellen von $g$ bleiben erhalten. Man kann auch sagen: die Amplitude wird durch $f$ variiert (Amplitudenmodulation). | | 15 | |
| b) | Die reine Sinus-Funktion hat Maxima an den Stellen $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ und Minima an den Stellen $-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.<br>Extreme Hoch- und Niedrigwasserstände treten zur Springzeit ein, also wenn die modulierende Funktion $f(x) = \frac{3}{10} \cdot \sin\left(\frac{12}{30}x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2}$ maximal ist.<br>Dies ist genau dann der Fall, wenn $\sin\left(\frac{12}{30}x + \frac{\pi}{4}\right)$ maximal ist, wenn also<br>$\frac{2}{5}x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,<br>$x = \frac{5\pi \cdot (8k+1)}{8}$, d.h. $x = ...., -\frac{35\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{45\pi}{8}, ....$<br>Von diesen Werten liegt nur $\frac{5\pi}{8} \approx 1{,}963$ in dem zu betrachtenden Zeitintervall (was auch an der entsprechenden Kurve 2 erkannt werden kann).<br>Mit den gleichen Argumenten stellt man fest, dass die unmodulierte Tidenfunktion $g(x) = \sin(12x)$ Maxima (Hochwasser) hat bei<br>$x = \frac{\pi \cdot (4k+1)}{24}$, d.h. $x = ...., -\frac{3\pi}{24}, \frac{\pi}{24}, \frac{5\pi}{24}, ...$ | | | |

| | Lösungsskizze | I | II | III |
|---|---|---|---|---|
| | und Minima (Niedrigwasser) hat bei<br>$x = \frac{\pi \cdot (4k-1)}{24}$, d.h. $x = ....,-\frac{\pi}{24}, \frac{3\pi}{24}, \frac{7\pi}{24}, ...\frac{15\pi}{24},....$<br>Hieraus erkennt man insbesondere, dass bei $\frac{5\pi}{8} = \frac{15\pi}{24}$ Springzeit und gleichzeitig Niedrigwasser ist. Hieraus folgt (ohne Differenzialrechnung), dass zu diesem Zeitpunkt ein extremes (extrem niedriges) Niedrigwasser eintreten muss.<br>Die extremen (extrem hohen) Hochwasser müssen dann die benachbarten sein, also bei $\frac{13\pi}{24} \approx 1,702$ und bei $\frac{17\pi}{24} \approx 2,225$ Umgerechnet entsprechen die ermittelten Zeitpunkte folgenden Zeiten nach Monatsbeginn:<br>Springniedrigwasser: $\frac{5\pi}{8} \simeq$ 1 Tag 23 Stunden und 7 Minuten.<br>1. Springhochwasser: $\frac{13\pi}{24} \simeq$ 1 Tag 16 Stunden und 50 Minuten.<br>2. Springhochwasser: $\frac{17\pi}{24} \simeq$ 2 Tage 5 Stunden und 24 Minuten.<br>Für die zugehörigen Wasserstände gilt:<br>$h\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -1,80$ [m], $h\left(\frac{13\pi}{24}\right) \approx 1,798$ [m], $h\left(\frac{17\pi}{24}\right) = 1,798$ [m].<br>*<u>Bemerkung:</u> Die Argumentation für die Spring<u>hoch</u>wasserstände ist nicht ganz vollständig, weil sich ja die Werte beider Funktionen f und g in einer Umgebung um die entsprechenden Zeitpunkte ändern. Die Änderungsraten sind für g aber stärker als für f, so dass die Ergebnisse tatsächlich exakt sind. Eine Extremwertbestimmung für die Funktion h wird also nicht erwartet.* | 10 | 15 | 5 |
| c) | Die Ableitung der Wasserstandsfunktion beschreibt deren Änderungsraten. Für die Ableitung von $k \cdot g$ gilt: $(k \cdot g)'(x) = 12k\cos(12x)$. Die Kosinusfunktion hat Extremstellen bei $x = n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$, die Funktion $(k \cdot g)'$ also bei<br>$x = n \cdot \frac{\pi}{12}$, $n \in \mathbb{Z}$.<br>Das erste Maximum von $f$ liegt bei $\frac{5\pi}{8} = \frac{7,5\pi}{12}$ (Springzeit, vgl. b) ), so dass die benachbarten Stellen $x_1 = 7\frac{\pi}{12}$ und $x_2 = 8\frac{\pi}{12}$ als Näherungswerte für die Zeitpunkte mit maximaler Änderungsrate von $h$ in Frage kommen.<br>Die zugehörigen Änderungsraten, kann man entsprechend obiger Argumentation mit $h'(x) \approx 12f(x)\cos(12x)$ in guter Näherung berechnen.<br>Man erhält: $h'(x_1) \approx -21,595066$ und $h'(x_2) \approx 21,595066$. | | | |

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| | Rechnet man so, wie es die meisten Schülerinnen und Schüler wohl tun werden, muss man *h* (mit der Produkt- und Kettenregel) ableiten:<br>$h'(x) =$<br>$12\left(0,3\sin(0,4x+0,25\pi)+1,5\right)\cos(12x)\ +\ 0,12\cos(0,4x+0,25\pi)\sin(12x)$<br>Setzt man jetzt die Stellen $x_1 = 7\frac{\pi}{12}$ und $x_1 = 8\frac{\pi}{12}$ in diese Ableitung ein, so erhält man im Rahmen der hier gewählten Rundungsgenauigkeit für die beiden Extremwerte der Ableitung keinen Unterschied.<br><br>21,595066 m/Tag ≈1,5 cm/min. Das Wasser fällt bzw. steigt also zu diesen beiden Zeitpunkten um ca. 1,5 Zentimeter pro Minute.<br><br>*Bemerkung: Dass die Schülerinnen und Schüler die Werte von h′ über $f \cdot g'$ in guter Näherung berechnen, ist wohl nicht zu erwarten, sondern eher die exakte Rechnung. Wenn aber ein Schüler oder eine Schülerin den Weg über die Näherung geht, sind natürlich volle Punkte für diesen Teil zu vergeben.* | | 10 | 10 |
| d) | Die Funktion *f* verändert periodisch die Hochwasser- und Niedrigwasserstände.<br>Die Variable *a* ist die Amplitude der Sinusfunktion. Dieser Wert gibt z.B. den maximalen Unterschied zwischen Springhochwasser und Nipphochwasser jeweils zum mittleren Hochwasser von 0,3 m an.<br>$\frac{2\pi}{b}$ bestimmt die Periode der Sinusfunktion, *b* gibt die Anzahl der Perioden im Intervall $2\pi$ an. Hier müssen etwa 2 Perioden auf einem Intervall von 30 untergebracht werden. Es gibt also innerhalb des Monatsintervalls von 30 Tagen entsprechend 2 Spring- und 2 Nippzeiten.<br>*d* ist eine Konstante, die die Kurve um den Betrag von 1,5 nach oben anhebt.<br>1,5 m ist somit der mittlere Hochwasserstand während einer vollen Periode. Dadurch ist der Modulationsfaktor immer positiv und schwankt um die doppelte Amplitude *a*.<br>*c* ist die Phasenverschiebung der Kurve, *c* verschiebt die Sinusfunktion somit in *x*-Richtung. Hierdurch wird der Modulationsfaktor zum Zeitpunkt 0 eingestellt: $f(0) = a \cdot \sin(c) + d \approx 1,7$ . | 10 | 10 | |
| e) | Die Frequenz der Basisfunktion ist jetzt nur halb so groß wie bei den Gezeiten in der Nordsee, daher gilt: $g_{neu}(x) = \sin(6x)$. Das Hochwasser variiert mit einer Amplitude von 0,1 bei einer mittleren Höhe von 0,5 über eine volle Spring-/Nippperiode. Die Frequenz des Spring-/Nipp-Rhythmus' bleibt unverändert wie im Aufgabenteil a). Die Phasenverschiebung beträgt etwa $\frac{3\pi}{2}$, da $h_{neu}(0)$ das Minimum der Amplitudenfunktion $f_{neu}$ und damit das niedrigste Nipphochwasser im Bereich des 1. Tages liegt. | | | |

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| | $h_{neu}(x) = f_{neu}(x) \cdot g_{neu}(x) = \left(0{,}1 \cdot \sin\left(\frac{12}{30}x + \frac{3\pi}{2}\right) + 0{,}5\right) \cdot \sin(6x)$. | | 5 | 10 |
| | Insgesamt 100 BWE | 20 | 55 | 25 |

**ANALYSIS 3**

## I.3 Funktionenschar

Gegeben ist die Funktionenschar $f_k$ mit der Gleichung $f_k(x) = x \cdot (1 - \frac{1}{k} \cdot \ln x),\ \ k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von $f_k$ an.
Berechnen Sie die Nullstellen von $f_k$ und geben Sie begründend an, für welche Werte von k die Nullstellen zwischen 0 und 1 liegen.

b) Bestimmen Sie die Extrem- und Wendepunkte von $f_k$ in Abhängigkeit von *k*.
Zeigen Sie, dass der Quotient von Extremstelle und Nullstelle unabhängig von *k* ist.
(Zur Kontrolle: $f_k'(x) = 1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k}\ln x$ .)

c) Untersuchen Sie, ob die Graphen der Schar gemeinsame Punkte haben. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Schnittpunkte.
Weisen Sie nach, dass es ein Intervall gibt, in dem jeder beliebige Graph mit negativem *k* unter jedem beliebigen Graphen mit positivem *k* verläuft.

d) Skizzieren Sie die drei Graphen für *k* = 1, *k* = 0,5 und *k* = -0,5 in ein Koordinatensystem.

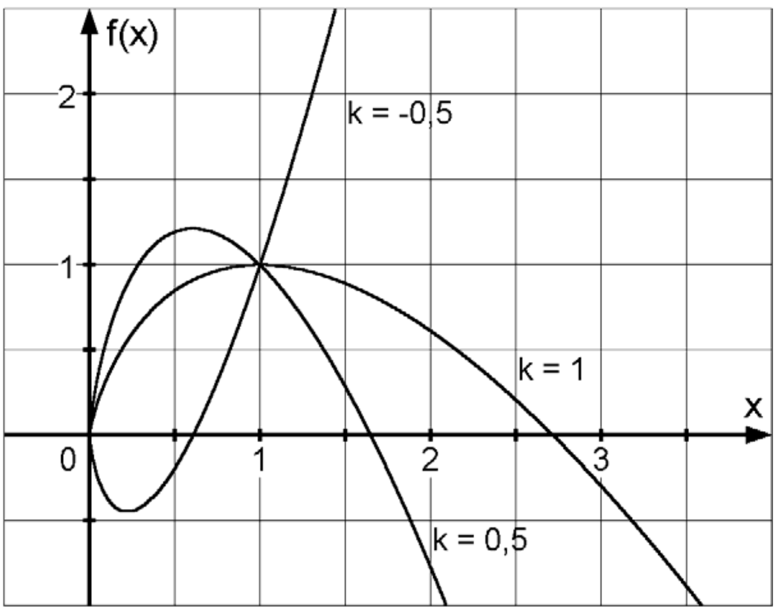
e) Bestimmen Sie für positive *k* den Inhalt $A(k)$ der Fläche, den der Graph von $f_k$ mit der *x*-Achse einschließt.
Hinweis: $\lim\limits_{c \to 0} c^2 \cdot \ln c = 0$ (Zur Kontrolle: $A(k) = \dfrac{e^{2k}}{4k}$)

f) Bestimmen Sie den Wert für *k*, *k* > 0, für den der Flächeninhalt $A(k)$ extremal wird.
Ermitteln Sie diesen Flächeninhalt und entscheiden Sie, ob es sich um ein Minimum oder ein Maximum handelt.

g) Für positive *k* schließen die Parallele zur *x*-Achse durch den Hochpunkt von $f_k$, die Parallele zur *y*-Achse durch die Nullstelle von $f_k$ sowie die Koordinatenachsen ein Rechteck ein.
Ermitteln Sie, ob das Verhältnis, in dem der Graph von $f_k$ dieses Rechteck teilt, von *k* abhängt.

## Erwartungshorizont

| | Lösungsskizze | Zuordnung, Bewertung I | II | III |
|---|---|---|---|---|
| a) | <u>Definitionsbereich:</u> $D=\mathbb{R}^+$<br><u>Nullstellen:</u> $f_k(x)$ kann nur 0 werden, wenn der 2. Faktor den Wert 0 annimmt, da 0 selber nicht zum Definitionsbereich gehört. Der 2. Faktor nimmt den Wert Null an, genau dann wenn $x=e^k$.<br>$e^k$ ist für alle $k$ positiv, also in der Definitionsmenge und damit auch Nullstelle. Für $k<0$ ist $e^k<1$, die Nullstellen liegen daher für $k<0$ zwischen 0 und 1 | 10 | 5 | |
| b) | Um die Extrem- und Wendepunkte zu bestimmen, bildet man zunächst die 1. und die 2. Ableitung.<br>Für die 1. Ableitung wendet man die Produktregel an und erhält:<br>$f_k'(x)=1-\frac{1}{k}-\frac{1}{k}\ln x$.<br>Für die 2. Ableitung folgt: $f_k''(x)=-\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{x}$.<br>Die 1. Ableitung hat eine Nullstelle und zwar bei $x=e^{k-1}$.<br>Um die Existenz der Extremstelle zu überprüfen, bildet man die 2. Ableitung an dieser Stelle und erhält $f_k''(e^{k-1})=-\frac{e^{1-k}}{k}$. Da $e^{1-k}$ stets positiv ist, wird dieser Term für positive $k$ immer negativ, also liegt in diesen Fällen ein Maximum vor. Für negative $k$ liegt entsprechend ein Minimum vor.<br>Für den Funktionswert gilt: $f_k(e^{k-1})=\frac{e^{k-1}}{k}$ und somit für die Extrempunkte: $E(e^{k-1} \mid \frac{e^{k-1}}{k})$.<br>Bildet man das Verhältnis von Null- und Extremstelle, so gilt: $\frac{x_0}{x_E}=e$, ein von $k$ unabhängiger Wert.<br>Da der Term der 2. Ableitung für alle $k$ nicht den Wert 0 annehmen kann, gibt es keine Wendepunkte. | | 20 | |
| c) | Wenn alle Graphen der Schar einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, dann muss die folgende Gleichung – unabhängig von $k$ – erfüllbar sein:<br>$x\cdot(1-\frac{1}{k_1}\cdot\ln x)=x\cdot(1-\frac{1}{k_2}\cdot\ln x),\ k_1\neq k_2$.<br>Da 0 nicht zum Definitionsbereich gehört, ist diese Gleichung genau dann erfüllt, wenn gilt: $ln(x)(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2})=0$. Dies ist äquivalent zu: $x=1$ oder $k_1=k_2$. | | | |

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| | Also schneiden sich alle Funktionsgraphen der Schar bei $x = 1$ und nur dort.<br>Da der Funktionswert dieser Stelle ebenfalls 1 ist, schneiden sich alle Graphen der Schar im Punkt (1 ǀ 1).<br>Aus der obigen Argumentation geht noch schärfer hervor, dass sich je zwei verschiedene Graphen der Schar außer bei $x = 1$ nicht mehr schneiden.<br>Es kommen als Intervalle, in dem jeder beliebige Graph mit negativem *k* unter jedem beliebigen Graphen mit positivem k verläuft, also nur Teilintervalle von $]0;1[$ bzw. $]1;\infty[$ in Frage. Man kann nun an einer beliebigen Stelle „testen“, z. B. bei $\frac{1}{2}$: $f_k\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\ln(2)}{2k}+\frac{1}{2}$. Daraus erkennt man unmittelbar, dass dieser Funktionswert für jeden negativen Wert von *k* kleiner ist als der für jeden positiven Wert von *k*. Wegen der Stetigkeit der Funktionen $f_k$ bleibt diese Relation auf dem ganzen Intervall $]0;1[$ erhalten. Alle Teilintervalle von $]0;1[$ erfüllen also die geforderte Bedingung.<br>*Alternative Argumentation:*<br>Sei $x_A$ die Stelle, an der der Verlauf der Graphen betrachtet wird. Dann muss folgende Ungleichung untersucht werden:<br>$x_A \cdot (1-\frac{1}{k_1}\cdot \ln x_A) \leq x_A \cdot (1-\frac{1}{k_2}\cdot \ln x_A),\ k_1 \neq k_2$.<br>Aus $x_A > 0$ folgt, dass nur die Beziehung $\ln x_A\,(\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k_1}) \leq 0$ zu untersuchen ist. Geht man von dem Intervall $]0;1[$ aus, dann ist der Logarithmus kleiner als 0. Hat $k_2$ ein positives Vorzeichen, dann wird mit negativem $k_1$ die Ungleichung erfüllt. Also verlaufen im Intervall $]0;1[$ alle Graphen mit $k > 0$ oberhalb aller Graphen mit $k < 0$. | | 10 | 5 |
| d) |  | 10 | | |

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| e) | Um den Flächeninhalt zu bestimmen, berechnet man das folgende Integral partiell: $A(k) = \lim\limits_{c \to 0} \int_c^{e^k} x \cdot (1 - \frac{1}{k} \ln x)\, dx$. <br> Man setzt $v'(x) = x$ und $u(x) = 1 - \frac{1}{k} \cdot \ln x$. Dann folgt: $v(x) = \frac{x^2}{2}$ und $u'(x) = -\frac{1}{kx}$. Setzt man die Terme gemäß der partiellen Integration ein, so erhält man: $(1 - \frac{1}{k} \ln x) \cdot \frac{x^2}{2} + \int \frac{1}{kx} \cdot \frac{x^2}{2}\, dx$. Das zweite Integral lässt sich elementar bestimmen und man erhält für die Stammfunktion folgenden Term: $\frac{x^2}{2} \cdot (1 - \frac{1}{k} \ln x) + \frac{x^2}{4k}$. Setzt man die Grenzen ein und berücksichtigt den angegebenen Grenzwert, so folgt $A(k) = \frac{e^{2k}}{4k}$. | | 10 | 5 |
| f) | Um das gesuchte $k$ zu erhalten, leitet man $A(k)$ mit Hilfe der Produkt-Quotienten- und Kettenregel nach $k$ ab. <br> Für die 1. und die 2. Ableitung folgt: <br> $A'(k) = \frac{e^{2k} \cdot (2k-1)}{4k^2}$ <br> $A''(k) = \frac{e^{2k} \cdot (2k^2 - 2k + 1)}{2k^3}$ <br> Da $k > 0$, ist diese 2. Ableitung stets positiv, denn die zur Klammer gehörende quadratische Gleichung hat keine reellen Lösungen. Also ist der Flächeninhalt bei $k = 0{,}5$ minimal. Er hat den Wert $\frac{e}{2}$. <br> *Hinweis. Hier sind auch andere Begründungen möglich.* | | 5 | 10 |
| g) | Die Parallelen bilden ein Rechteck mit den Seitenlängen $\frac{e^{k-1}}{k}$ und $e^k$. Dessen Flächeninhalt beträgt $A_R(k) = \frac{e^{2k-1}}{k}$ Dann folgt für das Verhältnis: <br> $A(k) : A_R(k) = \frac{e}{4}$. Dieser Wert ist von $k$ unabhängig. | | 5 | 5 |
| | Insgesamt 100 BWE | 20 | 55 | 25 |

**LA/AG 1**

## II.1 Geradenscharen

Gegeben sind eine Ebene $E$ und zwei Geradenscharen $g_a$ und $h_a$:

$$E: x_1 + 2x_2 = 3$$

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} a \\ 1+a \\ 1-a \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ a-1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}$$

a) Berechnen Sie ein $a$, für das $g_a$ parallel zu $E$ ist.
Untersuchen Sie, ob diese Gerade $g_a$ in der Ebene $E$ liegt.
Berechnen Sie allgemein für alle $a \in \mathbb{R}$ den Schnittpunkt von $g_a$ und $E$.

b) Ermitteln Sie diejenige Gerade $g_a$, die $E$ senkrecht schneidet.

c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt von $g_a$ und $h_a$ in Abhängigkeit von $a$.
Beschreiben Sie, wie Sie ausgehend von den Richtungsvektoren von $g_a$ und $h_a$ eine Koordinatenform einer Ebene $F_a$ ermitteln können, die $g_a$ und $h_a$ enthält.
Bestimmen Sie eine Koordinatenform von $F_a$.
Mögliches Ergebnis: $F_a: 2x_1 + (a-2)x_2 + (2+a)x_3 = 3a + a^2$

d) Zeigen Sie, dass eine der Ebenen $F_a$ die $x_1$-$x_2$-Ebene senkrecht schneidet und geben Sie den zugehörigen Wert $a$ an.
Bestimmen Sie den Schnittwinkel dieser Ebene $F_a$ mit $E$.

e) Bestimmen Sie die prinzipielle Lage aller Geraden, die sowohl zu $E$ als auch zu $F_{-2}$ parallel sind und die außerdem den gleichen Abstand zu diesen beiden Ebenen haben.
Ermitteln Sie eine dieser Geraden.

## Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

Berechnung von $a$:

Die Gerade $g_a$ ist parallel zu $E$, wenn ein Normalenvektor von $E$ orthogonal zu einem Richtungsvektor von $g_a$ ist.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\1+a\\1-a\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow a+2+2a=0 \Leftrightarrow a=-\frac{2}{3}$$

Die Gerade $g_{-\frac{2}{3}}$ liegt in der Ebene $E$, denn der Stützpunkt von $g_a$ erfüllt unabhängig von $a$ die Ebenengleichung.

Berechnung des Schnittpunkts:

Die eben genannte Begründung hat auch zur Folge, dass der Stützpunkt von $g_a$ zugleich der gesuchte Schnittpunkt ist. Für $a=-\frac{2}{3}$ liegt die Gerade ja in der Ebene $E$.

Alternativ kann natürlich auch die Geradendarstellung in die Koordinatenform von $E$ eingesetzt werden:

$1+ra+2(1+r(1+a))=3 \Leftrightarrow 1+ra+2+2r+2ra=3 \Leftrightarrow r(2+3a)=0$.

Der Wert $a=-\frac{2}{3}$ ist ausgeschlossen (s.o.). Somit bestimmt $r = 0$ den Schnittpunkt $S(1 \mid 1 \mid a)$, der der Stützpunkt der Geraden ist.

</td><td>20</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

Die Gerade $g_a$ schneidet die Ebene genau dann senkrecht, wenn ein Richtungsvektor der Geraden parallel zu einem Normalenvektor von $E$ ist.

Für die beiden Vektoren $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}a\\1+a\\1-a\end{pmatrix}$ ist diese Bedingung nur mit $a = 1$ erfüllbar, d.h. $g_1$ ist die senkrecht schneidende Gerade.

</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

Zur Berechnung des Schnittpunktes der Geraden kann die Gleichung

$$\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}a\\1+a\\1-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\a-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}a & -2 & 2\\1+a & -1 & 1\\1-a & 1 & -1\end{array}\right)$$

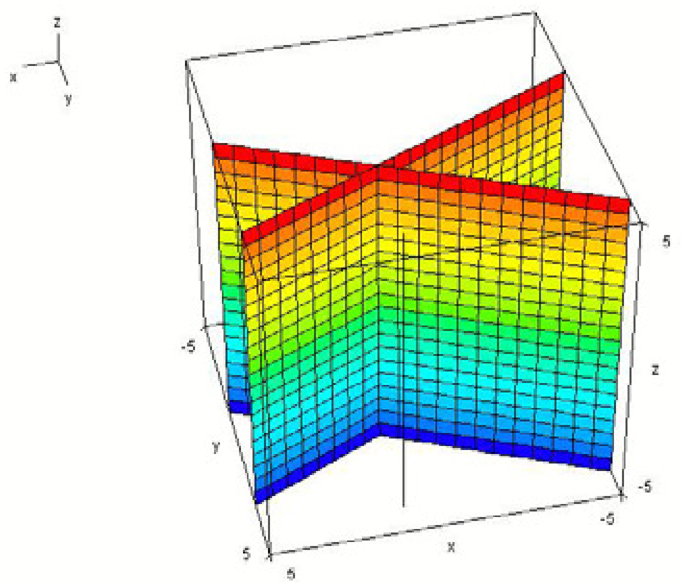
gelöst werden. Entweder die Lösung $r=0 \wedge s=-1$ fällt sofort ins Auge oder es ist noch eine Umformung des LGS

$$\left(\begin{array}{cc|c}a & -2 & 2\\1+a & -1 & 1\\1-a & 1 & -1\end{array}\right) \begin{array}{c}II-I\\ \rightarrow\\ III+I\end{array} \left(\begin{array}{cc|c}a & -2 & 2\\1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\end{array}\right) \begin{array}{c}\\ \rightarrow\\ III-II\end{array} \left(\begin{array}{cc|c}a & -2 & 2\\1 & 1 & -1\\0 & -2 & 2\end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l}r=0\\s=-1\end{array}$$

notwendig. Der Schnittpunkt ist also $T(1 \mid 1 \mid a)$.

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| | Die Geraden sind für keinen Wert von $a$ identisch, denn ihre Richtungsvektoren sind für alle $a \in \mathbb{R}$ linear unabhängig (nicht kollinear).<br>*Lösungsweg 1:*<br>Orthogonal zu den beiden Richtungsvektoren ist jeder Normalenvektor der Ebene $F_a$, in der $g_a$ und $h_a$ liegen. Ein solcher Normalenvektor lässt sich z.B. als Vektorprodukt ermitteln: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 1+a \\ 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-a)+(1+a) \\ (-a)-2(1-a) \\ 2(1+a)-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-2 \\ 2+a \end{pmatrix}$.<br>Durch Multiplikation mit dem Stützvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ erhält man die fehlende rechte Seite der Koordinatenform: $F_a : 2x_1 + (a-2)x_2 + (2+a)x_3 = 3a + a^2$.<br>*Lösungsweg 2:*<br>Aufstellen der Parameterform der Ebene $F_a$ ausgehend vom Schnittpunkt $T$:<br>$F_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} a \\ 1+a \\ 1-a \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad r, s \in \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}$.<br>Umformen in Koordinatenform ergibt z.B.:<br>$\begin{array}{lll} I\ x_1 = & 1 + r\cdot a + 2s & 2\cdot II - I \\ II\ x_2 = & 1 + r\cdot(1+a) + s & \rightarrow \\ III\ x_3 = & a + r\cdot(1-a) - s & 2\cdot III + I \end{array} \quad \begin{cases} 2x_2 - x_1 = & 1 + r\cdot(2+a) \\ 2x_3 + x_1 = & 1 + 2a + r\cdot(2-a) \end{cases}$<br>Weitere Umformungen führen schließlich auf die Koordinatenform der Ebene:<br>$(2x_2 - x_1)\cdot(2-a) - (2x_3 + x_1)\cdot(2+a) = 2 - a - (1+2a)\cdot(2+a)$<br>$(4-2a)x_2 - 2x_1 + ax_1 + (-4-2a)x_3 - 2x_1 - ax_1 = -6a - 2a^2$<br>$-4x_1 + (-2a+4)x_2 + (-2a-4)x_3 = -6a - 2a^2 \,\vert : (-2)$<br>$\Rightarrow F_a : 2x_1 + (a-2)x_2 + (2+a)x_3 = 3a + a^2$. | | 30 | |
| d) | Die $x_1$-$x_2$-Ebene wird genau dann senkrecht geschnitten, wenn die Normalenrichtung von $F_a$ parallel zur $x_1$-$x_2$-Ebene ist.<br>Das ist nur für $a = -2$ der Fall: $F_{-2} : 2x_1 - 4x_2 = -2$.<br>Ausgehend von zwei Normalenvektoren der Ebenen wird der Winkel berechnet.<br>$\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}} = \dfrac{6}{\sqrt{100}} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \alpha \approx 53{,}1°$.<br>Der Schnittwinkel der Ebenen $E$ und $F_{-2}$ beträgt etwa 53,1°. | 5 | 10 | |

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lösungsskizze</td><td colspan="3">Zuordnung, Bewertung</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>
Die Ebenen $E$ und $F_{-2}$ sind parallel zur $x_3$-Achse oder – äquivalent – senkrecht zur $x_1$-$x_2$-Ebene. Ebenso müssen also die gesuchten Geraden verlaufen.
Die beiden Ebenen $E$ und $F_{-2}$ schneiden die $x_1$-$x_2$-Ebene in zwei Geraden $l_1$ und $l_2$, die miteinander den in Teil d) berechneten Winkel $\alpha$ einschließen. Alle Geraden in Richtung der $x_3$-Achse, die durch eine der beiden Winkelhalbierenden von $l_1$ und $l_2$ verlaufen, haben die gewünschten Eigenschaften.
Interpretiert man die Koordinatenformen von $E$ und $F_{-2}$ mit $x_3 = 0$ als Geradengleichungen, so erhält man $x_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}$ und $x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}$.
Diese beiden Geraden haben als Winkelhalbierende in der $x_1$-$x_2$-Ebene die Geraden $x_2 = 1$ und $x_1 = 1$. Damit sind auch die beiden Ebenen beschrieben, in denen die gesuchten Geraden verlaufen müssen.
Beispielgerade: $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R}$ .
Abbildung mit den Ebenen E und $F_{-2}$ sowie der Beispielgeraden (nicht verlangt).


</td><td></td><td></td><td>20</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>55</td><td>20</td></tr>
</table>

**LA/AG 2**

## II.2 Sonnensegel

Über einer Terrasse soll ein dreieckiges Sonnensegel angebracht werden. Die rechteckige Terrasse kann mathematisch in der $x_1$-$x_2$-Ebene durch die Eckpunkte $T_1$ (0 | 0 | 0), $T_2$ (4 | 0 | 0), $T_3$ (4 | 8 | 0) und $T_4$ (0 | 8 | 0) beschrieben werden (1 LE $\hat{=}$ 1 m).
Die Terrasse wird an einer Seite durch eine Hauswand ( $x_1 = 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ ) und an einer anderen Seite durch eine Mauer ( $x_1 \geq 0, x_2 = 0, x_3 \geq 0$ ) begrenzt.
Im Punkt $A$ (0 | 8 | 3) wird das Sonnensegel an der Wand befestigt und im Punkt $B$ (1 | 0 | 2) an der Mauer. Im Punkt $C$ (4 | 4,5 | 2) wird das Sonnensegel an einer senkrechten Stütze am Terrassenrand angebracht. Die drei Befestigungspunkte $A$, $B$ und $C$ sind zugleich die Eckpunkte des dreiecksförmigen Sonnensegels.

a) Zeichnen Sie die Terrasse und das Sonnensegel in das beigefügte Koordinatensystem ein.

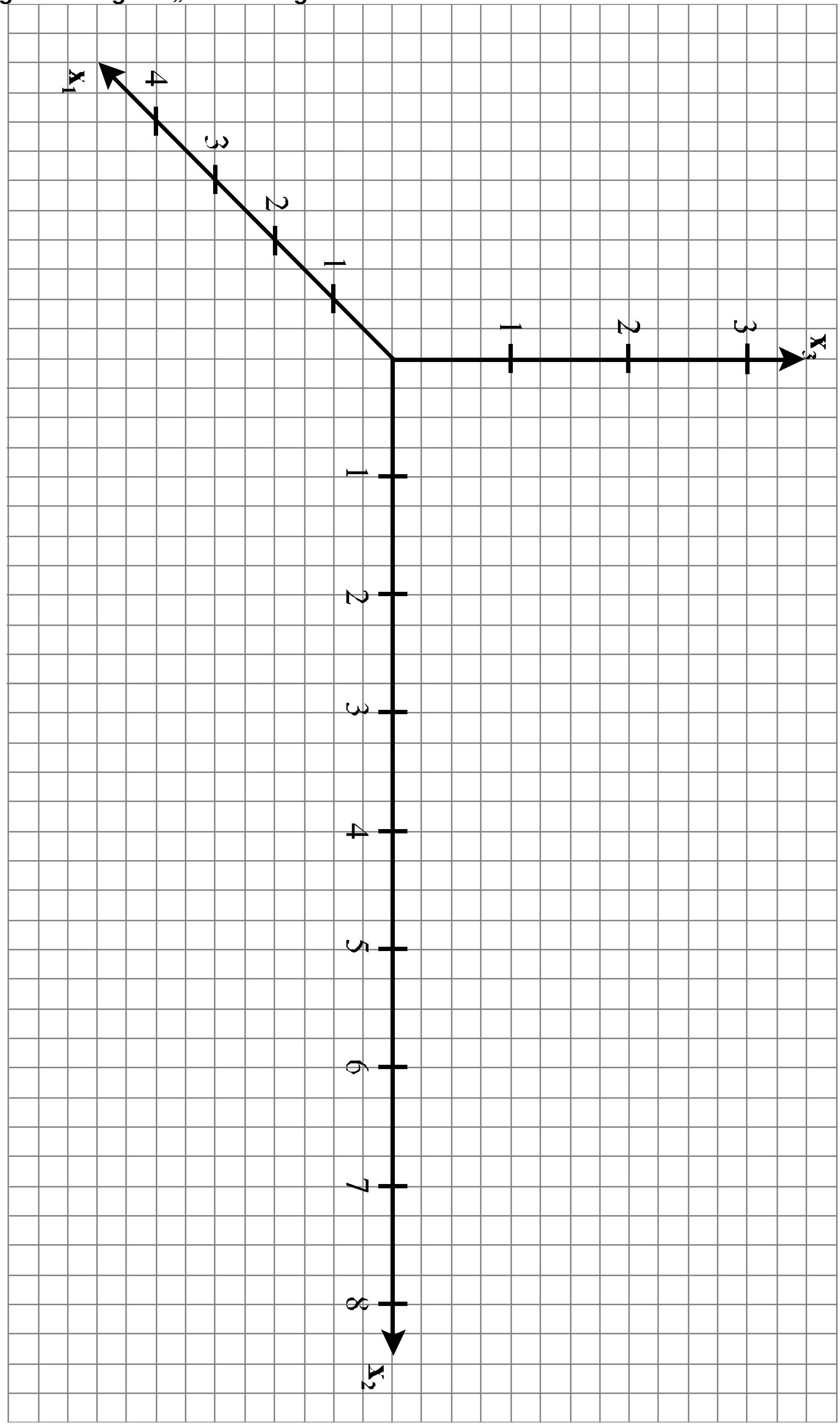
b) Das Sonnensegel soll die Form eines gleichschenkligen Dreiecks haben.
Zeigen Sie, dass diese Forderung mit dem oben gegebenen Punkt $C$ erfüllt ist.
Untersuchen Sie, ob diese Forderung auch mit anderen Punkten $C$ erfüllt werden kann, wobei $C$ weiterhin am Rand der Terrasse gegenüber der Hauswand liegen soll, und beschreiben Sie gegebenenfalls, wie Sie alle weiteren Möglichkeiten für einen solchen Punkt bestimmen können. Die Rechnungen sollen Sie nicht durchführen.

c) Bestimmen Sie die Fläche des Sonnensegels.

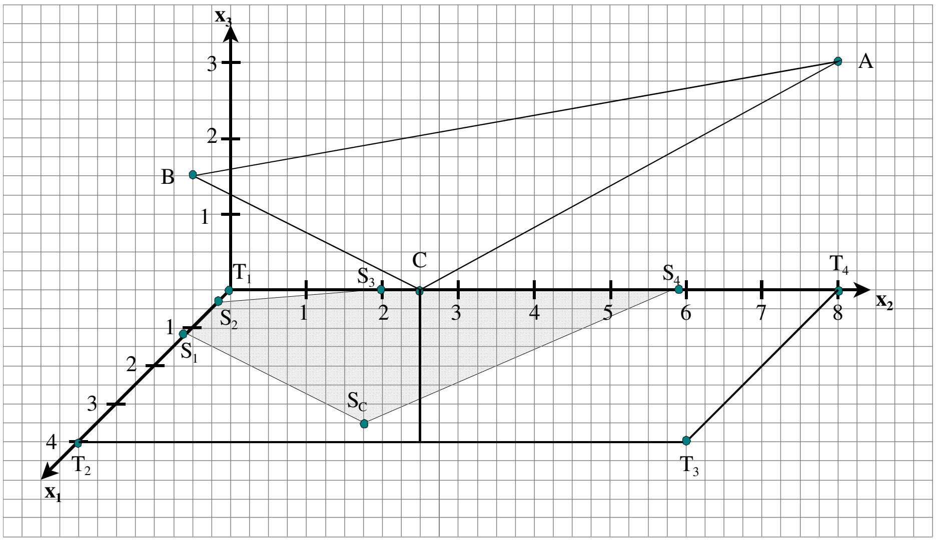
d) Bestimmen Sie den Winkel, den das Sonnensegel zur Horizontalen einnimmt.

e) Paralleles Sonnenlicht strahlt zu einem festen Zeitpunkt in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.
Der Schatten des Sonnensegels auf dem Terrassenboden ist ein Vieleck. Zwei Eckpunkte des Schattens sind $S_1$ (1,17 | 0 | 0) und $S_2$ (0,33 | 0 | 0).
Bestimmen Sie alle weiteren Eckpunkte des Schattens und zeichnen Sie den Schatten in das Koordinatensystem ein.
Geben Sie bitte die Koordinaten auf zwei Nachkommastellen *(cm)* gerundet an.
Beschreiben Sie Form und Lage der Schatten des Sonnensegels auf der Hauswand und auf der Mauer.

## Anlage zur Aufgabe „Sonnensegel“



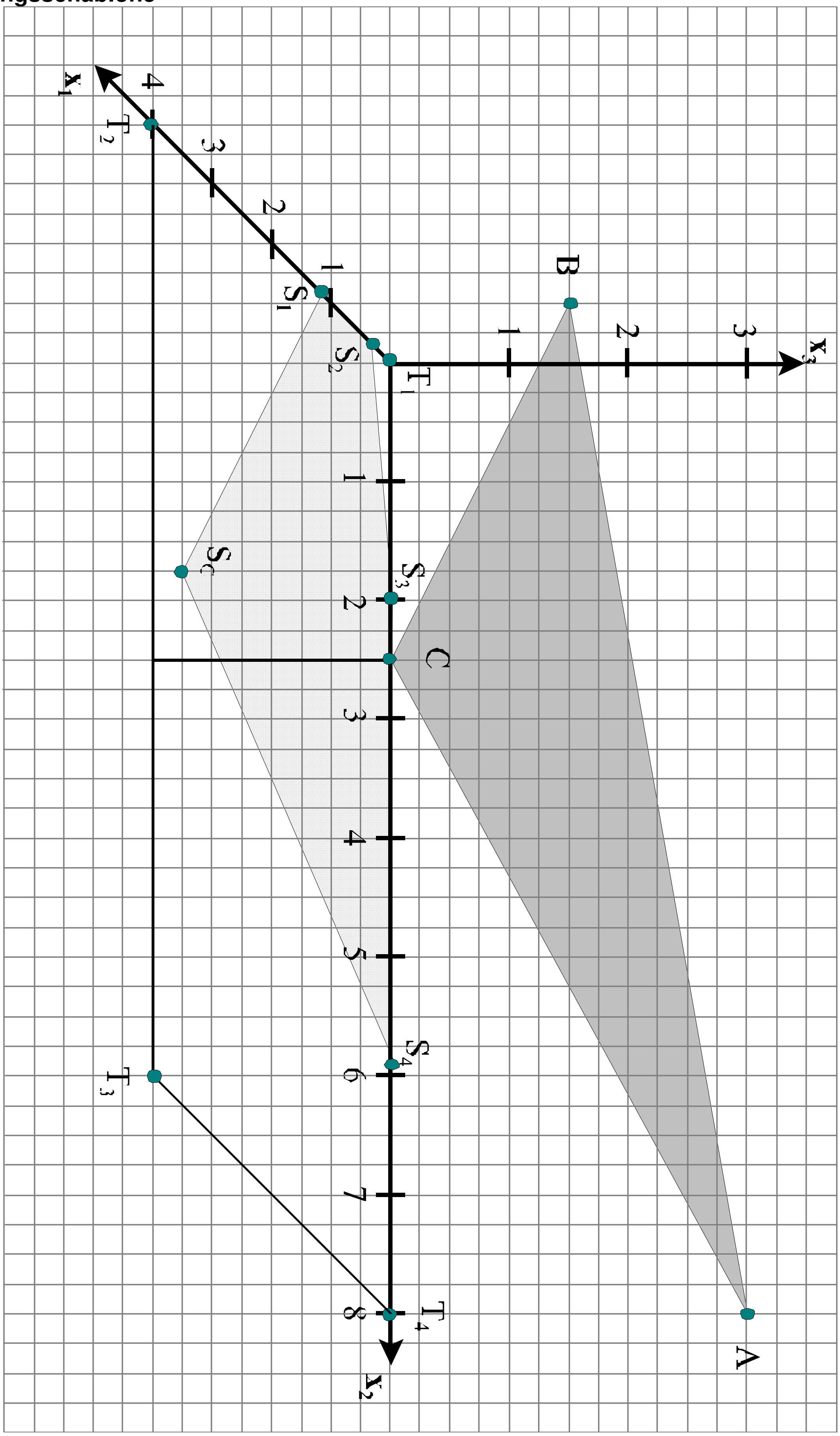
## Erwartungshorizont

| | Lösungsskizze | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| a) | <br>*Siehe auch die Anlage mit der Lösungsschablone.* | 10 | | |
| b) | <u>Dreieck *ABC* ist gleichschenklig:</u><br>Hier sind die Kanten *CA* und *CB* gleich lang:<br>$\left\lvert\overrightarrow{CA}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}-4\\3{,}5\\1\end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{29{,}25} \approx 5{,}41$ und $\left\lvert\overrightarrow{CB}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}-3\\-4{,}5\\0\end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{29{,}25}$<br>*Die Kante AB ist etwa 8,12 m lang.*<br><u>Untersuchung, ob weitere Lösungen existieren:</u><br>Für ein gleichschenkliges Dreieck *ABC* kann es 3 Möglichkeiten geben:<br>i) Die Kanten *AB* und *AC* sind gleichlang.<br>ii) Die Kanten *BC* und *AC* sind gleichlang.<br>iii) Die Kanten *AB* und *CB* sind gleichlang.<br>Die Forderung der Gleichschenklichkeit kann auch von anderen Stützpunkten *C* erfüllt werden.<br>Von *C* ist die $x_1$-Koordinate (= 4) gegeben. Legt man auch die Höhe des Stützpunktes fest (z.B. $x_3 = 2$), so gibt es genau zwei weitere Möglichkeiten, andernfalls unendlich viele.<br>Man erhält eine Lösung, wenn man die Kantenlängen etwa von i) berechnet und gleichsetzt. Dabei ist $C\,(4 \mid x_2 \mid 2)$ bzw. $C(4 \mid x_2 \mid x_3)$. | | 20 | |

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung, Bewertung I | II | III |
|---|---|---|---|---|
| c) | 1. Lösungsmöglichkeit:<br>Nach b) ist die Kante $AB$ die Basis des gleichschenkligen Dreiecks, der Fußpunkt der Höhe auf der Basis also der Mittelpunkt der Basis: $H\,(0{,}5 \mid 4 \mid 2{,}5)$.<br>Die Länge der Höhe ist $\sqrt{12{,}75}$, die Länge der Basis $\sqrt{66}$, denn<br>$\left\|\overrightarrow{HC}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}4\\4{,}5\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0{,}5\\4\\2{,}5\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}3{,}5\\0{,}5\\-0{,}5\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{12{,}75}$ und $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\8\\3\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}1\\-8\\-1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{66}$<br>Das Flächenmaß ist daher $F_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{66}\cdot\sqrt{12{,}75} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{841{,}5} \approx 14{,}50$<br>2. Lösungsmöglichkeit (Berechnung mit Hilfe des Kreuzproduktes):<br>$F_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}-1\\8\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\4{,}5\\0\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}-4{,}5\\3\\-28{,}5\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{841{,}5} \approx 14{,}50$.<br>Das Flächenmaß des Sonnensegels beträgt etwa 14,50 $m^2$. | | 15 | |
| d) | Der Winkel zwischen zwei Ebenen entspricht dem Winkel zwischen ihren Normalenvektoren. Ein Normalenvektor zur horizontalen Ebene ist $\vec{n}_H = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Die Ebene $E$ des Sonnensegels wird durch die Punkte $A$, $B$ und $C$ aufgespannt. Ein Normalenvektor $\vec{n}$ von $E$ steht senkrecht auf den Richtungsvektoren von $E$, also muss gelten:<br>$\vec{n}\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = 0 \wedge \vec{n}\cdot(\vec{c}-\vec{a}) = 0 \Leftrightarrow n_1 - 8n_2 - n_3 = 0 \wedge 4n_1 - 3{,}5n_2 - n_3 = 0$.<br>Ein Normalenvektor von $E$ ist damit z.B. $\vec{n} = \begin{pmatrix}-3\\2\\-19\end{pmatrix}$.<br>Den Winkel zwischen den Normalenvektoren erhält man aus:<br>$\cos\alpha = \frac{\left\|\vec{n}\cdot\vec{n}_H\right\|}{\left\|\vec{n}\right\|\cdot\left\|\vec{n}_H\right\|} \Leftrightarrow \cos\alpha = 0{,}9825... \Rightarrow \alpha \approx 10{,}7°$.<br>Der Winkel zwischen dem Sonnensegel und der Horizontalen beträgt also etwa 10,7°. | | 15 | |
| e) | Eine Lösungsmöglichkeit ist:<br>Es werden zunächst die Schattenpunkte von $A$, $B$ und $C$ auf der $x_1$-$x_2$-Ebene ohne Berücksichtigung der Hauswand bzw. Mauer bestimmt, da sich die Schattenfläche auf der Terrasse durch die Wände nicht verändert. Die Schattenpunkte ergeben sich als Schnittpunkte der Lichtgeraden durch die Eckpunkte des Sonnensegels mit der $x_1$-$x_2$-Ebene. Beispielrechnung für den Schattenpunkt $S_A$ von $A$: | | | |

| | Lösungsskizze | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| | Lichtgerade durch $A$: $g_A$: $\vec{x}=\vec{a}+r\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\8\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\-4\end{pmatrix},\quad r\in\mathbb{R}$.<br>Der Schnitt mit der $x_1$-$x_2$-Ebene ($x_3=0$) ergibt mit<br>$\begin{pmatrix}0\\8\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow r=\frac{3}{4}\wedge x_1=-0{,}75\wedge x_2=6{,}5$ den Schattenpunkt von $A$:<br>$S_A(-0{,}75 \mid 6{,}5 \mid 0)$. (Liegt nicht auf der Terrasse!)<br>Entsprechend werden die Schattenpunkte von $B$ und $C$ bestimmt:<br>$S_B(0{,}5 \mid -1 \mid 0)$ (liegt nicht auf der Terrasse!),<br>$S_C(3{,}5 \mid 3{,}5 \mid 0)$ (liegt auf der Terrasse!).<br>Da nur $S_C$ auf der Terrasse liegt, müssen noch die Eckpunkte auf der $x_1$- und $x_2$-Achse bestimmt werden:<br>$S_1$ ( 1,17 \| 0 \| 0 ) und $S_2$ ( 0,33 \| 0 \| 0 ) ergeben sich als Schnittpunkte der $x_1$-Achse mit der Geraden durch $S_C$ und $S_B$ bzw. der Geraden durch $S_B$ und $S_A$ und sind bereits in der Aufgabenstellung gegeben.<br>Bestimmung des Schnittpunktes $S_3$ der $x_2$-Achse mit der Geraden durch $S_B$ und $S_A$:<br>Gerade durch $S_B$ und $S_A$: $g_{SBA}$: $\vec{x}=\vec{s}_B+r\cdot(\vec{s}_A-\vec{s}_B)=\begin{pmatrix}0{,}5\\-1\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1{,}25\\7{,}5\\0\end{pmatrix}, r\in\mathbb{R}$.<br>Der Schnitt mit der $x_2$-Achse ergibt mit<br>$\begin{pmatrix}0{,}5\\-1\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1{,}25\\7{,}5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\x_2\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow r=0{,}4\wedge x_2=2$ den Punkt $S_3(0 \mid 2 \mid 0)$.<br>Entsprechend wird $S_4$ als Schnittpunkt der $x_2$-Achse mit der Geraden durch $S_A$ und $S_C$ bestimmt zu $S_4(0 \mid 5{,}97 \mid 0)$.<br>Die Schattenfläche ist also ein unregelmäßiges Fünfeck, das durch die Eckpunkte $S_C$, $S_1$, $S_2$, $S_3$ und $S_4$ beschrieben wird. (Zeichnung siehe Teil a) und Anlage.)<br><u>Form und Lage der Schatten:</u><br>Da sich der Punkt $A$ auf der Hauswand befindet, also gleich seinem Schattenpunkt ist, bildet er mit $S_3$ und $S_4$ einen dreieckigen Schatten auf der Wand.<br>Ebenso liegt der Punkt $B$ auf der Mauer, so dass er mit $S_1$ und $S_2$ ebenfalls einen dreieckigen Schatten auf der Mauer bildet. | 10 | 10 | 20 |
| | Insgesamt 100 BWE | 20 | 60 | 20 |

## Lösungsschablone



**Stochastik 1**

## III.1 Zufallszahlen

Ein Zufallsexperiment liefert Zufallsziffern von 0 bis 9 gleichverteilt mit der Wahrscheinlichkeit von jeweils $\frac{1}{10}$ für jede Ziffer. Das Zufallsexperiment werde 100-mal unabhängig wiederholt.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Ziffer 6 genau 10-mal erscheint.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Ziffer 6 mehr als 14-mal erscheint.

Otto hat ein neues Computerprogramm erhalten, von dem der Programmierer behauptet, dass jeder Programmdurchlauf 100 Zufallsziffern (von 0 bis 9) jeweils gleichverteilt und unabhängig erzeugt. Nachdem er mit dem Programm etwas gespielt hat, ist er skeptisch, ob das Programm das leistet, was es verspricht.

Otto interessiert nur die Häufigkeit der Sechsen, weil er dieses Programm für ein Glücksspiel benutzen will. Auf keinen Fall dürfen zu viele Sechsen fallen. Er vermutet aber, dass dies der Fall ist.

Es soll im Weiteren angenommen werden, dass die Realisierung der einzelnen Zufallsziffern zumindest voneinander stochastisch unabhängig ist.

c) Otto will seine Vermutung (Hypothese), dass zu viele Sechsen vom Computer ausgegeben werden, mit einem Hypothesentest auf dem 5%-Niveau signifikant nachweisen. Als Nullhypothese wählt er die Annahme, dass die Ziffer 6 jeweils – wie vom Programmierer behauptet – mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$ erscheint.

   Beschreiben Sie, wie Otto vorgehen sollte, und ermitteln Sie zu Ihrem Test unter der Annahme der Nullhypothese die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese irrtümlich verworfen wird (Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art).
   Warum lässt sich unter der Annahme der Alternativhypothese keine sinnvolle Aussage machen über die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese irrtümlich nicht verworfen wird (Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art)? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Otto führt den Test durch, erhält aber kein signifikantes Ergebnis. Was bedeutet dies und welche Schlussfolgerungen kann er daraus ziehen? Begründen Sie Ihre Antworten.

Otto überlegt, ob die Behauptung des Programmierers nicht doch zutrifft. Er versucht daher, mit hoher Sicherheit zu begründen, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs zumindest kleiner als 0,12 ist. Dazu will er hintereinander 50 Programmdurchläufe durchführen und wieder die Gesamtanzahl der Sechsen auswerten.

e) Bestimmen Sie dazu einen Hypothesentest auf dem 1%-Niveau.

   Interpretieren Sie den Fall, dass auch hier kein signifikantes Ergebnis auftritt.

## Anlage zur Aufgabe „Zufallszahlen“

### Tabelle der kumulierten Binomialverteilung für $n = 100$

| k \ p | 0,1 | $\frac{1}{6}$ | 0,2 | 0,25 | 0,3 | $\frac{1}{3}$ | 0,4 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **1** | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **2** | 0,002 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **3** | 0,008 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **4** | 0,024 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **5** | 0,058 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **6** | 0,117 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **7** | 0,206 | 0,004 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **8** | 0,321 | 0,010 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **9** | 0,451 | 0,021 | 0,002 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **10** | 0,583 | 0,043 | 0,006 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **11** | 0,703 | 0,078 | 0,013 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **12** | 0,802 | 0,130 | 0,025 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **13** | 0,876 | 0,200 | 0,047 | 0,002 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **14** | 0,927 | 0,287 | 0,080 | 0,005 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **15** | 0,960 | 0,388 | 0,129 | 0,011 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **16** | 0,979 | 0,494 | 0,192 | 0,021 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **17** | 0,990 | 0,599 | 0,271 | 0,038 | 0,002 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **18** | 0,995 | 0,696 | 0,362 | 0,063 | 0,005 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **19** | 0,998 | 0,780 | 0,460 | 0,100 | 0,009 | 0,001 | 0,000 | 0,000 |
| **20** | 0,999 | 0,848 | 0,559 | 0,149 | 0,016 | 0,002 | 0,000 | 0,000 |
| **21** | 1,000 | 0,900 | 0,654 | 0,211 | 0,029 | 0,005 | 0,000 | 0,000 |
| **22** | 1,000 | 0,937 | 0,739 | 0,286 | 0,048 | 0,009 | 0,000 | 0,000 |
| **23** | 1,000 | 0,962 | 0,811 | 0,371 | 0,076 | 0,016 | 0,000 | 0,000 |
| **24** | 1,000 | 0,978 | 0,869 | 0,462 | 0,114 | 0,028 | 0,001 | 0,000 |
| **25** | 1,000 | 0,988 | 0,913 | 0,553 | 0,163 | 0,046 | 0,001 | 0,000 |
| **26** | 1,000 | 0,994 | 0,944 | 0,642 | 0,224 | 0,071 | 0,002 | 0,000 |
| **27** | 1,000 | 0,997 | 0,966 | 0,722 | 0,296 | 0,107 | 0,005 | 0,000 |
| **28** | 1,000 | 0,999 | 0,980 | 0,792 | 0,377 | 0,152 | 0,008 | 0,000 |
| **29** | 1,000 | 0,999 | 0,989 | 0,850 | 0,462 | 0,209 | 0,015 | 0,000 |
| **30** | 1,000 | 1,000 | 0,994 | 0,896 | 0,549 | 0,277 | 0,025 | 0,000 |

## Erwartungshorizont

| | Lösungsskizze | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| a) | Der Tabelle entnimmt man: $B(\frac{1}{10},100,10) \approx 0{,}132$ .<br>Also beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass bei 100 stochastisch unabhängig voneinander durchgeführten Versuchen die Sechs genau 10-mal erscheint, ca. 13 %. | 10 | | |
| b) | Der Tabelle entnimmt man: $1-\sum_{i=0}^{14} B(\frac{1}{10},100,i) \approx 0{,}073$ .<br>Also beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass bei 100 stochastisch unabhängig voneinander durchgeführten Versuchen die Sechs mehr als 14-mal erscheint, ca. 7,3 %. | 10 | | |
| c) | Man sollte die Hypothese $H_0$: $p = 0{,}1$ gegen die Hypothese $H_1$: $p > 0{,}1$ rechtsseitig testen.<br>Aus b) wissen wir $1-\sum_{i=0}^{14} B(\frac{1}{10},100,i) \approx 0{,}073$ .<br>Wir berechnen außerdem: $1-\sum_{i=0}^{15} B(\frac{1}{10},100,i) \approx 0{,}04$ .<br>Aus diesen Ergebnissen folgt, dass man den Ablehnungsbereich für die Nullhypothese so wählen sollte, dass sie abgelehnt wird, wenn die Anzahl der Sechsen größer als 15 ausfällt, und dass die Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art ca. 4 % beträgt, also insbesondere kleiner als 5 % ist.<br>Über die Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art lässt sich deshalb keine Aussage machen, weil $H_1$ sich aus vielen (sogar kontinuierlich unendlich vielen) Fällen zusammensetzt ($H_1$ ist eine <u>zusammengesetzte</u> Hypothese).<br>*<u>Bemerkung:</u> Die Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art wäre umso größer, je näher die tatsächliche Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Sechs bei 10 % liegt.* | | 25 | 5 |
| d) | Otto hat bei seinem Versuch also zu wenig (weniger als 16) Sechsen erhalten. Bei diesem Ausgang lässt sich über die interessierende Wahrscheinlichkeit für das einzelne Auftreten einer Sechs gar keine begründete Aussage machen, insbesondere ist aus dem Testergebnis die Aussage jetzt nicht zu begründen, dass der Zufallszahlen-Generator in Bezug auf das Auftreten der Sechs die Anforderungen erfüllt *(und zwar hauptsächlich deshalb nicht, weil sich keine Aussage über die Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art machen lässt (vgl. c)).* | | 15 | |

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung, Bewertung I | II | III |
|---|---|---|---|---|
| e) | Otto sollte nun die Hypothese $H_0$: $p = 0{,}12$ gegen die Hypothese $H_1$: $p < 0{,}12$ linksseitig testen.<br>Die Anzahl $X$ der Sechsen ist unter der Annahme $H_0$ annähernd normalverteilt mit $\mu = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.<br>Mit $n = 5000$ und $p = 0{,}12$ erhält man: $\mu = 600$ und $\sigma = \sqrt{528}$.<br>Die Zufallsvariable $N = \dfrac{X - 600 + 0{,}5}{\sqrt{528}}$ ist also (annähernd) standard-normal-verteilt.<br>Wir lösen mit Hilfe der Tabelle der Normalverteilung die Gleichung $P(N < -x) = 0{,}01$ bzw. $P(N < x) = 0{,}99$ und erhalten: $x \approx 2{,}33$.<br>Um eine Grenze $m$ für den Ablehnungsbereich zu finden, lösen wir die Gleichung $\dfrac{m - 600 + 0{,}5}{\sqrt{528}} = -2{,}33$ Also $m \approx 545{,}96$.<br>Für $X \le 545$ gilt also mit absteigender Grenze zum ersten Mal:<br>$P(X \le 545) \le 0{,}01$.<br>Wenn weniger als 546 Sechsen vom Computer simuliert werden, sollte also die Hypothese $H_0$ verworfen werden.<br>Wenn jetzt keine Signifikanz vorliegt, wenn also mehr 545 Sechsen simuliert werden, könnte man das Ergebnis wieder unter der Perspektive von Aufgabenteil c) betrachten und fragen, ob denn jetzt die Hypothese $H_0$, dass der Zufallsgenerator exakt das tut, was versprochen wurde, verworfen werden kann.<br>Dies entspricht zwar nicht der „reinen Lehre“, aber gängiger Praxis.<br>Eigentlich sollte die Testplanung immer <u>vor</u> Durchführung der Stichprobenziehung erfolgen!<br>Die Anzahl $Y$ der Sechsen ist unter der Annahme $H_0$ (aus Teil c)) wieder annähernd normal-verteilt mit $\mu = 500$ und $\sigma = \sqrt{450}$.<br>Mit einem Ablehnungsbereich $Y > 545$ kann die zugehörige Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art durch $P(Y > 545 \mid H_0)$ berechnet werden:<br>$P(Y > 545 \mid H_0) = P\left(N > \dfrac{545 - 500 + 0{,}5}{\sqrt{450}}\right) \approx P(N > 2{,}14)$<br>$= 1 - P(N \le 2{,}14) \approx 1 - 0{,}9838 \approx 1{,}6\,\%$.<br>Dieser Wert ist so klein, dass auch im Fall von mehr als 545 simulierten Sechsen mit Signifikanz (zumindest auf dem 5%-Niveau) behauptet werden kann, dass der Zufallsgenerator mit mehr als 10 % Wahrscheinlichkeit im Einzelexperiment eine Sechs liefert und insofern für Otto unbrauchbar ist. | | 20 | 15 |
| | Insgesamt 100 BWE | 20 | 60 | 20 |

**Stochastik 2**

## III.2 Fehlersuche

In der Reparaturabteilung einer großen Firma muss recht oft ein bestimmter defekter Gerätetyp wieder Instand gesetzt werden. Aus längerer Erfahrung ist bekannt, dass es nur 3 verschiedene Ursachenfelder gibt und dass ein Fehler im Bereich A mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 %, ein Fehler im Bereich B mit einer Wahrscheinlichkeit von 15 % und ein Fehler im Bereich C mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % auftritt. Mehr als ein Fehler an ein- und demselben Gerät tritt (so gut wie) nie auf. Wenn man also einen Fehler gefunden und behoben hat, funktioniert das Gerät wieder.

Die Kosten der Instandsetzung (Fehlersuche und Reparatur) entstehen fast ausschließlich durch die Arbeitszeit, die für die Fehlersuche aufgebracht werden muss. Das Suchen nach der Fehlerquelle muss für die 3 möglichen Ursachenfelder nacheinander erfolgen, wobei die Reihenfolge frei wählbar ist. Die Kosten sind bei jedem Bereich unabhängig davon, ob der Fehler tatsächlich in diesem Bereich liegt oder nicht, und betragen 100 € für Bereich A, 10 € für Bereich B und 5 € für Bereich C. Die Fehlersuche ist bei jedem möglichen Ursachenfeld so gut, dass ein Übersehen des Fehlers nicht vorkommt; allerdings muss der Fehler im jeweiligen Bereich genau lokalisiert werden. Wenn also 2 Bereiche erfolglos durchsucht sind, muss der 3. Bereich auch durchsucht werden.

a) Es werde zuerst in der Reihenfolge A-B-C nach dem Fehler gesucht.

   Berechnen Sie für jeden der drei Fehlerursachen die Kosten, die bei der Suche entstehen.

   Berechnen Sie dann den Erwartungswert der Kosten, die bei dieser Fehlersuche entstehen. Bedenken Sie dabei, dass nicht weitergesucht werden muss, wenn man einen Fehler gefunden und behoben hat.

b) Bestimmen Sie nun für jede der weiteren fünf möglichen Suchreihenfolgen die zu erwartenden Suchkosten und geben Sie die kostengünstigste Suchreihenfolge und den zugehörigen Erwartungswert an.

c) Begründen Sie durch eine Plausibilitätsbetrachtung, warum man bei der Fehlersuche nicht mit A beginnen sollte, obwohl die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fehler im Bereich A auftritt, doch bei weitem am größten ist.

Ein Mitarbeiter schlägt in Ergänzung des Verfahrens als ersten Schritt ein verkürztes Suchverfahren für den Bereich A vor, das nur noch 20 € kostet. Es findet allerdings nur die Hälfte der Fehler im Bereich A.
Wenn der Fehler in diesem ersten Schritt nicht gefunden wurde, dann soll mit dem bisherigen Verfahren in der Reihenfolge B-C-A weitergesucht werden.

d) Bestimmen Sie unter der Bedingung, dass bei der verkürzten Suche in A der Fehler nicht gefunden wird, die drei bedingten Wahrscheinlichkeiten dafür, dass der Fehler bei A, B oder C liegt.

e) Begründen Sie, dass das neue Verfahren sinnvoll ist.

## Erwartungshorizont

| | Lösungsskizze | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| a) | Wenn der Fehler bei A liegt, wird nur der Bereich A durchsucht und es entstehen 100 € Kosten.<br>Wenn der Fehler bei B liegt, wird erst der Bereich A und dann nur noch der Bereich B durchsucht und es entstehen 110 € Kosten.<br>Wenn der Fehler bei C liegt, werden alle drei Bereiche durchsucht und es entstehen 115 € Kosten.<br>Da die Wahrscheinlichkeiten für diese drei Fälle bekannt sind, kann man den Erwartungswert $K$ der Durchsuchungskosten ausrechnen:<br>$E(K) = 0{,}8 \cdot 100 + 0{,}15 \cdot 110 + 0{,}05 \cdot 115 = 102{,}25$ .<br>Wenn man also in der Reihenfolge A-B-C durchsucht, betragen die erwarteten Kosten (Erwartungswert) 102,25 €.<br>*<u>Bemerkung:</u> Man kann auch die Kosten nach den Bereichen trennen und als einzelne Zufallsvariable auffassen, die dann addiert werden.*<br>*Dann erhält man das gleiche Ergebnis auf folgende Weise:*<br>$E(K) = 1 \cdot 100 + 0{,}2 \cdot 10 + 0{,}05 \cdot 5 = 102{,}25$ . | 20 | | |
| b) | Für die 5 weiteren Reihenfolgen, erhält man entsprechen der Rechnung aus a) folgende Kostenerwartungswerte (in Euro):<br>ACB $100 + 0{,}2 \cdot 5 + 0{,}15 \cdot 10 = 102{,}50$.<br>BAC $10 + 0{,}85 \cdot 100 + 0{,}05 \cdot 5 = 95{,}25$.<br>BCA $10 + 0{,}85 \cdot 5 + 0{,}8 \cdot 100 = 94{,}25$.<br>CAB $5 + 0{,}95 \cdot 100 + 0{,}15 \cdot 10 = 101{,}50$.<br>CBA $5 + 0{,}95 \cdot 10 + 0{,}8 \cdot 100 = 94{,}50$.<br>Die kostengünstigste Suchreihenfolge ist also BCA mit den erwarteten Kosten von 94,25 €. | 5 | 20 | |
| c) | Wenn man mit A beginnt, hat man zwar die größte Chance den Fehler im ersten Schritt zu finden, aber man hat auch mit Sicherheit die hohen Kosten von 100 €. Wenn man nicht mit A beginnt, kommt man in immerhin 20% der Fälle mit erheblich niedrigeren Kosten aus.<br>*<u>Bemerkung:</u> Hier sind sehr unterschiedliche Argumentationen denkbar, aber das obige Kernargument muss erkennbar sein.* | | 15 | |

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>
Es seien A, B und C die Ereignisse, dass der Fehler in dem entsprechenden Bereich liegt. N sei das Ereignis, in der Voruntersuchung den Fehler nicht zu finden.<br><br>
Gesucht sind: $P(A \mid N)$ , $P(B \mid N)$ , $P(C \mid N)$ .<br><br>
<u>Lösung mit dem Satz von Bayes:</u> $P(A \mid N) = \dfrac{P(A) \cdot P(N \mid A)}{P(N)} = \dfrac{0{,}8 \cdot 0{,}5}{0{,}6} = \dfrac{2}{3}$ .<br><br>
Wenn man den Wert von P(N) nicht sofort sieht, kann man den Nenner oben natürlich auch stur nach Bayes (bzw. dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit) wie folgt ausrechnen:<br><br>
$$P(N) = P(A) \cdot P(N \mid A) + P(B) \cdot P(N \mid B) + P(C) \cdot P(N \mid C)$$
$$= 0{,}8 \cdot 0{,}5 + 0{,}15 \cdot 1 + 0{,}05 \cdot 1 = 0{,}6$$<br>
Entsprechend erhält man:<br><br>
$$P(B \mid N) = \frac{P(B) \cdot P(N \mid B)}{P(N)} = \frac{0{,}15 \cdot 1}{0{,}6} = \frac{1}{4}$$
$$P(C \mid N) = \frac{P(C) \cdot P(N \mid C)}{P(N)} = \frac{0{,}05}{0{,}6} = \frac{1}{12}$$<br>
<u>Lösung mit idealisierter Simulation:</u><br><br>
Wir führen gedanklich das ganze Zufallsexperiment z. B. 100-mal durch und verteilen die relativen Häufigkeiten exakt wie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.<br><br>
Von den 100 Geräten wird bei 40 der Fehler bereits in der Voruntersuchung gefunden und 60 durchlaufen die bisherige Untersuchung: P(N) = 0,6.<br><br>
Da 80 der 100 Geräte den Fehler im Bereich A auf weisen, der bei 40 aber bereits in der Voruntersuchung entdeckt wurde, weisen noch 40 diese Fehlerart auf. Daher ist $P(A \mid N) = \dfrac{P(A \cap N)}{P(N)} = \dfrac{40}{60} = \dfrac{2}{3}$ .<br><br>
15 der Geräte weisen den Fehler im Bereich B und 5 im Bereich C auf, und somit gilt $P(B \mid N) = \dfrac{P(B)}{P(N)} = \dfrac{15}{60} = \dfrac{1}{4}$ und $P(C \mid N) = \dfrac{P(C)}{P(N)} = \dfrac{5}{60} = \dfrac{1}{12}$ , denn Fehler in den Bereichen B und C werden .von der Voruntersuchung nicht erfasst.
</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>

<u>1. Lösungsweg:</u>

Es entstehen mit Sicherheit die Kosten der Voruntersuchung von 20 €.

Zusätzlich entstehen mit 60% Wahrscheinlichkeit, die Kosten der Hauptuntersuchung, für die wir den bedingten Erwartungswert einsetzen, d.h. für die einzelnen Fälle verwenden wir die in d) berechneten bedingten Wahrscheinlichkeiten.

Da die Untersuchungsreihenfolge B-C-A ist, gilt für die erwarteten Zusatzkosten entsprechend der Rechnungen in b) (in Euro):

$$E(Z) = 10 + \frac{3}{4} \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot 100 \approx 80{,}42\ .$$

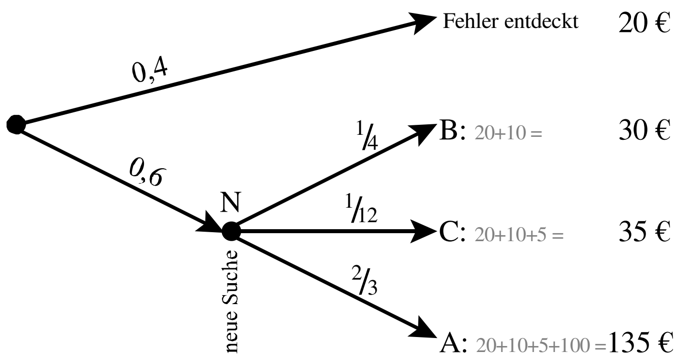
Insgesamt sind also Kosten von 68,25 € beim modifizierten Verfahren zu erwarten:

$$E(K) \approx 20 + 0{,}6 \cdot 80{,}42 \approx 68{,}25\ .$$

*Rechnet man hier mit dem exakten Wert von E(Z), so ergibt sich E(K) = 68,25.*

<u>2. Lösungsweg:</u>

Wir betrachten das folgende Baumdiagramm:




Dann gilt: $E(K) = 0{,}4 \cdot 20 + 0{,}15 \cdot 30 + 0{,}05 \cdot 35 + 0{,}4 \cdot 135 = 68{,}25$ .

Die erwarteten Kosten sind also noch deutlich geringer als das in b) bestimmte Minimum.

</td><td></td><td></td><td>20</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>55</td><td>20</td></tr>
</table>

Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Bildung und Sport

Schriftliche Abiturprüfung
Schuljahr 2005/2006

# Leistungskurs Mathematik

## Gesamtschulen und Gymnasien

### Aufgabensatz - ZWEITTERMIN

Unterlagen für die Lehrerinnen und Lehrer

Diese Unterlagen sind nicht für die Prüflinge bestimmt.

**Diese Unterlagen enthalten:**



# 1 Allgemeines

- Weisen Sie bitte die Schülerinnen und Schüler auf die allgemeinen Arbeitshinweise am Anfang der Schülermaterialien hin.
- Die Schülerinnen und Schüler kennzeichnen ihre Unterlagen nur mit der Kursnummer und ihrer Schülernummer, nicht mit ihrem Namen.
- Die Arbeitszeit beträgt **330 Minuten** einschließlich Lesezeit.
- Erlaubte Hilfsmittel: Nichtprogrammierbarer Taschenrechner, Formelsammlung „Das große Tafelwerk interaktiv“, Cornelsen-Verlag, Operatorenliste, Rechtschreiblexikon.

# 2 Rückmeldebogen für die Zweitkorrektur

*Bitte umgehend ausfüllen und an B 3-1 faxen!*

Behörde für Bildung und Sport
B 3-1

Schulchiffre:

Fax 42 79 67-006

Aufgabenstatistik und Information für die Zweitkorrektoren

**in Fächern mit zentraler Aufgabenstellung**

**Fach: Mathematik, Leistungskurs** **Kurs-Nummer: ________________**

Bearbeitet wurden die folgenden Aufgaben:

| Aufgabe Nr. | Anzahl | |
|---|---|---|
| I.1 | von | Prüflingen |
| I.2 | von | Prüflingen |
| I.3 | von | Prüflingen |
| II.1 | von | Prüflingen |
| II.2 | von | Prüflingen |
| III.1 | von | Prüflingen |
| III.2 | von | Prüflingen |

Datum: ________________

Unterschrift: ____________________________________

# 3 Aufgabenauswahl

- Sie erhalten **sieben** Aufgaben – **I.1, I.2, I.3** (Analysis) und **II.1, II.2** (Lineare Algebra / Analytische Geometrie) und **III.1, III.2** (Stochastik).
- Sie wählen **genau drei Aufgaben aus genau den zwei Sachgebieten I und II** oder **I und III** aus und reichen diese an die Schülerinnen und Schüler weiter.
- Sie überprüfen gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Vollständigkeit der Arbeitsunterlagen.
- Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten drei Aufgaben.
- Sie vermerken auf der Reinschrift, welche Aufgabe sie bearbeitet haben.

# 4 Korrekturverfahren

- Die Korrekturen werden gemäß der „Richtlinie für die Korrektur und Bewertung der Prüfungsleistungen im schriftlichen Teil der Abiturprüfung“ vorgenommen.
- Die Bewertung und Benotung der Arbeiten wird auf einem gesonderten Blatt vorgenommen, siehe Anlagen Bewertungsbögen für die Erst- und die Zweitkorrektur (s. Anlagen S. 4 und 5).
- Die Bewertungsbögen verbleiben in der Schule.
- Die Originale der Schülerarbeiten werden zusammen mit dem Bewertungsbogen für die Zweitkorrektur und einer Kursliste, die nur die Schülernummern enthalten darf, sowie einem Exemplar der Lehrermaterialien zu einem Päckchen gepackt.
- Zu den Zeitvorgaben, Warnmeldungen und dem weiteren Verlauf des Verfahrens siehe den „Ablaufplan für die Durchführung der schriftlichen Prüfungen“.

Bei der Korrektur der Schülerarbeiten kann es auf Grund von unterschiedlichen didaktischen Konzepten oder Verkürzungen auf Grund von Verabredungen zu unterschiedlichen Bewertungen von Schülerleistungen kommen, insbesondere im formalen Bereich. Bisher ließen sich solche unterschiedlichen Sichtweisen im Gespräch zwischen Referent und Korreferent klären.

Im Abitur mit zentralen Anteilen ist eine solche Klärung wegen des anonymisierten Korrekturverfahrens nicht möglich. Deshalb ist insbesondere auf Seiten des Korreferenten ein sensibles Vorgehen gefordert. Auch wenn der Korreferent eine andere Korrektheit von seinen Schülerinnen und Schülern fordern würde, sollte er darauf achten, ob der Referent bei seinen Korrekturen durchgängig anders verfahren ist. Es gilt der Grundsatz, dass die Schülerinnen und Schüler durch unterschiedliche Sichtweisen nicht benachteiligt werden dürfen.

Die Lösungsskizzen in den Erwartungshorizonten zu den einzelnen Aufgaben geben Hinweise auf die erwarteten Schülerleistungen. Oft sind aber verschiedene Lösungsvarianten möglich, die in der Skizze nur zum Teil beschrieben werden konnten. Grundsätzlich gilt deshalb, dass alle Varianten, die zu richtigen Lösungen führen, mit voller Punktzahl bewertet werden, unabhängig davon, ob die gewählte Variante in der Lösungsskizze aufgeführt ist oder nicht.

# 5 Aufgaben, Erwartungshorizonte und Bewertungen

**Erwartungshorizont:**

*Kursiv gedruckte Passagen* sind Hinweise an die korrigierenden Lehrkräfte. Sie sind nicht Bestandteile der erwarteten Schülerleistung.

**Bewertung:**

Jeder Aufgabe sind 100 Bewertungseinheiten (BWE) zugeordnet, insgesamt sind also 300 BWE erreichbar. Bei der Festlegung von Notenpunkten gilt die folgende Tabelle.

| Bewertungs-einheiten | Erbrachte Leistung | Notenpunkte |
|---|---|---|
| ≥ 285 | ≥ 95 % | 15 |
| ≥ 270 | ≥ 90 % | 14 |
| ≥ 255 | ≥ 85 % | 13 |
| ≥ 240 | ≥ 80 % | 12 |
| ≥ 225 | ≥ 75 % | 11 |
| ≥ 210 | ≥ 70 % | 10 |
| ≥ 195 | ≥ 65 % | 9 |
| ≥ 180 | ≥ 60 % | 8 |

| Bewertungs-einheiten | Erbrachte Leistung | Notenpunkte |
|---|---|---|
| ≥ 165 | ≥ 55 % | 7 |
| ≥ 150 | ≥ 50 % | 6 |
| ≥ 135 | ≥ 45 % | 5 |
| ≥ 120 | ≥ 40 % | 4 |
| ≥ 99 | ≥ 33 % | 3 |
| ≥ 78 | ≥ 26 % | 2 |
| ≥ 57 | ≥ 19 % | 1 |
| < 57 | < 19 % | 0 |

**Die Note „ausreichend" (5 Punkte) wird erteilt**, wenn annähernd die Hälfte (mindestens 45 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden ist. Dazu muss mindestens eine Teilaufgabe, die Anforderungen im Bereich II aufweist, vollständig und weitgehend richtig bearbeitet werden.

**Die Note „gut" (11 Punkte) wird erteilt**, wenn annähernd vier Fünftel (mindestens 75 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden sind. Dabei muss die Prüfungsleistung in ihrer Gliederung, in der Gedankenführung, in der Anwendung fachmethodischer Verfahren sowie in der fachsprachlichen Artikulation den Anforderungen voll entsprechen. Ein mit „gut" beurteiltes Prüfungsergebnis setzt voraus, dass neben Leistungen in den Anforderungsbereichen I und II auch Leistungen im Anforderungsbereich III erbracht werden.

Bei erheblichen Mängeln in der sprachlichen Richtigkeit sind bei der Bewertung der schriftlichen Prüfungsleistung je nach Schwere und Häufigkeit der Verstöße bis zu drei Notenpunkte abzuziehen. Dazu gehören auch Mängel in der Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen sowie falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text.

**Abiturprüfung 2006**

Bewertungsbogen Erstkorrektur

| | | | |
|---|---|---|---|
| Schulchiffre | | **BeBo EKo M** | |
| Fach | Mathematik | **Schüler-Nummer** | |
| Kurstyp | LK | | |
| Kurs-Nummer | | | |

| Aufgaben Nummer (z.B. I.3) ↓ | BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen) | | | | | | | BWE pro Aufgabe ↓ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a) | b) | c) | d) | e) | f) | g) | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | Summe der BWE → | |

**Bewertungstext**

**Notenpunkte →**

Dieser Bogen kann auch aus dem Internet unter **www.hera.bbs.hamburg.de** mit dem Anmeldenamen **abschluss** und dem Passwort **pruefung** zum rechnergestützten Ausfüllen heruntergeladen werden.

**Abiturprüfung 2006**

Bewertungsbogen Zweitkorrektur

| | | | |
|---|---|---|---|
| Schulchiffre | | | **BeBo ZKo M** |
| Fach | Mathematik | **Schüler-Nummer** | |
| Kurstyp | LK | | |
| Kurs-Nummer | | | |

| Aufgaben Nummer (z.B. I.3) ↓ | BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen) | | | | | | | BWE pro Aufgabe ↓ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a) | b) | c) | d) | e) | f) | g) | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | Summe der BWE → | |

**Bewertungstext**

**Notenpunkte →**

Dieser Bogen kann auch aus dem Internet unter **www.hera.bbs.hamburg.de** mit dem Anmeldenamen **abschluss** und dem Passwort **pruefung** zum rechnergestützten Ausfüllen heruntergeladen werden.

**ANALYSIS 1**

## I.1 Bakterien

Ein Forschungslabor untersucht die antibiotische Wirkung einer Substanz auf Bakterien.

Dabei wird zunächst das Wachstum einer Bakterienkultur beobachtet, die zu Beginn der Beobachtung 1000 Bakterien hat. Jede Stunde nimmt die Anzahl der Bakterien um 25 % zu.

Dieser Wachstumsprozess soll durch eine Funktion $N_1$ mit der Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^+$ beschrieben werden. Der (gerundete) Funktionswert $N_1(t)$ sei die Anzahl der Bakterien zum Zeitpunkt $t$, und $t$ sei die Zeit in Stunden.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Wachstumsfunktion $N_1$ in Abhängigkeit von der Zeit $t$.

b) Berechnen Sie die Anzahl der Bakterien, die nach 8 Stunden in der Kultur vorhanden sind.

8 Stunden nach Beginn der Beobachtung wird eine Substanz zu den Bakterien hinzu gegeben.
Ab diesem Zeitpunkt lässt sich die Anzahl der Bakterien durch folgende Funktionsgleichung beschreiben:

$$N_2(t) = 1000 \cdot e^{0,343 \cdot t - 0,015 \cdot t^2} \quad , t \geq 8.$$

*Hinweis: Es ist* $N_1(8) \approx N_2(8)$.

c) Untersuchen Sie die Funktion $N_2$ für $t \geq 8$ hinsichtlich Extrem- und Wendepunkten.
*Hinweis: Sie können ohne Rechnung verwenden:*
$$N_2'''(t) = (-0,03087 + 0,0027 \cdot t + (0,343 - 0,03 \cdot t)^3) \cdot 1000 \cdot e^{0,343\,t - 0,015\,t^2}$$

d) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem unter den veränderten Bedingungen 1000 Bakterien in der Kultur vorhanden sind.

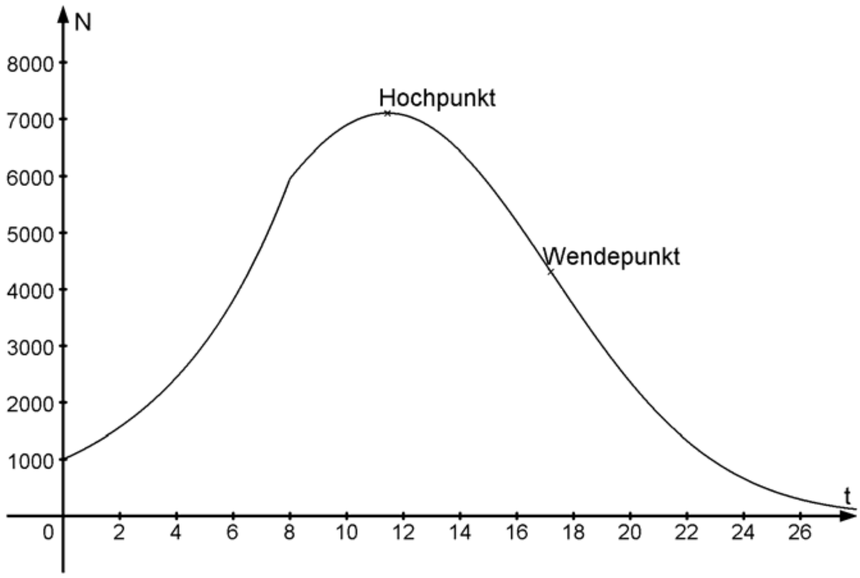
e) Skizzieren Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen von $N(t) = \begin{cases} N_1(t)\,\textit{für} \;\; t < 8 \\ N_2(t)\,\textit{für} \;\; t \geq 8 \end{cases}$.
Untersuchen Sie die Funktion $N$ an der Stelle $t = 8$.

f) Beurteilen Sie abschließend, ob die Güte der Substanz den Anforderungen eines Antibiotikums gerecht wird.
Ein Antibiotikum ist ein Medikament, das im Falle einer Erkrankung eine <u>schnelle</u> Reduzierung der Bakterienanzahl bewirken soll.

## Erwartungshorizont

| | Lösungsskizze | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| a) | Neben der Lösung $N_1(t)=1000\cdot 1{,}25^t$ ist auch folgender Ansatz möglich:<br>$N_1(t)=a\cdot e^{k\cdot t}$.<br>Wegen $N_1(0)=1000$ gilt $a=1000$. Aus $e^k=1{,}25$ folgt $k=ln\ 1{,}25\approx 0{,}223$.<br>Insgesamt ergibt sich: $N_1(t)\approx 1000\cdot e^{0{,}223\cdot t}$. | | 10 | |
| b) | Das Einsetzen für $t=8$ ergibt<br>$N_1(8)=1000\cdot 1{,}25^8\approx 5960$ oder $N_1(8)\approx 1000\cdot e^{0{,}223\cdot 8}\approx 5954$.<br>*Der Funktionswert kann auch rekursiv mit Hilfe einer Wertetabelle berechnet werden* | 5 | | |
| c) | $N_2(t)=1000\cdot e^{0{,}343\cdot t-0{,}015\cdot t^2}$.<br>Unter Anwendung der Kettenregel gilt:<br>$N_2'(t)=(0{,}343-0{,}03\cdot t)\cdot 1000\cdot e^{0{,}343\cdot t-0{,}015\cdot t^2}$.<br>Weitere Anwendung der Produkt- und Kettenregel erbringt:<br>$N_2''(t)=-0{,}03\cdot 1000\cdot e^{0{,}343\cdot t-0{,}015\cdot t^2}+(0{,}343-0{,}03\cdot t)^2\cdot 1000\cdot e^{0{,}343\cdot t-0{,}015\cdot t^2}$<br>$N_2''(t)=\left(-0{,}03+(0{,}343-0{,}03\cdot t)^2\right)\cdot 1000\cdot e^{0{,}343\cdot t-0{,}015\cdot t^2}$<br><u>Extremstelle</u>: Gesucht ist ein $t$ mit $N_2'(t)=0$.<br>$N_2'(t)=(0{,}343-0{,}03\cdot t)\cdot 1000\cdot e^{0{,}343\cdot t-0{,}015\cdot t^2}=0$.<br>Da $1000\cdot e^{0{,}343\cdot t-0{,}015\cdot t^2}>0$ für alle $t$, folgt $0{,}343-0{,}03\cdot t$ muss 0 sein und somit<br>$t=\frac{0{,}343}{0{,}03}=11{,}4\overline{3}$.<br>Für die hinreichende Bedingung muss $t$ in die zweite Ableitung eingesetzt werden: Auch hier ist der zweite Teil des Produkts größer als Null, so dass der Faktor $\left(-0{,}03+(0{,}343-0{,}03\cdot t)^2\right)$ den Ausschlag für das Vorzeichen gibt.<br>Durch Einsetzen von $t=11{,}4\overline{3}$ folgt $-0{,}03+(0{,}343-0{,}03\cdot t)^2=-0{,}03$; denn $t$ ist Nullstelle der inneren Klammer. Also liegt bei $t=11{,}4\overline{3}$ ein lokales Maximum. Mit $N_2(11{,}4\overline{3})\approx 7105$ ergibt sich der Hochpunkt (gerundet) $H(11{,}4\vert 7105)$. | | | |

| | Lösungsskizze | Zuordnung, Bewertung I | II | III |
|---|---|---|---|---|
| | Wendestelle: Gesucht ist ein t mit $N_2''(t)=0$.<br>Analog zur Berechnung der Extremstelle ist nur zu berücksichtigen, dass<br>$-0,03+(0,343-0,03\cdot t)^2=0$ ist.<br>Die Gleichung $(0,343-0,03\cdot t)^2=0,03$ hat die beiden Lösungen<br>$t_1=\frac{343}{30}+\frac{10\sqrt{3}}{3}$ und $t_2=\frac{343}{30}-\frac{10\sqrt{3}}{3}$.<br>Die Lösung $t_1 \approx 17{,}207$ liegt im Definitionsbereich von $N_2$, die Lösung $t_2 \approx 5{,}660$ jedoch nicht.<br>Mit der vorgegebenen dritten Ableitung lässt sich die hinreichende Bedingung prüfen: $N_2'''(17,207)\approx 44,8\neq 0$.<br>*Neben der konkreten Berechnung von $N_2'''$ (17,207) gibt es selbstverständlich auch andere Möglichkeiten zu argumentieren, z.B. mit der zweiten Ableitung.*<br>Mit $N_2(17{,}207) \approx 4309$ ergibt sich der Wendepunkt (gerundet) $W(17{,}207 \mid 4309)$.<br>*Möglich ist z.B. auch W(17,2 \| 4315).* | | 25 | |
| d) | Gesucht ist $t$ mit $1000=1000\cdot e^{0,343\cdot t-0,015\cdot t^2}$, somit $1=e^{0,343\cdot t-0,015\cdot t^2}$.<br>$\ln 1=0,343\cdot t-0,015\cdot t^2$. Da $\ln 1=0$, folgt:<br>$0=0,343\cdot t-0,015\cdot t^2$<br>$=0,015\cdot t\cdot\left(\frac{0,343}{0,015}-t\right)$<br>Die Lösung $t = 0$ liegt außerhalb des Definitionsbereiches von $N_2$, so dass<br>$t=\frac{0,343}{0,015} = 22,8\overline{6}$<br>der gesuchte Zeitpunkt ist.<br>Knapp 23 Stunden nach Beginn der Beobachtung (und 15 Stunden nach Zugabe der Substanz) entspricht die Anzahl der Bakterien wieder der Startpopulation. | | 15 | |
| e) | Zur Skizze:<br>Zu berücksichtigen sind $N_1(0) = 1000$,<br>der exponentielle Anstieg bis $N_1(8) \approx 5954 \approx N_2(8)$ *(siehe dazu auch die unten stehenden Hinweise zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit)*,<br>der Hochpunkt (11,4 \| 7105), der Wendepunkt (17,2 \| 4309) und<br>der Zeitpunkt t ≈ 23 aus Teil d).<br>*Dabei muss erkannt werden, dass im Bereich des Hochpunktes nur eine Rechtskrümmung vorliegen kann.* | | | |

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung, Bewertung I | II | III |
|---|---|---|---|---|
| | *Die Genauigkeit in der Hochachse ist nur bedingt möglich (Skizze!).*<br>Die <u>Untersuchung der Funktion an der Stelle $t = 8$</u> bezieht sich auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit und sollte im Graphen durch einen Knick angezeigt werden.<br><u>Stetigkeit</u>: Wegen $N_1(8) \approx N_2(8)$ ist die Funktion praktisch stetig.<br>*Sollte der Prüfling die Funktionsgleichung $N_1(t) = 1000 \cdot 1{,}25^t$ verwenden, so könnte er zu dem Schluss kommen, dass N an der Stelle t = 8 nicht stetig ist. Hier muss dann entsprechend bepunktet werden!*<br><u>Differenzierbarkeit</u>: Es ist $N_1'(t) = 1000 \cdot \ln 1{,}25 \cdot 1{,}25^t$ bzw. $223 \cdot e^{0.223 \cdot t}$.<br>Wegen $\lim\limits_{t \to 8} N_1'(t) \neq N_2'(8)$ ist die Funktion an der Stelle $t = 8$ nicht differenzierbar (daher im Graph der Knick), denn<br>$N_1'(t) = 1000 \cdot \ln 1{,}25 \cdot 1{,}25^t$ und $N_1'(8) \approx 1330$ oder<br>$N_1'(t) = 223 \cdot e^{-0{,}223 \cdot t}$ und $N_1'(8) \approx 1328$ aber $N_2'(8) \approx 613$<br><br> | 15 | 10 | |
| f) | Teilaufgabe d) zeigt, dass es mehr als vierzehn Stunden dauert, bis die Anzahl der Bakterien wieder auf 1000 (wie zu Beginn der Beobachtung) zurückgegangen ist.<br>Grundsätzlich lässt sich schließen:<br>1. Die Substanz erfüllt nicht die Anforderungen zu einer schnellen Reduzierung der Bakterienanzahl, da die Zahl der Bakterien gut drei Stunden weiter ansteigt und dann erst verhältnismäßig langsam abnimmt.<br>2. Die Substanz erfüllt die Anforderungen zur Reduzierung der Bakterienanzahl, da innerhalb von knapp 15 Stunden die Anzahl der Bakterien auf etwa ein Sechstel (1000) reduziert wird und innerhalb eines Tages sogar weiter sehr stark reduziert wird: $N_2(8+24) = N_2(32) \approx 12$. | | | |

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| | *Jede dieser Positionen ist als richtig zu bewerten, wenn sie vom Prüfling mit den erzielten Ergebnissen stichhaltig begründet wird.* | | | 20 |
| | Insgesamt 100 BWE | 20 | 60 | 20 |

**ANALYSIS 2**

## I.2 Heißluftballon

Die Flughöhe eines Heißluftballons wird über die Temperatur der Luftfüllung des Ballons gesteuert, die horizontale Bewegung wird allein durch den Wind beeinflusst. Die Temperatur der Luft im Ballon lässt sich mit einem fest eingebauten Gasbrenner einstellen, der in regelmäßigen Abständen angestellt wird.
Ein Ausschnitt des zeitlichen Verlaufs der Flughöhe (Vertikalbewegung) des Heißluftballons ist im anliegenden Diagrammblatt grob skizziert.

Der zeitliche Verlauf der Flughöhe wird mithilfe der Funktion *f* mit $f(x) = 4 - \frac{3}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right)$ modelliert, wobei $x$ die Zeit in Minuten und $f(x)$ die Flughöhe in 100 Metern angibt.

a) Berechnen Sie die Flughöhe des Ballons zum Zeitpunkt $x = 3$ min.

b) Ermitteln Sie möglichst ohne Differenzialrechnung sowohl die maximale als auch die minimale Flughöhe mit ihren zugehörigen Zeitpunkten.

c) Bestimmen Sie die Funktion, die den zeitlichen Verlauf der Vertikalgeschwindigkeit (momentane Änderung der Flughöhe pro Minute) darstellt und skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion im vorgegebenen Koordinatensystem im anliegenden Diagrammblatt, <u>ohne</u> eine ausführliche Kurvendiskussion vorzunehmen.

d) Ermitteln Sie die Zeitpunkte, zu denen der Ballon am schnellsten steigt bzw. fällt und den Betrag der maximalen Vertikalgeschwindigkeit, d.h. der momentanen zeitlichen Änderungsrate der Flughöhe.

e) Bestimmen Sie die mittlere Flughöhe in den ersten 6 Minuten.

f) Bei der Landung eines Heißluftballons soll Folgendes berücksichtigt werden:

Die Landephase wird zu einem Zeitpunkt eingeleitet, an dem sich der Ballon mit maximaler momentaner zeitlicher Vertikalgeschwindigkeit nach unten bewegt. Die Vertikalgeschwindigkeit soll in der Landephase kontinuierlich bis auf Null zum Zeitpunkt des Bodenkontaktes abnehmen.

In einem Lehrbuch für Heißluftballonführer soll ein so beschriebener Landevorgang in Form eines Funktionsgraphen in Fortsetzung der Flugfunktion *f* dargestellt werden.

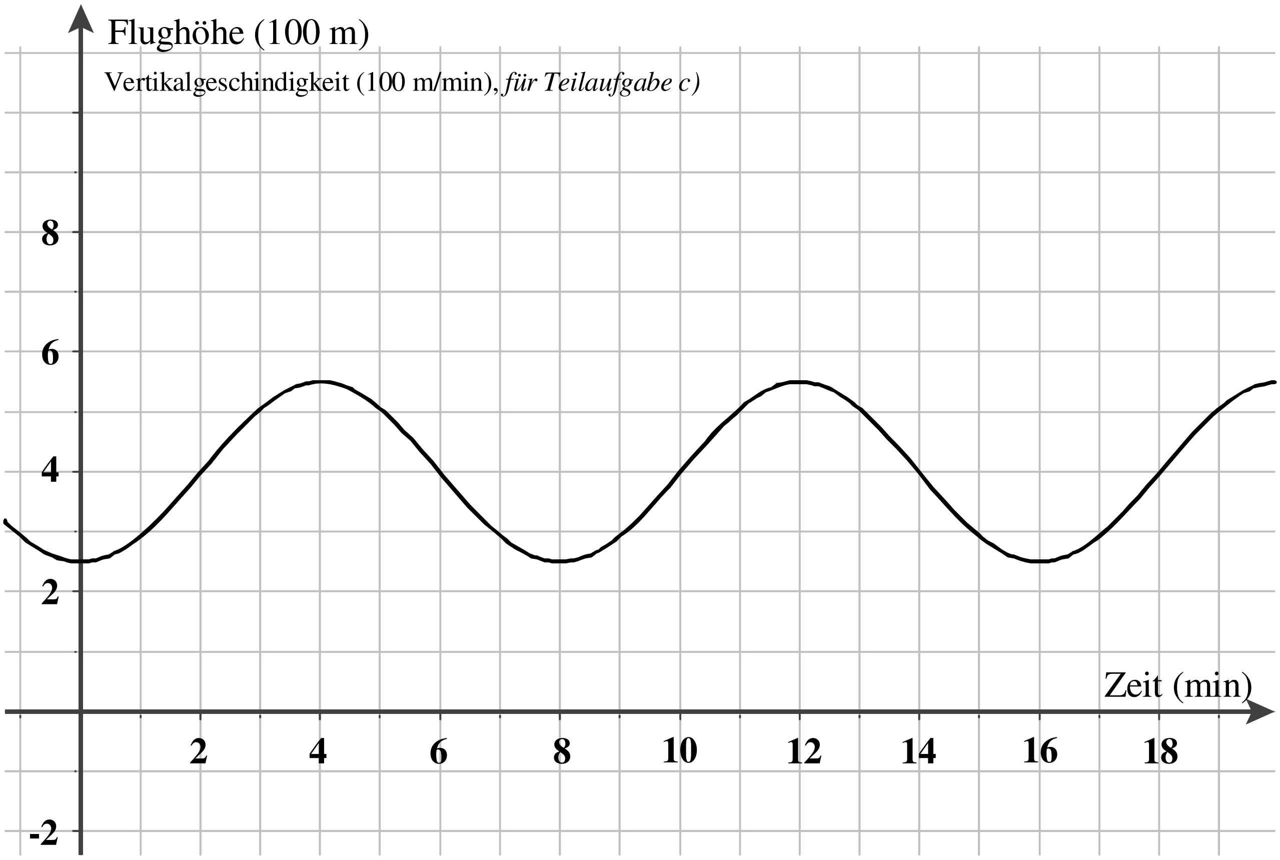
Ermitteln Sie Eigenschaften einer solchen Landefunktion.

Bestimmen Sie eine mögliche quadratische Funktion als Landefunktion mit dem zugehörigen Zeitpunkt der Landung.

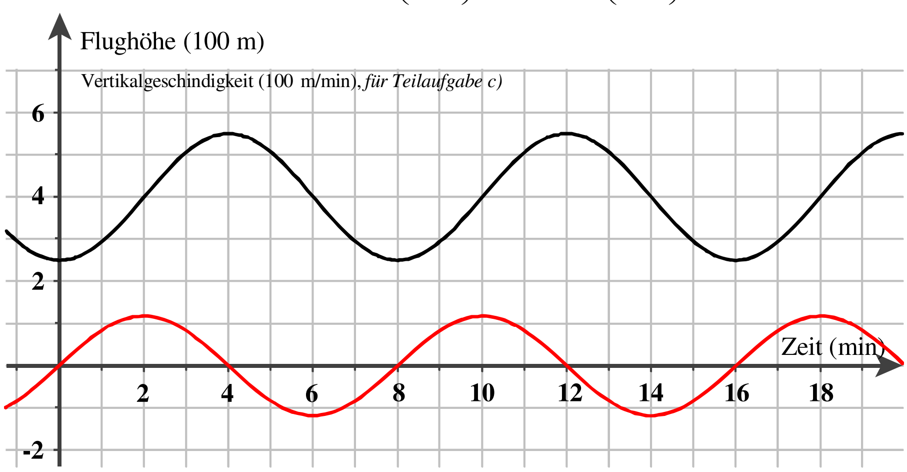
Skizzieren Sie den Graphen der Fluglandefunktion zusätzlich in das Diagrammblatt.

g) Ein anderer Ballon variiert seine Flughöhe periodisch zwischen 200 und 400 Metern. Für einen Anstieg benötigt er ebenso wie für die Sinkphase jeweils 3 Minuten.
Bestimmen Sie eine ebenfalls sinusförmige Funktionsgleichung der Funktion, die den zeitlichen Verlauf der Flughöhe anzeigt.

## Diagrammblatt zur Aufgabe „Heißluftballon“



## Erwartungshorizont

| | Lösungsskizze | Zuordnung, Bewertung I | II | III |
|---|---|---|---|---|
| a) | Gesucht ist der Funktionswert *f*(3). Es ergibt sich<br>$f(3) = 4 - \frac{3}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 3\right) = 4 - \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\right) = 4 + \frac{3}{4}\sqrt{2}$, also<br>$f(3) \approx 5{,}06$.<br>Der Ballon hat zum Zeitpunkt 3 min eine Höhe von etwa 506 m. | 5 | | |
| b) | Die einfachere Funktion $g$ mit $g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right)$ hat an den gleichen Stellen Extremwerte wie die gegebene Flughöhenfunktion *f*. Allerdings sind wegen des Vorzeichenwechsels Minima und Maxima vertauscht.<br>Die reine Cosinusfunktion hat Maxima an den Stellen $k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, und hat Minima an den Stellen $\pi + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.<br>Also hat die Funktion $g$ Maxima an den Stellen $x = 8k$, $k \in \mathbb{Z}$, und Minima an den Stellen $x = 8k + 4$, $k \in \mathbb{Z}$.<br>Und damit hat die Funktion *f* Minima an den Stellen $x = 8k$, $k \in \mathbb{Z}$, und Maxima an den Stellen $x = 8k + 4$, $k \in \mathbb{Z}$.<br>Die Maximal- bzw. Minimalwerte sind jeweils gleich und können z.B. an den Stellen $x = 4$ und $x = 0$ berechnet werden:<br>$f(0) = 4 - \frac{3}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 0\right) = 2{,}5$ bzw. $f(4) = 4 - \frac{3}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 4\right) = 5{,}5$.<br>Damit beträgt die minimale Flughöhe 250 m und die maximale 550 m. | | 10 | |
| c) | Der zeitliche Verlauf der Vertikalgeschwindigkeit des Ballons wird durch die Ableitung $f'$ der Funktion *f* des zeitlichen Verlaufs der Flughöhe dargestellt:<br>$f'(x) = \frac{3}{8}\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right) \approx 1{,}18 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right)$<br> | | | |

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Eine Skizze der Ableitungsfunktion wird auf dem Diagrammblatt ohne explizite Kurvendiskussion erwartet.</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Der Ballon steigt bzw. fällt dort am schnellsten, wo die Vertikalgeschwindigkeit – also die erste Ableitung von f – ihre Extrema hat bzw. wo f selbst Wendepunkte hat.<br>Mit den gleichen Argumenten wie in b) begründet man, dass diese Stellen bei $x = 2 + 4k$ liegen.<br>Die Minimalwerte sind negativ und vom Betrag auch Maximalwerte. Alle diese Betragswerte sind gleich und zwar<br>$$f'(2) = \frac{3}{8}\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 2\right)$$<br>$$f'(2) = \frac{3}{8}\pi \approx 1{,}18.$$<br>Also beträgt die maximale Vertikalgeschwindigkeit immer wieder mit wechselndem Vorzeichen etwa 118 m/min.</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Die mittlere Flughöhe m über dem Zeitintervall [0;6] wird über das Integral der Flughöhenfunktion f bestimmt:<br>$$m = \frac{1}{6} \cdot \int_0^6 \left(4 - \frac{3}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right)\right) dx = \frac{1}{6} \cdot \left[4x - \frac{6}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right)\right]_0^6$$<br>$$m = \frac{1}{6} \cdot \left(24 + \frac{6}{\pi}\right) \approx 4{,}32.$$<br>Die durchschnittliche Flughöhe des Ballons im Zeitintervall $[0;6]$ beträgt etwa 432 m.</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>f)</td><td><u>Eigenschaften</u> einer Funktion q, die die Landephase darstellen kann:<br>Der gewählte Zeitpunkt $x_w$, in dem die Landephase eingeleitet wird, muss eine der Stellen 2 + 4k sein (maximale Vertikalgeschwindigkeit nach unten).<br>An einer solchen Stelle $x_w$ muss der Funktionswert und der Wert der 1. Ableitung der Funktion f und der Landefunktion q gleich sein:<br>I. $q(x_w) = f(x_w) = 4$ (Sprungstelle im Sachkontext nicht möglich)<br>II. $q'(x_w) = f'(x_w) = -\frac{3}{8}\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 2\right)$ (vgl. d) ) (ruckfrei)<br>Zum Zeitpunkt $x_n$ der Landung muss eine weitere Bedingung gelten:<br>III. $q(x_n) = q'(x_n) = 0$ (sanfte Landung).<br>Aus I und III folgt, dass die Nullstelle der quadratischen Funktion q mit ihrem Scheitelpunkt zusammenfallen muss, da hier die einzige Stelle vorliegt, die die Bedingung III erfüllt.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |

Deshalb ist folgender <u>Ansatz für eine quadratische Funktion</u> notwendig:

$q(x) = a \cdot (x-b)^2$ und damit $q'(x) = 2a \cdot (x-b) = 2a \cdot x - 2a \cdot b$ .

Für $x_W$ wählen wir z.B. $x_W = 6$. Dann erhalten wir folgende zwei Gleichungen:

$$\begin{array}{llcll} (1) & a \cdot (6-b)^2 = f(6) = 4 & & (1') & a \cdot (6-b)^2 = 4 \\ (2) & 2a \cdot (6-b) = f'(6) = -\frac{3}{8}\pi & \xrightarrow[(2):2]{} & (2') & a \cdot (6-b) = -\frac{3}{16}\pi \end{array}$$

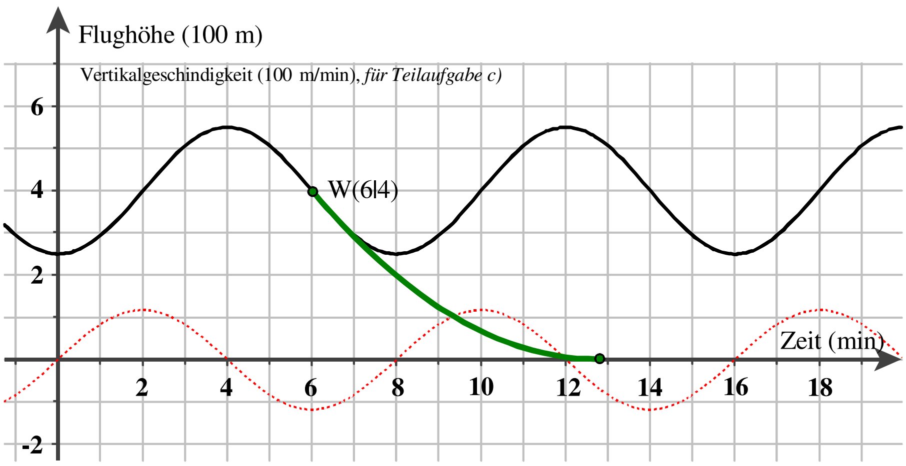
Da $a = 0$ und $b = 6$ keine Lösungen sein können, liefert die Division (1) : (2):

$$6 - b = -\frac{4 \cdot 16}{3\pi} \quad \Rightarrow \quad b = 6 + \frac{64}{3\pi} \approx 12{,}79 .$$

$b$ eingesetzt in (2) ergibt:

$$a \cdot \left(-\frac{64}{3\pi}\right) = -\frac{3}{16}\pi \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3\pi \cdot 3\pi}{16 \cdot 64} = \frac{9\pi^2}{1024} \approx 0{,}087 .$$

<u>Der Landezeitpunkt</u> liegt also bei ca. 13 Minuten, da $b$ die $x$-Koordinate des Scheitelpunktes von $q$ ist.
$q$ hat die Gleichung $q(x) = 0{,}087 \cdot (x - 12{,}79)^2$ .




| I | II | III |
|---|---|---|
| 5 | 10 | 15 |

g) Die Modellierungsfunktion für den Flughöhenverlauf lautet im Ansatz z.B.

$f_{neu}(x) = c - a \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{b} \cdot x\right)$, wobei $a$ die Amplitude, also den halben Unterschied zwischen Maximal- und Minimalhöhe darstellt, $b$ die Periodendauer und $c$ die mittlere Höhe.

Die Periodendauer des Flughöhenverlaufs (Diagramm) beträgt 6 Minuten, also ist $b = 6$. Die Amplitude ist $a = 1$, die Verschiebung $c = 3$. Es ergibt sich die Funktion mit der Gleichung $f_{neu}(x) = 3 - \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right)$.

| I | II | III |
|---|---|---|
| | 10 | 5 |

| | | I | II | III |
|---|---|---|---|---|
| | Insgesamt 100 BWE | 20 | 60 | 20 |

**ANALYSIS 3**

## I.3 Logarithmus-Funktion

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a$ mit der Gleichung $f_a(x) = x \cdot (\ln x - a)^2$, $a \in \mathbb{R}$ .

a) Bestimmen Sie den Definitions- und Wertebereich.

Berechnen Sie die Nullstellen und beschreiben Sie die Lage der Nullstellen in Abhängigkeit vom Parameter *a.*

b) Weisen Sie nach, dass für jedes *a* die Graphen von $f_a$ und $f_{-a}$ genau einen gemeinsamen Punkt $S_a$ haben.

Beschreiben Sie die Lage aller Schnittpunkte $S_a$ im Koordinatensystem in Abhängigkeit von *a*.

c) Bestimmen Sie die Extrempunkte von $f_a$ .

Begründen Sie, warum jeder Graph der Funktionenschar einen Wendepunkt haben muss und bestimmen Sie diesen.

Bestimmen Sie sowohl den Funktionsterm des Graphen aller Hochpunkte als auch den aller Wendepunkte (Ortskurven).

(*Zur Kontrolle*: $f_a'(x) = (\ln x - a)^2 + 2(\ln x - a)$ .)

d) In der Anlage ist ein Graph der Schar dargestellt. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert für *a*.

Zeichnen Sie in das gegebene Koordinatensystem den Graphen für *a* = 1 und die beiden zugehörigen Ortskurven aus Aufgabenteil c).

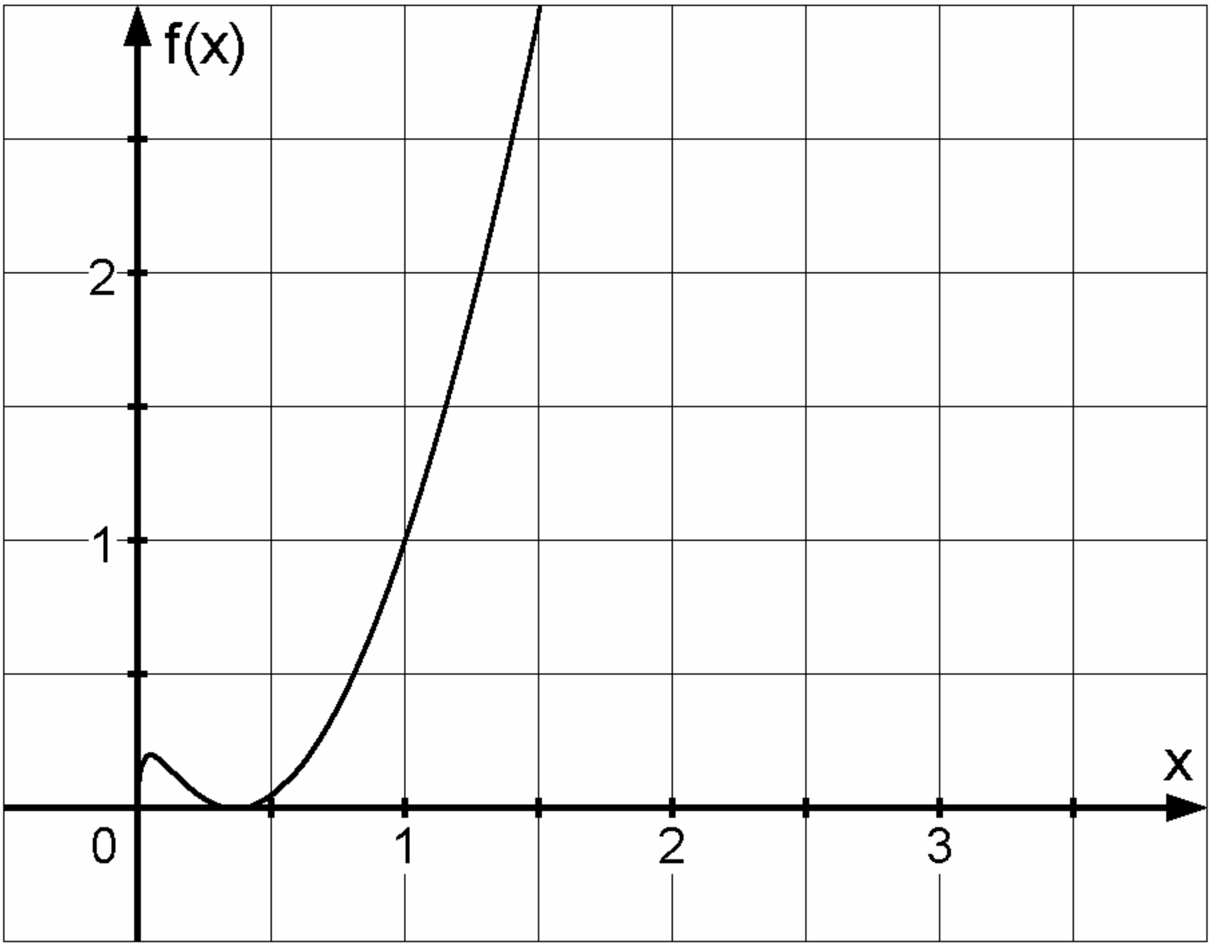
e) Es geht um das Integral $I_2 = \lim\limits_{k \to 0} \int\limits_k^{e^a} x \cdot (\ln x - a)^2 \, dx \quad (a \in \mathbb{R})$ und seine geometrische Bedeutung.

Sie dürfen für diese Teilaufgabe voraussetzen: $\lim\limits_{k \to 0} \left(k^2 \cdot (\ln k - a)^n\right) = 0$ für $n \in \{1,2\}$ .

Zeigen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt: $I_1 = \lim\limits_{k \to 0} \int\limits_k^{e^a} x \cdot (\ln x - a)^1 \, dx = -\dfrac{e^{2a}}{4}$ .

Bestimmen Sie mit Hilfe von $I_1$ das Integral $I_2$ und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

## Anlage zu Aufgabe „Logarithmus-Funktion“



## Erwartungshorizont

| | Lösungsskizze | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| a) | Definitions- und Wertebereich:<br>$D=\mathbb{R}^+$, da der Logarithmus nur für positive Zahlen definiert ist.<br>$W=\mathbb{R}_0^{\ +}$, da der erste Faktor des Funktionsterms wegen der Definitionsmenge nur positive Werte annehmen kann und der zweite Faktor wegen des Quadrates stets größer oder gleich Null ist.<br>Nullstellen:<br>Der Funktionsterm hat die Form eines Produktes. Dieses wird Null, wenn mindestens einer der Faktoren 0 ist. Der 1. Faktor wird (wegen Definitionsbereich) nicht Null. Der 2. Faktor wird 0, wenn $a = \ln x$ ist, wenn also $x = e^a$. Somit haben alle Graphen der Schar eine Nullstelle $N_a\left(e^a \,\middle|\, 0\right)$. Und zwar gilt:<br>1.) Für $a < 0$ liegt die Nullstelle im Intervall $]0;1[$.<br>2.) Für $a = 0$ liegt die Nullstelle bei $x = 1$.<br>3.) Für $a > 0$ wandert die Nullstelle mit wachsendem $a$ nach rechts (im Intervall $]1\,;\infty[$). | 10 | 5 | |
| b) | Wenn die Graphen von $f_a$ und $f_{-a}$ gemeinsame Punkte haben, dann muss die Gleichung<br>$x\cdot\left(\ln x-a\right)^2 = x\cdot\left(\ln x+a\right)^2$<br>nicht nur trivial erfüllbar sein.<br>Elementare Umformungen liefern zwei Gleichungen<br>$\ln x-a=\ln x+a$ und $\ln x-a=-\left(\ln x+a\right)=-\ln x-a$ .<br>Vereinfacht man beide Gleichungen, so folgt für die erste, dass diese nur für $a = 0$ erfüllt ist (triviale Lösung).<br>Die 2. Gleichung ist erfüllt, wenn $x = 1$ ist. Der Funktionswert an dieser Stelle ist $a^2$. D. h. alle Schnittpunkte haben als 1. Koordinate den Wert 1, liegen also im Koordinatensystem auf einer Parallelen zur $y$-Achse durch die Stelle $x = 1$.<br>Es gilt $S_a\left(1 \,\middle|\, a^2\right)$.<br>Mit wachsendem Betrag von $a$ wachsen auch die Funktionswerte. | | 10 | |
| c) | Bestimmen der Extrempunkte:<br>Um die Extrempunkte zu bestimmen, bildet man zunächst mit Hilfe der Produkt- und Kettenregel die 1. und 2. Ableitung:<br>$f_a{}'(x)=(\ln x-a)^2+2(\ln x-a)$ und<br>$f_a{}''(x)=\frac{2}{x}\cdot(\ln x-a+1)$ . | | | |

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |

Man setzt die 1. Ableitung gleich 0 und klammert $(\ln x - a)$ aus:

$$(\ln x - a)^2 + 2(\ln x - a) = (\ln x - a)\cdot(\ln x - a + 2) = 0\,.$$

Der Term $(\ln x - a)$ wird 0, wenn $x = e^a$. Die Nullstelle ist also gleichzeitig auch Extremstelle. Aus den Überlegungen bzgl. des Wertebereichs folgt, dass hier ein Minimum vorliegt. Es gilt $T_a\left(e^a \,\middle|\, 0\right)$.

Der Term $(\ln x - a + 2)$ wird 0, wenn $x = e^{a-2}$ ist. Um zu überprüfen, ob an dieser Stelle tatsächlich eine Extremstelle liegt, setzt man diesen Wert in die 2. Ableitung ein.

$$f_a''(e^{a-2}) = \frac{2}{e^{a-2}}\cdot\left(\ln\left(e^{a-2}\right) - a + 1\right) = \frac{2}{e^{a-2}}\cdot(a - 2 - a + 1) = -\frac{2}{e^{a-2}}\,.$$

Da sowohl der Zähler als auch der Nenner für alle $a \in \mathbb{R}$ positiv ist, ist der Wert des Terms negativ, also liegt dort für alle $a \in \mathbb{R}$ ein Maximum vor.

$$f_a(e^{a-2}) = e^{a-2}\cdot\left(\ln\left(e^{a-2}\right) - a\right)^2 = e^{a-2}\cdot 4\,.$$

Es gilt $H_a\left(e^{a-2} \,\middle|\, 4\cdot e^{a-2}\right)$.

<u>Bestimmen der Wendepunkte:</u>

Um die möglichen Wendestellen zu berechnen, setzt man die 2. Ableitung gleich 0.

$$f_a''(x) = \frac{2}{x}\cdot(\ln x - a + 1) = 0\,.$$

Der 1. Faktor kann nicht den Wert 0 annehmen.

Der 2. Faktor wird 0, wenn $x = e^{a-1}$ ist. An dieser Stelle müssen alle Graphen der Schar eine Wendestelle haben, da bei einer stetigen Funktion zwischen Minimum- und Maximumstelle (ohne Pol) eine Wendestelle existieren muss.

Der Funktionswert der Wendestelle ist

$$f_a(e^{a-1}) = e^{a-1}\cdot\left(\ln\left(e^{a-1}\right) - a\right)^2 = e^{a-1}\cdot 1 = e^{a-1}\,.$$

Es gilt $W_a\left(e^{a-1} \,\middle|\, e^{a-1}\right)$.

<u>Gleichungen der Ortskurven:</u>

Die Ortskurve aller Hochpunkte $H_a\left(e^{a-2} \,\middle|\, 4\cdot e^{a-2}\right)$ ist die Gerade mit der Gleichung $g_H(x) = 4x$.

Die Ortskurve aller Wendepunkte $W_a\left(e^{a-1} \,\middle|\, e^{a-1}\right)$ ist die Gerade mit der Gleichung $g_W(x) = x$.

| | | I | II | III |
|---|---|---|---|---|
| | | | 25 | 5 |

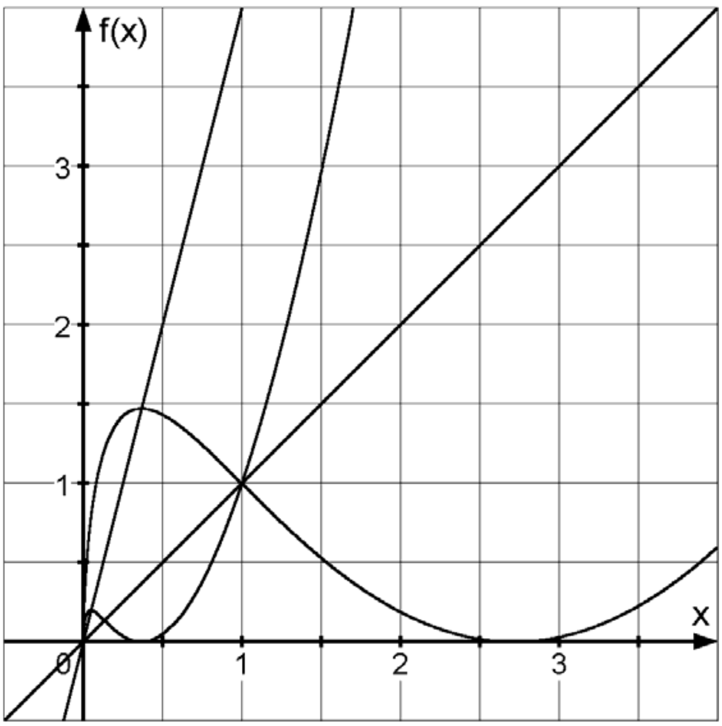
<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>

Der Zeichnung kann man entnehmen, dass der Punkt (1 | 1) ein Punkt des Graphen ist. Setzt man die Koordinaten in die Funktionsgleichung ein, dann gilt:

$$1 = 1\cdot(\ln 1 - a)^2 = a^2 .$$

Es folgt daher, dass $a$ den Wert 1 bzw. den Wert –1 annehmen kann. Um zu entscheiden, welcher Wert von $a$ zu diesem Graphen gehört, berechnet man z.B. die Nullstelle für $a = 1$:

$0 = x\cdot(\ln x - 1)^2$ . Da diese Gleichung für $x = e$ erfüllt ist, gibt die Zeichnung den Graphen für $a = -1$ an.




</td><td>10</td><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>

**Berechnung von $I_1$** (Lösung mit partieller Integration):

$v'(x) = x$ und $u(x) = \ln x - a$ . Dann folgt: $v(x) = \frac{x^2}{2}$ und $u'(x) = \frac{1}{x}$ .

Setzt man nun die Terme gemäß der partiellen Integration ein, so erhält man:

$$I_1 = \lim_{k\to 0}\left(\left[\frac{1}{2}x^2(\ln x - a)\right]_k^{e^a} - \int_k^{e^a}\frac{1}{2}x\,dx\right) = 0 - \lim_{k\to 0}\left[\frac{1}{4}x^2\right]_k^{e^a} = -\frac{e^{2a}}{4} .$$

**Berechnung von $I_2$** (mit partieller Integration):

$v'(x) = x$ und $u(x) = (\ln x - a)^2$ . $\Rightarrow$ $v(x) = \frac{x^2}{2}$ und $u'(x) = 2\cdot(\ln x - a)\cdot\frac{1}{x}$ .

$$I_2 = \lim_{k\to 0}\left(\left[\frac{1}{2}x^2(\ln x - a)^2\right]_k^{e^a} - \int_k^{e^a} x\cdot(\ln x - a)\,dx\right) = 0 - \left(-\frac{e^{2a}}{4}\right) = \frac{e^{2a}}{4} .$$

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| | Dieser Wert beschreibt das Maß der Flächen, die jeweils von den Graphen von $f_a$ und der $x$-Achse eingeschlossen werden. | | 10 | 15 |
| | Insgesamt 100 BWE | 20 | 55 | 25 |

**LA/AG 1**

## II.1 Gerade und Geradenschar

Gegeben sind eine Geradenschar $g_a$ und eine einzelne Gerade $h$

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3a \\ 1 \\ -6a \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$$

mit den Stützpunkten $G(5|3|8)$ und $H(8|0|2)$.

a) Beschreiben Sie, warum der Stützpunkt $G$ nicht auf der Geraden $h$ liegt.

b) Weisen Sie nach, dass jede Gerade $g_a$ der Schar die Gerade $h$ schneidet und dass jeder Punkt von $h$ Schnittpunkt mit einer der Schargeraden ist.

c) Begründen Sie ausgehend von Ihren Ergebnissen zu a) und b) die Aussage, dass die Geraden $g_a$ und $h$ alle in einer Ebene $E$ liegen.
Ermitteln Sie eine Koordinatenform von $E$.

d) Bestimmen Sie in der Ebene $E$ eine Gerade $k$ (in Parameterform), die zwar durch den Stützpunkt der Schar verläuft, aber selbst nicht zur Schar gehört.

e) Eine Ebene $F$ ist orthogonal zur Strecke $\overline{GH}$ und verläuft durch den Punkt $G$. Diese Ebene enthält eine der Schargeraden $g_a$.
Beschreiben Sie einen Ansatz zur Bestimmung von $F$ und des Parameters $a$.
Weisen Sie nach, dass $F: x_1 - x_2 - 2x_3 = -14$ die geforderten Eigenschaften hat und bestimmen Sie den Parameter $a$.
Ermitteln Sie den Schnittpunkt von $F$ mit der Geraden $h$.

f) Die Punkte $G$ und $H$, der Ursprung $O$ und ein beliebiger Punkt $P$ auf der Geraden $h$ sind die Ecken einer Pyramide.
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide in Abhängigkeit von $P$.

## Erwartungshorizont

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| a) | $G$ kann nicht auf der Geraden $h$ liegen, da bei allen Punkten auf $h$ die zweite Koordinate gleich 0 ist. $G$ dagegen hat als zwei Koordinate 3. | 5 | | |
| b) | Der Schnittpunktansatz für die Geraden führt zum linearen Gleichungssystem<br>$\begin{pmatrix}5\\3\\8\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3a\\1\\-6a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\0\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left(\begin{array}{cc\|c}3a&-2&3\\1&0&-3\\-6a&4&-6\end{array}\right).$<br>$r=-3$ ist ablesbar, es verbleiben die beiden Gleichungen<br>$-9a-2s=3\ \wedge\ 18a+4s=-6$,<br>die äquivalent zueinander sind. Für jeden Wert von $a$, d.h. für jede Schargerade, gibt es ein $s$, das die Gleichung löst, d.h. einen Punkt auf $h$, durch den die Schargerade verläuft.<br>Umgekehrt gibt es zu jedem $s$ ein passendes $a$. | | 20 | 5 |
| c) | Der Stützpunkt $G$ der Geradenschar liegt nicht auf der Geraden $h$. Daher spannen $G$ und $h$ eine Ebene $E$ auf. In dieser Ebene müssen auch alle Geraden der Schar liegen, weil sie $h$ schneiden und den gemeinsamen Stützpunkt $G$ haben, der in der Ebene liegt.<br>*Es sind auch andere Begründungen möglich.*<br><u>Bestimmung einer Koordinatenform der Ebene $E$:</u><br>*Variante* 1:<br>Aus $\overrightarrow{GH}=\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$ folgt eine Parameterform $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}8\\0\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$.<br>$\begin{array}{l}x_1=8+2s+3t\\x_2=-3t\\x_3=2-4s-6t\end{array}\quad\Rightarrow 2x_1+x_3=18$ ist damit eine Koordinatenform von $E$.<br>*Variante* 2:<br>Einen Normalenvektor, der senkrecht zu allen Richtungsvektoren der Schar und zum Richtungsvektor von $h$ ist, liefert das Kreuzprodukt<br>$\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$ und mit $\begin{pmatrix}5\\3\\8\end{pmatrix}$ folgt $E$: $4x_1+2x_3=36$.<br>Vereinfacht gilt natürlich auch $E:\ 2x_1+x_3=18$. | | 10 | 10 |

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>Nach Teil b) gibt es keinen Schnittpunkt der Geraden k und h, weil alle Schargeraden die Gerade h schneiden und k keine Schargerade sein soll.<br><br>Die Gerade k muss demnach parallel zu h sein: $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$.</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td><u>Ermitteln von F und a:</u><br><br>Die Ebene F ist orthogonal zu $\overrightarrow{GH}$, d.h. $\overrightarrow{GH}$ ist ein Normalenvektor von F. Davon ausgehend ist die Koordinatenform der Ebene schon weitgehend bestimmt. Die fehlende rechte Seite der Ebenengleichung ergibt sich durch Einsetzen eines bekannten Punktes der Ebene, z.B. von G.<br><br>Da F durch G verläuft, gilt<br><br>$\overrightarrow{GH} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{GH} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = -42$,<br><br>also $F: 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 = -42$ bzw. $F: x_1 - x_2 - 2x_3 = -14$<br><br>Kriterium zur Bestimmung des Parameters a ist, dass alle Geradenpunkte die Ebenengleichung erfüllen:<br><br>$(5 + 3 \cdot r \cdot a) - (3 + r) - 2 \cdot (8 - 6 \cdot r \cdot a) = -14$ für alle $r \in \mathbb{R}$,<br><br>$\Leftrightarrow \; -14 + 15ar - r = -14$,<br><br>$\Leftrightarrow \; 15ar - r = 0$,<br><br>$\Leftrightarrow \; r \cdot (15a - 1) = 0$, also $a = \frac{1}{15}$.<br><br><u>Schnittpunkt F und h:</u><br><br>Im Teil b) ist festgehalten worden, dass für den Parameter s des Schnittpunktes der Geraden $g_a$ mit der Geraden h gilt: $-9a - 2s = 3$. Also ist $s = -\frac{1}{2} \cdot (9a + 3)$.<br><br>Mit $a = \frac{1}{15}$ ergibt sich $s = -\frac{9}{5}$ und damit der Schnittpunkt $\left(\frac{22}{5} \middle| 0 \middle| \frac{46}{5}\right)$.<br><br>s kann auch berechnet werden durch das Einsetzen eines allgemeinen Punktes von h in die Koordinatenform der Ebene F.<br><br>$(8 + 2s) - 2(2 - 4s) = -14 \Leftrightarrow 4 + 10s = -14 \Leftrightarrow s = -\frac{9}{5}$</td><td>10</td><td>15</td><td>5</td></tr>
</table>

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| f) | Das Volumen der Pyramide kann als Spatprodukt berechnet werden.<br>$V(s)=\frac{1}{6}\cdot\left\|\left(\begin{pmatrix}5\\3\\8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}8\\0\\2\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}8+2s\\0\\2-4s\end{pmatrix}\right\|=\frac{1}{6}\left\|\begin{pmatrix}6\\54\\-24\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8+2s\\0\\2-4s\end{pmatrix}\right\|$<br>$=\frac{1}{6}\cdot\left\|6(8+2s)-24(2-4s)\right\|=18\cdot\left\| s\right\|.$ | 10 | | |
| | Insgesamt 100 BWE | 25 | 55 | 20 |

**LA/AG 2**

## II.2 Schattenspiele

An einer Hauswand befindet sich ein kunstvoll bemalter Vorbau in Form eines Prismas, das mathematisch durch die Eckpunkte

$$W_1(0 \mid -2 \mid 2),\ W_2(0 \mid 2 \mid 2),\ W_3(0 \mid 2 \mid 6),\ W_4(0 \mid -2 \mid 6),\ V_1(2 \mid 0 \mid 2) \text{ und } V_2(2 \mid 0 \mid 6)$$

beschrieben werden kann (1 LE $\hat{=}$ 1 m).
Die Hauswand liegt in der Halbebene mit $x_1 = 0$ und $x_3 \geq 0$.
Zur Beleuchtung dieses Vorbaus verläuft im Abstand 6 m von der Hauswand in 3 m Höhe parallel zum Erdboden (also in der $x_1$-$x_2$-Ebene) eine Schiene, an der eine punktförmige Lichtquelle beweglich befestigt ist.

a) Zeichnen Sie den Vorbau in das beigefügte Koordinatensystem ein.
Berechnen Sie die Winkel zwischen der Seitenfläche $V_1W_2W_3V_2$ und der Hauswand sowie zwischen dieser Seitenfläche und der anderen Vorbauseite.

b) Die punktförmige Lichtquelle befindet sich auf der Schiene zunächst im Punkt $A$ ( 6 | 0 | 3 ).
Bestimmen Sie die Form des Schattens, den der Vorbau auf die Hauswand wirft. Ermitteln Sie dazu die Schattenpunkte von $V_1$ und $V_2$ an und zeichnen Sie den Schatten des Vorbaus in Ihr Koordinatensystem ein.

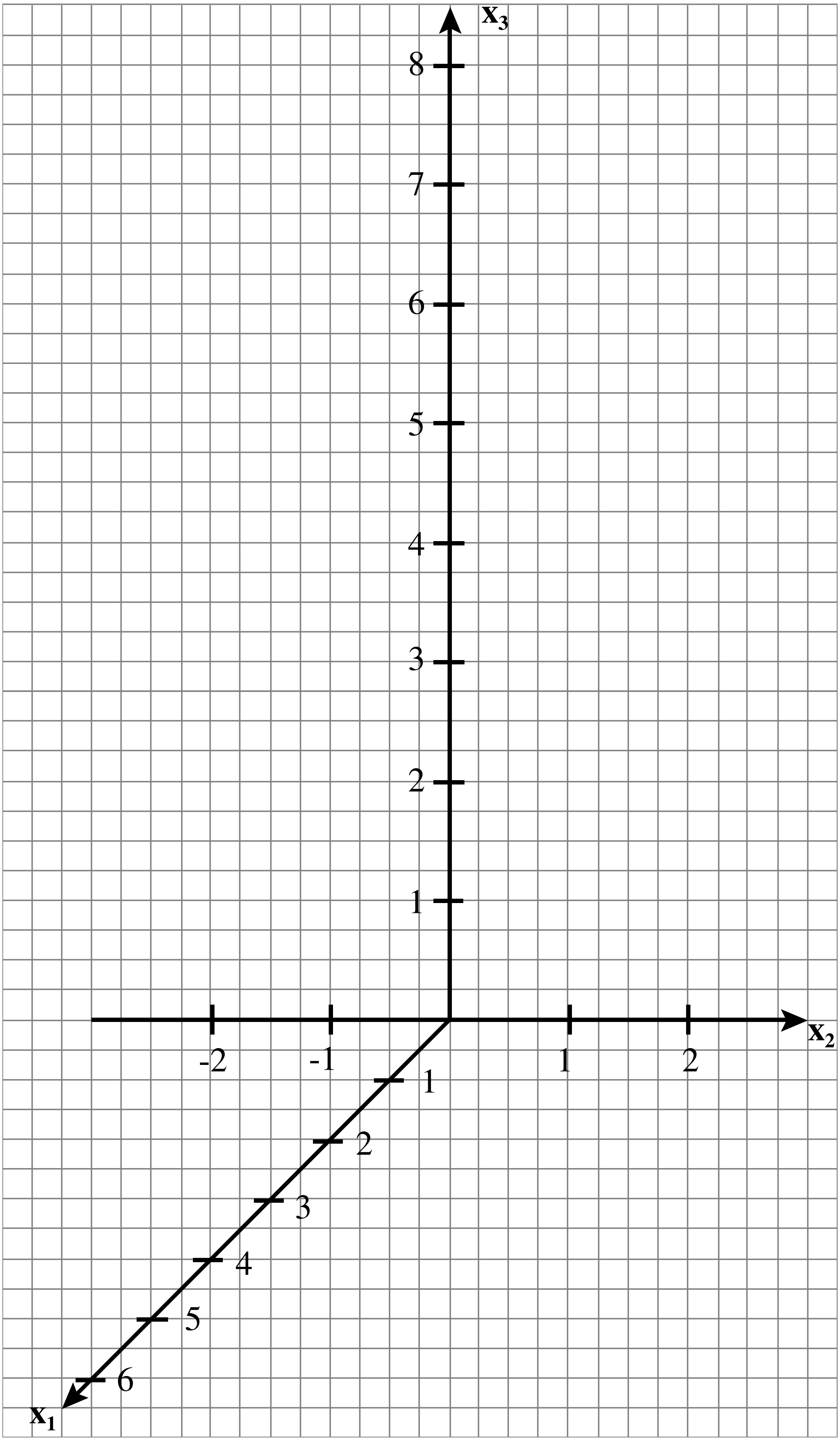
c) Bestimmen Sie, um wie viele Meter die Lichtquelle von $A$ aus auf der Schiene höchstens nach links oder rechts (negative oder positive $x_2$-Richtung) verschoben werden darf, wenn seitlich vom Vorbau kein Schatten auf die Hauswand fallen soll.

d) Beschreiben Sie, wie sich die Schattenform oberhalb und unterhalb des Vorbaus auf der Hauswand verändert, wenn man die Lichtquelle auf der Schiene von Punkt $B$ ( 6 | –4 | 3 ) nach Punkt $C$ ( 6 | 4 | 3 ) verschiebt. Bestimmen Sie dazu den tiefsten und höchsten Punkt des Schattens auf der Wand in Abhängigkeit von der Position der Lichtquelle.

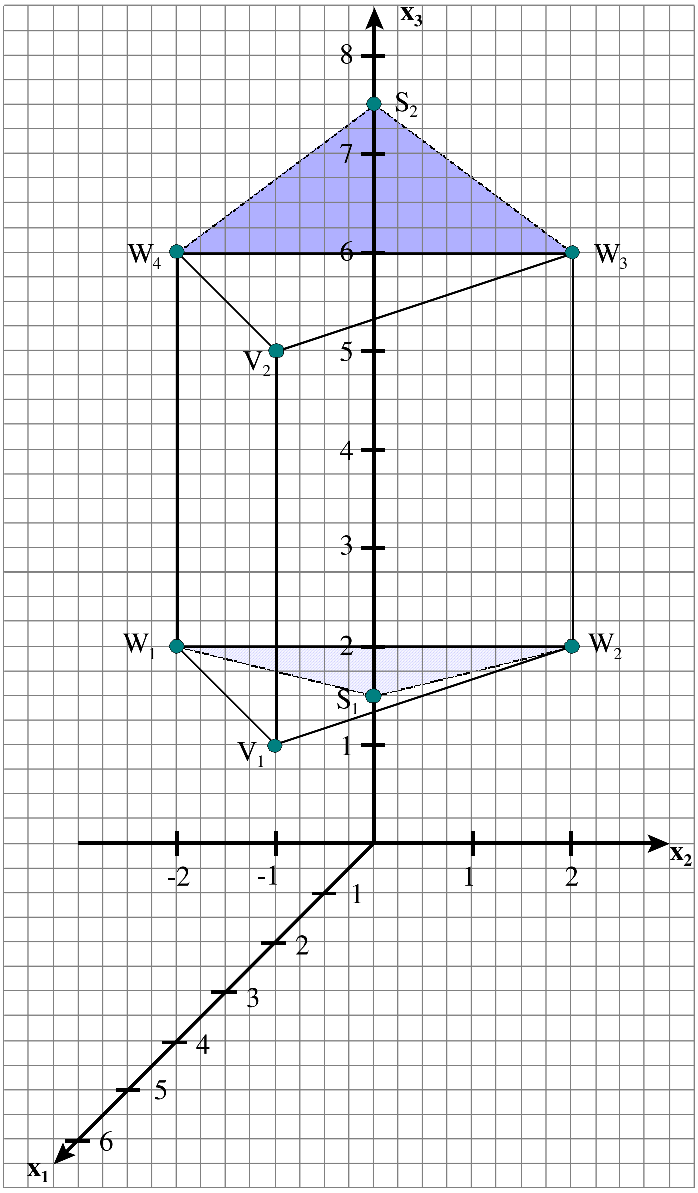
e) Damit Regenwasser von dem flachen Vorbau abfließen kann, wird dem Vorbau ein schräges Dach aufgesetzt. Dieser Dachaufsatz besteht aus zwei dreieckigen Kupferplatten mit den Ecken $V_2$, $W_3$ und $D$ ( 0 | 0 | 7 ) sowie $W_4$, $V_2$ und $D$.
Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Dachplatte $V_2W_3D$ und der Vorbauseite $V_1W_2W_3V_2$ .

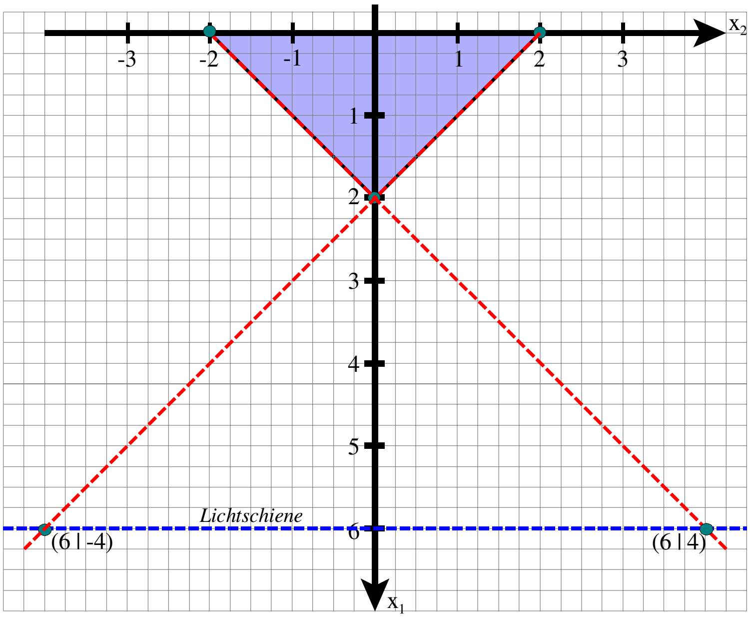
f) Beurteilen Sie, ob der Dachaufbau Einfluss auf den Schatten auf der Wand hat, wenn die Lichtquelle wie im Aufgabenteil d) von Punkt $B$ nach Punkt $C$ bewegt wird.

## Anlage zur Aufgabe „Schattenspiele“



## Erwartungshorizont

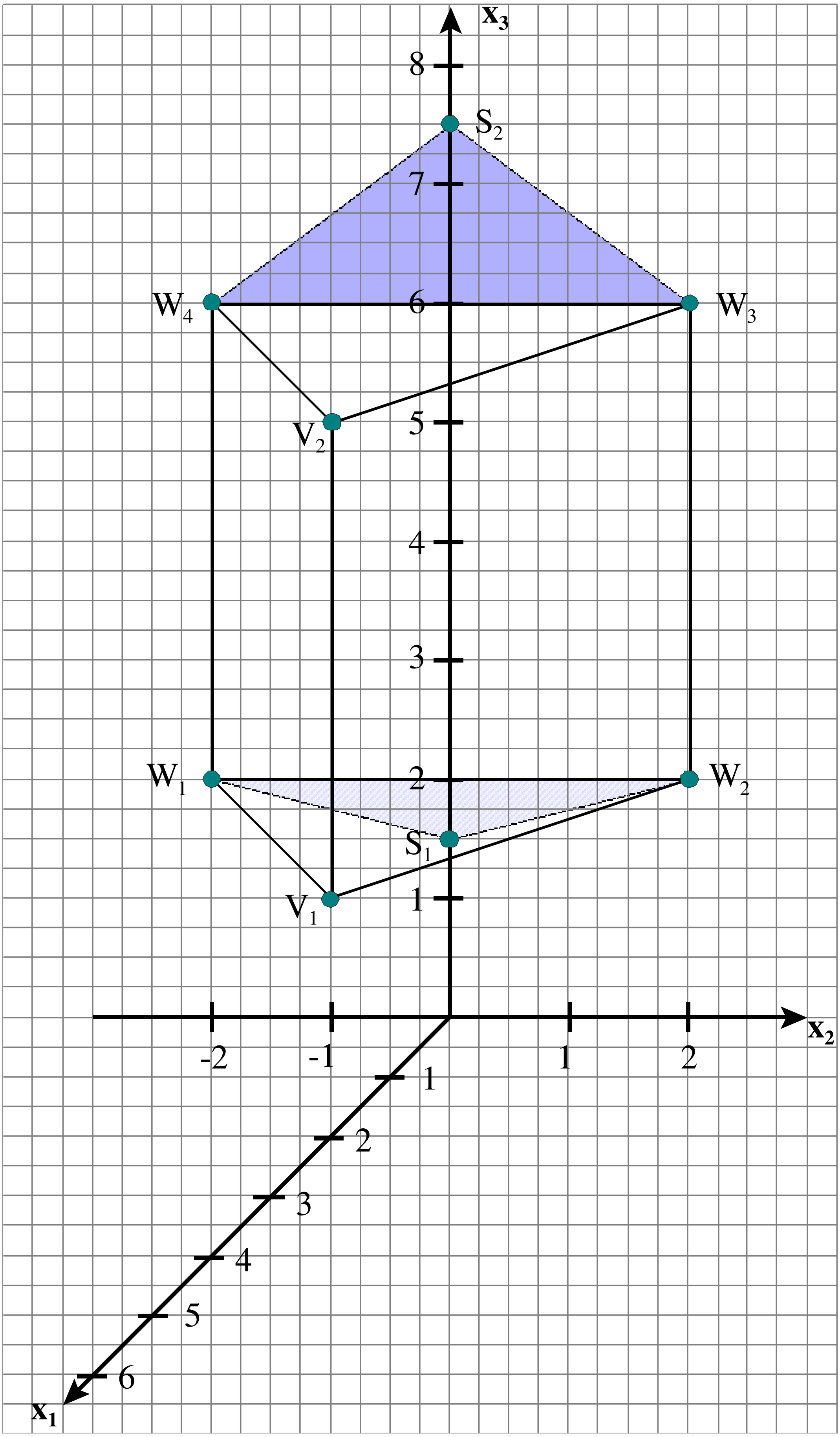
| | Lösungsskizze | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| a) | <br>Da die Ebene, die durch $V_2$, $W_3$ und $W_4$ aufgespannt wird, senkrecht zur Hauswand ist, kann der gesuchte Winkel $\alpha$ elementargeometrisch bestimmt werden als Winkel bei $W_3$ im rechtwinkligen Dreieck $V_2W_3Z$ mit $Z( 0 \mid 0 \mid 6)$.<br>$\left\|\left\|\overline{W_3Z}\right\| = \left\|\overline{V_2Z}\right\| = 2$. Das rechtwinklige Dreieck ist also gleichschenklig. Damit ist der Winkel zur Wand 45° und zur anderen Vorbauseite 90°.<br>*Beide Winkel erhält man auch durch eine Projektion des Dreiecks $V_2,W_3,W_4$ in die $x_1$-$x_2$-Ebene direkt aus der Skizze oder rechnerisch.*<br>*$\alpha$ kann auch als Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{W_3V_2}$ und $\overrightarrow{W_3W_4}$, oder aber auch als Winkel zwischen Normalenvektoren der Ebenen berechnet werden.* | 20 | | |

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>b)</td><td>Der Schattenpunkt $S_1$ von $V_1$ ergibt sich als Schnittpunkt der Geraden $g_{AV_1}$ durch $A$ und $V_1$ mit der $x_2$-$x_3$-Ebene (Wand).<br>$$g_{AV_1}:\ \vec{x}=\vec{a}+r\cdot(\vec{v}_1-\vec{a})=\begin{pmatrix}6\\0\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\-1\end{pmatrix},\quad r\in\mathbb{R}.$$<br>Schnitt mit der $x_2$-$x_3$-Ebene $\begin{pmatrix}6\\0\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\Rightarrow r=\frac{3}{2}\wedge x_2=0\wedge x_3=1{,}5$<br>ergibt den Schattenpunkt $S_1$ (0 ǀ 0 ǀ 1,5) von $V_1$.<br>Entsprechend bestimmt man den Schattenpunkt $S_2$ von $V_2$ als Schnittpunkt der Geraden $g_{AV_2}$ durch $A$ und $V_2$ mit der $x_2$-$x_3$-Ebene (Wand) zu $S_2$ ( 0 ǀ 0 ǀ 7,5).<br>Es ergibt sich unterhalb des Vorbaus ein dreieckiger Schatten $W_2W_1S_1$ und oberhalb ein dreieckiger Schatten $W_4W_3S_2$.<br>Die Zeichnung in a) ist zu ergänzen.</td><td>5</td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Es ergibt sich kein seitlicher Schatten, wenn die Schattenpunkte von $V_1$ und $V_2$ $x_2$-Koordinaten zwischen –2 und 2 haben.<br><u>1. Lösungsvorschlag:</u><br>(elementargeometrisch, senkrechte Projektion in $x_1$-$x_2$-Ebene):<br><br><br>Die Lösung entnimmt man der Zeichnung oder ermittelt sie durch Rechnung. Antwortsatz s.u.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung, Bewertung I | II | III |
|---|---|---|---|---|
| | 2. Lösungsvorschlag:<br>$P\,(6 \mid x_2 \mid 3)$ sei der Punkt auf der Schiene, bei dem der Schattenpunkt $S_{PV_1}$ von $V_1$ die $x_2$-Koordinate –2 oder 2 hat.<br>$g_{PV_1}:\ \vec{x} = \vec{p} + r \cdot (\vec{v}_1 - \vec{p}) = \begin{pmatrix} 6 \\ x_2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -x_2 \\ -1 \end{pmatrix},\quad r \in \mathbb{R}.$<br>Der Schnitt der Geraden $g_{PV_1}$ durch $P$ und $V_1$ mit der $x_2$-$x_3$-Ebene ergibt $S_{PV_1}\,(0 \mid -0{,}5x_2 \mid 1{,}5)$.<br>$-0{,}5x_2 = -2 \Leftrightarrow x_2 = 4$ bzw. $-0{,}5x_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = -4$.<br>Für den Schatten $S_{PV_2}$ von $V_2$ gilt entsprechend $S_{PV_2}\,(0 \mid -0{,}5x_2 \mid 7{,}5)$.<br>Die Lichtquelle kann also bis zu 4 m nach links oder rechts auf der Schiene verschoben werden, ohne dass ein seitlicher Schatten auf der Hauswand erscheint. | | 10 | 10 |
| d) | Verschiebt man die Lichtquelle zwischen $B$ und $C$, so erhält man nach Teil c) keinen seitlichen Schatten.<br>Bezeichnet $P(6 \mid x_2 \mid 3)$ die Position der Lichtquelle, so ist der tiefste Punkt des Schattens auf der Wand bereits in Teil c) zu $S_{PV_1}\,(0 \mid -0{,}5x_2 \mid 1{,}5)$ bestimmt worden, der höchste Punkt zu $S_{PV_2}\,(0 \mid -0{,}5x_2 \mid 7{,}5)$. *(nur bei Lösungsvorschlag 2)*<br>Der Schatten oberhalb des Vorbaus ist immer ein Dreieck mit den Eckpunkten $W_3$, $S_{PV_2}$ und $W_4$ mit $S_{PV_2}\,(0 \mid s_2 \mid 7{,}5)$ und $-2 \le s_2 \le 2$.<br>Der Schatten unterhalb des Vorbaus ist immer ein Dreieck mit den Eckpunkten $W_2$, $W_1$ und $S_{PV_1}$ mit $S_{PV_1}\,(0 \mid s_2 \mid 1{,}5)$ und $-2 \le s_2 \le 2$,<br>d.h. die oberen Schattendreiecke besitzen immer die Basis $\overline{W_4W_3}$ der Länge 4 m und die Höhe 1,5 m.<br>Die unteren Schattendreiecke besitzen immer die Basis $\overline{W_1W_2}$ der Länge 4 m und die Höhe 0,5 m. | | 10 | 5 |
| e) | Der Winkel zwischen zwei Ebenen entspricht dem Winkel zwischen ihren Normalenvektoren. Ein Normalenvektor zur Ebene durch die Punkte $V_1$, $W_2$ und $W_3$ ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Das folgt z.B. aus Teil a), denn der dort berechnete Winkel ist 45°.<br>Die Ebene $E$ des Daches wird durch die Punkte $V_2$, $W_3$ und $D$ aufgespannt. Ein Normalenvektor $\vec{n}_D$ von $E$ steht senkrecht auf den Richtungsvektoren von $E$, also muss gelten: | | | |

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| | $\vec{n}_D \cdot (\vec{w}_3 - \vec{v}_2) = 0 \wedge \vec{n}_D \cdot (\vec{d} - \vec{v}_2) = 0 \Leftrightarrow -2n_1 + 2n_2 = 0 \wedge -2n_1 + n_3 = 0$ .<br><br>Ein Normalenvektor von $E$ ist damit $\vec{n}_D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.<br><br>Den Winkel zwischen den Normalenvektoren erhält man aus:<br><br>$\cos(\alpha) = \frac{\lvert \vec{n} \cdot \vec{n}_D \rvert}{\lvert \vec{n} \rvert \cdot \lvert \vec{n}_D \rvert} \Rightarrow \cos(\alpha) = 0{,}5774... \Rightarrow \alpha \approx 54{,}74°$.<br><br>Da der Winkel der Dachplatte zur Vorbauseite stumpf ist, berechnet er sich zu $180° - \alpha \approx 125{,}26°$. | | 15 | |
| f) | Ohne Dachaufsatz entsteht ein Schatten auf der Wand, der auch den Teil der Wand umfasst, den der Dachaufsatz abdeckt. Der Grund dafür ist, dass der Punkt $S_{PV2}$ einen halben Meter höher auf der Wand ist als der Punkt D – unabhängig von der Position der Lichtquelle im zulässigen Bereich.<br><br>Teile des Schattens auf der Wand fallen jetzt also auf den Dachaufsatz.<br><br>Das Dach befindet sich unter allen die Grenze des Schattens markierenden Lichtstrahlen, deshalb hat der Dachaufsatz keinen Einfluss auf die Eckpunkte des Schattens auf der Hauswand. | | | 10 |
| | Insgesamt 100 BWE | 25 | 50 | 25 |

## Lösungsschablone:



**Stochastik 1**

## III.1 Sportschuhe

Ein Sportschuhhersteller verkündet, dass sein neuestes Produkt bei 99 % seiner Kunden die Sprintleistung verbessern wird.

a) Geben Sie an, was gewährleistet sein muss, damit die Anzahl $X$ der Kunden ohne Verbesserung ihrer Sprintleistung als binomialverteilt angenommen werden kann. Nennen Sie außerdem Gründe, die dagegen sprechen.

Die Zufallsgröße $X$ beschreibe wie in a) die Anzahl der Kunden, deren Sprintleistungen sich nicht verbessert haben. $X$ wird im Folgenden als binomialverteilt mit der aus den Herstellerangaben folgenden Wahrscheinlichkeit von 0,01 angenommen.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 100 Kunden höchstens einer keine Verbesserung der Sprintleistung feststellt.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 500 Kunden mehr als 3 keine Verbesserung der Sprintleistung beobachten.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 950 Kunden bei mindestens 12 von diesen keine Verbesserung der Sprintleistung eintritt.

e) In einem kleinen Leichtathletik-Verein schwärmen die Mitglieder von dem neuen Schuh und behaupten, bei allen hätten sich die Leistungen verbessert.

   Untersuchen Sie, ob in einem Großverein die gleiche Euphorie ausbrechen könnte.

   *Es liegt auf der Hand, dass bei der Betrachtung hinreichend vieler Personen auch solche dabei sein werden, die keine Verbesserung der Sprintleistung feststellten.*
   *Ermitteln Sie daher die Mindestanzahl von Vereinsmitgliedern, ab der die Wahrscheinlichkeit, dass bei <u>allen</u> Mitgliedern Leistungsverbesserungen zu beobachten sind, unter 0,05 % sinkt.*

f) Die Zentrale für Verbraucherschutz hält die allgemeine Begeisterung für übertrieben. Sie möchte ihre Skepsis durch einen Signifikanztest auf dem 5 %-Niveau belegen und dazu 950 Schuhbesitzer aus einer repräsentativen Stichprobe befragen.

   Bestimmen Sie einen entsprechenden Test.

g) Bereits nach einem halben Jahr sinken die Verkaufszahlen der Sportschuhe signifikant.
   Die Werbeabteilung möchte deswegen eine Kampagne starten, um den Bekanntheitsgrad des Produkts wieder über 80 % zu heben.
   Die Finanzabteilung hält dies für überflüssig. Der Bekanntheitsgrad läge bereits über 80 % und die Ursache für das Sinken der Verkaufszahlen sei eher in der Qualität der Konkurrenzprodukte zu suchen.

   Bestimmen Sie die Hypothesen, die hinter diesen Behauptungen stehen, und beschreiben Sie, durch welches Vorgehen und welche Ergebnisse die jeweiligen Verfechter sich von ihren Standpunkten abbringen ließen.

## Erwartungshorizont

| | Lösungsskizze | Zuordnung, Bewertung I | II | III |
|---|---|---|---|---|
| a) | *Es wird eine „ergebnisoffene" zusammenhängende Darstellung erwartet, z.B.:* Die Unabhängigkeit der Ergebnisse muss gewährleistet sein. Sie ist es nicht, sobald ein Sportler aufgrund der Erfahrungsberichte anderer seine Erwartungshaltung anpasst.<br>Es muss davon ausgegangen werden, dass die Sportler ihre eigene Leistung objektiv bewerten, d.h. dass sie auch andere Faktoren, welche die Sprintleistung nicht besser werden lassen, erkennen. Tagesform, Klima, Halle oder Stadion usw. können sich negativ auf die Leistung auswirken, unabhängig von der Qualität des neuen Schuhs. | 10 | | |
| b) | $\text{P}(\text{X} \le 1) = 0{,}99^{100} + \binom{100}{1} \cdot 0{,}01^{1} \cdot 0{,}99^{99} \approx 73{,}58\%$ . | 10 | | |
| c) | $P(X > 3) = 1 - 0{,}99^{500} - \binom{500}{1} \cdot 0{,}01^{1} \cdot 0{,}99^{499} - \binom{500}{2} \cdot 0{,}01^{2} \cdot 0{,}99^{498} - \binom{500}{3} \cdot 0{,}01^{3} \cdot 0{,}99^{497}$<br>$\approx 73{,}64\%$ . | | 10 | |
| d) | Es gilt $\sigma = \sqrt{950 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99} = \sqrt{9{,}405} > 3$ . Damit kann die Binomial- durch die Normalverteilung approximiert werden. Die Anwendung der integralen Näherungsformel mit Hilfe der Tafel für die Gaußsche Integralfunktion führt zu<br>$P(X \ge 12) = 1 - P(X \le 11) \approx 1 - \Phi\left(\frac{11{,}5 - 9{,}5}{\sqrt{9{,}405}}\right) \approx 1 - \Phi(0{,}65) \approx 0{,}26$ .<br>Die Wahrscheinlichkeit, dass bei mindestens 12 von 950 Kunden keine Verbesserung der Sprintleistungen eintritt, ist etwa 26 %. | | 15 | |
| e) | Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl *n*, für die gilt $0{,}99^{n} < 0{,}0005$ .<br>Es ergibt sich $n > \frac{\lg\ 0{,}0005}{\lg\ 0{,}99} \approx 756{,}28$ .<br>In einem Verein mit mehr als 756 Mitgliedern ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich bei allen Mitgliedern die Sprintleistungen verbessern, kleiner als 0,05%. In einem Großverein wird eine Euphorie also kaum ausbrechen. | | 10 | |

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>f)</td><td>Es sei $p$ die Einzelwahrscheinlichkeit, dass bei einem Kunden durch den Schuhkauf keine Verbesserung der Sprintleistung eintritt. Die Verbraucherschutzzentrale wird die Nullhypothese $H_0$: $p \le 1\%$ zu verwerfen versuchen.<br><br>Viele unzufriedene Kunden sprechen gegen die Nullhypothese. Es sei $X$ die Anzahl unzufriedener Kunden unter den 950 Kunden. Gesucht ist eine kleinste Grenze $g$, so dass $P(X > g \mid H_0) \le 5\%$.<br><br>Nun ist $P(X > g \mid H_0) < P(X > g \mid p = 0{,}01)$. Man bestimmt daher $g$ so klein wie möglich, damit die rechte Seite kleiner oder gleich 5 % wird. Wie in d) kann die Normalverteilung zur Approximation verwendet werden:<br><br>$P(X > g \mid p = 0{,}01) = 1 - P(X \le g \mid p = 0{,}01) \approx 1 - \Phi\left(\frac{g + 0{,}5 - 9{,}5}{\sqrt{9{,}405}}\right)$<br><br>$\Phi\left(\frac{g + 0{,}5 - 9{,}5}{\sqrt{9{,}405}}\right) = 0{,}95$. Die Tabelle liefert $\frac{g + 0{,}5 - 9{,}5}{\sqrt{9{,}405}} \approx 1{,}65$ und daher ist $g \approx 14,\ldots$<br><br>Die Nullhypothese sollte also verworfen werden, wenn mehr als 15 der Befragten keine Verbesserung der Sprintleistungen durch den neuen Schuh erfahren haben.</td><td></td><td>10</td><td>20</td></tr>
<tr><td>g)</td><td>Bezeichne $p$ den Bekanntheitsgrad des Produkts.<br><br>Dann vertreten die Werber die Meinung, dass $p \le 0{,}8$. Sie lassen sich nur durch signifikant große Stichprobenergebnisse vom Gegenteil überzeugen.<br><br>Die Finanzabteilung vertritt den Standpunkt, dass $p > 0{,}8$. Sie ändert ihre Meinung nur durch signifikant kleine Stichprobenergebnisse.<br><br>Andere in sich stringente Lösungen sind ebenfalls als richtig zu bewerten.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>60</td><td>20</td></tr>
</table>

**Stochastik 2**

## III.2 Lichterkettenproduktion

Eine Firma stellt hochwertige Lichterketten für den Einsatz im Außenbereich her, die durch ihre spezielle Konstruktion, bei der die einzelnen Glühlampen – im Volksmund auch *Glühbirnen* genannt – fest eingelötet werden, jedem Wetter standhalten sollen. Die Ketten werden an die Abnehmer mit folgender Garantie verkauft: Wenn die Lichterkette nicht einwandfrei funktioniert, so erhält der Kunde 20 € als Entschädigung.

Bei der Produktion sind zwei voneinander unabhängige Fehler möglich:

- Die Glühlampen können bereits vor dem Einlöten defekt sein. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Glühlampe defekt ist, beträgt erfahrungsgemäß 4 %.
- Der Zusammenbau der Kette kann fehlerhaft erfolgen, z.B. indem ein Kontakt (oder mehrere) nicht richtig gelötet wird. Die Wahrscheinlichkeit für fehlerhaften Zusammenbau einer Kette beträgt erfahrungsgemäß 5 %.

Eine Lichterkette enthält 24 Glühlampen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Lichterkette einwandfrei funktioniert.

b) Ein Kunde hat eine defekte Lichterkette reklamiert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dieser Kette alle Glühlampen heil sind und damit der Fehler nur im Zusammenbau liegt.

c) Es gehen gleich nach Verkaufsbeginn viele Garantieansprüche bei der Firma ein. Die hohen Kosten geben den Verantwortlichen zu denken. Daher beauftragen sie einen Stochastiker, um die Gründe zu klären. Dieser berechnet zunächst den Erwartungswert der Garantiekosten für 1 000 verkaufte Lichterketten. Berechnen auch Sie diesen Wert.

Anschließend wird in der Firma diskutiert, ob man nicht besser die einzelnen Glühlampen vor dem Zusammenbau oder auch die fertig gestellte Kette vor dem Verkauf kontrollieren sollte. Ein Mitarbeiter stellt die Kosten für die Kontrolle zusammen: Jede Funktionskontrolle einer Glühlampe kostet 0,06 €, die Kontrolle der Kette 0,40 €. Dabei hat er die Kosten für den Arbeitsplatz und die Arbeitszeit des Prüfers berücksichtigt.

Nun soll die Summe der zu erwartenden Kontroll- und Garantiekosten für drei verschiedene Möglichkeiten berechnet werden (siehe Aufgabenteile d) bis f)), und zwar für jeweils 1000 zum Verkauf kommende Ketten. Die Gesamtkosten will man dann mit dem in c) berechneten Erwartungswert vergleichen.

d) Fall 1: Es werden nur die Lampen kontrolliert.
Bestimmen Sie die Zahl der durchschnittlich zu kontrollierenden Lampen, damit man 24 funktionierende Lampen erwarten kann.
Da keine Kontrolle der Kette erfolgen soll, kommen dennoch defekte Ketten zum Verkauf. Bestimmen Sie für diesen Fall die Summe der zu erwartenden Kontroll- und Garantiekosten.

e) Fall 2: Es werden nur die fertigen Ketten kontrolliert.
Wenn die Ketten kontrolliert werden, kommen natürlich nur brauchbare Ketten in den Verkauf. Ermitteln Sie die Summe der zu erwartenden Kontroll- und Garantiekosten.

f) Fall 3: Es werden die Lampen und die Ketten kontrolliert.
Bestimmen Sie die Summe der zu erwartenden Kontroll- und Garantiekosten, wenn sowohl die einzelnen Glühlampen als auch die fertigen Ketten kontrolliert werden.

g) Mit den so bestimmten Gesamtkosten ist der zuständige Betriebswirtschaftler nicht einverstanden. Er meint, dass man die Materialkosten und die Arbeitszeit für den Zusammenbau der Ketten ebenfalls berücksichtigen muss und zwar mit 3 € pro Kette, unabhängig davon, ob die Kette in den Verkauf geht oder bei einer Kontrolle aussortiert wird. Die Materialkosten für aussortierte Glühlampen will aber auch er vernachlässigen.

Ermitteln Sie unter dieser Annahme das kostengünstigste Kontrollverhalten der Firma.

## Erwartungshorizont

| | Lösungsskizze | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| a) | Jede einzelne Glühlampe muss funktionieren und auch der Zusammenbau muss korrekt erfolgt sein. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit ca. 36 %: $0{,}96^{24} \cdot 0{,}95 \approx 0{,}3566$. | 10 | | |
| b) | Die Lösung erfolgt über die Berechnung einer bedingten Wahrscheinlichkeit bei geeigneter Definition von Ereignissen:<br>A: Alle Glühlampen sind heil. B: Die Lichterkette ist defekt.<br>Gesucht ist P($A$ \| $B$):<br>Gegeben ist in der Aufgabe P($A \cap B$) = $0{,}96^{24} \cdot 0{,}05 \approx 0{,}0188$ ,<br>und mit Aufgabenteil a) erhält man P($B$) ≈ 1 – 0,3566 = 0,6434.<br>Also ist P($A$ \| $B$) ≈ $\frac{0{,}0188}{0{,}6434} \approx 0{,}0292$.<br>Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler nur im Zusammenbau ist knapp 3 %. | | 15 | |
| c) | Da für jede defekte verkaufte Kette 20 € anfallen, ergibt sich mit dem Wert aus a) für 1 000 Ketten (1 – 0,3566) · 20 € · 1000 = 12 868 €. | 10 | | |
| d) | Fall 1: Da 4 % aller Glühlampen defekt sind, erwartet man bei 25 geprüften Lampen durchschnittlich 24 Lampen, die funktionieren. (25 · 0,96 = 24). Es fallen somit Kontrollkosten von 25 · 0,06 € = 1,50 € pro zusammengebauter Kette an.<br>Wegen Fehlern bei Zusammenbau sind aber durchschnittlich 50 von 1 000 verkauften Ketten dennoch defekt, also muss man mit 50 · 20 € = 1 000 € Garantiekosten rechnen.<br>Die zu erwartenden Kontroll- und Garantiekosten betragen<br>1 000 · 1,50 € + 1 000 € = 2 500 €. | | 15 | |
| e) | Fall 2: Damit 1 000 Ketten in den Verkauf kommen, müssen durchschnittlich $\frac{1000}{0{,}96^{24} \cdot 0{,}95} \approx 2804$ Ketten kontrolliert werden. Die zu erwartenden Kontrollkosten sind somit 2 804 · 0,40 € = 1 121,60 €. Garantiekosten entfallen, da alle verkauften Ketten intakt sind. | | 15 | |
| f) | Fall 3: Wie unter d) berechnet, betragen die Kontrollkosten zur Gewinnung einer Kette mit intakten Glühlampen im Mittel 1,50 €. Da jetzt 95% aller zu prüfenden Ketten intakt sind, muss man 1 000 : 0,95 ≈ 1 053 Ketten mit intakten Glühlampen weiter prüfen.<br>Die Kontrollkosten und damit die zu erwartenden Gesamtkosten betragen somit<br>1 053 · (1,50 € + 0,40 €) = 2 000,70 €. | | 15 | |

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| g) | Für jede zusammengebaute Kette müssen jetzt Kosten in Höhe von 3 € zusätzlich berücksichtigt werden.<br>Damit erhält man ohne Kontrolle 15 868 €, da bei 1 000 verkauften Ketten auch nur 1000 zusammengebaut werden (12 868€ + 1 000 · 3 €).<br>Im Fall 1 erhält man aus dem gleichen Grunde 2 500 € + 1 000 · 3 € = 5 500 €.<br>Im Fall 2 werden 2 804 Ketten zusammengebaut, also betragen die Kosten jetzt 1 121,60 € + 2 804 · 3€ = 9 533,60 €.<br>Im Fall 3 werden 1 053 Ketten zusammengebaut, also betragen die Kosten jetzt 2 000,70 € +1 053 · 3 € = 5 159,70 €.<br>Unter dieser Annahme ist es am günstigsten, alles zu prüfen (Fall 3). | | | 20 |
| | Insgesamt 100 BWE | 20 | 60 | 20 |