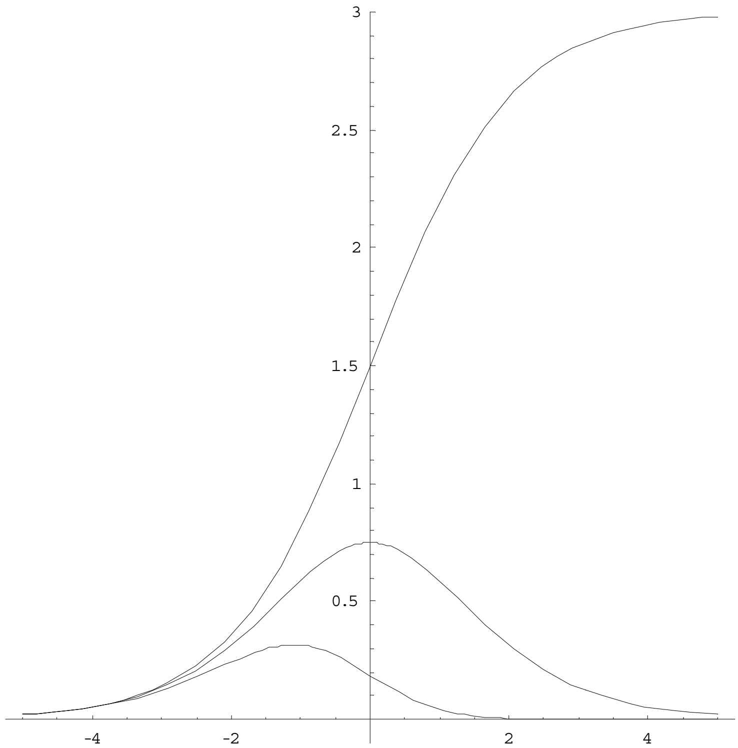
ANALYSIS 1

I.1 Funktionenschar exponentieller Funktionen

Gegeben ist die Funktionenschar f_n mit:

$$f_n(x) = \frac{3 \cdot e^x}{(1+e^x)^n} \;,\; n \in \mathbb{N} \;,\; x \in \mathbb{R}.$$

a) Die nebenstehende Abbildung zeigt die Graphen für drei Funktionen dieser Schar. Bestimmen Sie die Zahlenwerte des Parameters n für die jeweilige Funktion. Verwenden Sie dazu die Schnittpunkte der Graphen mit der y-Achse und beachten Sie, dass n eine natürliche Zahl ist.



b) Untersuchen Sie die Funktionen der Schar auf ihr Verhalten für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

c) Weisen Sie nach, dass F_n mit
$$F_n(x) = \frac{3 \cdot \left(1+e^x\right)^{1-n}}{1-n}$$
für jedes $n \in \mathbb{N},\ n \neq 1,$ eine Stammfunktion der Funktion f_n ist.

d) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche zwischen den Graphen der Funktionen f_2 und f_3 im gesamten Bereich $x < 0$.

Hinweis: Sie können verwenden, dass keine zwei Funktionen der Schar einen gemeinsamen Punkt haben.

e) Zeigen Sie,

- dass der Graph von f_2 symmetrisch zur y-Achse ist
- dass der Graph von f_1 punktsymmetrisch zu seinem Schnittpunkt mit der y-Achse ist.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<u>Berechnung der Nullwerte:</u> $n=1$: $f_1(0)=\frac{3\cdot e^0}{\left(1+e^0\right)^1}=\frac{3}{2}=1{,}5$ $n=2$: $f_2(0)=\frac{3\cdot e^0}{\left(1+e^0\right)^2}=\frac{3}{4}=0{,}75$ $n=3$: $f_3(0)=\frac{3\cdot e^0}{\left(1+e^0\right)^3}=\frac{3}{8}=0{,}375$ $n=4$: $f_4(0)=\frac{3\cdot e^0}{\left(1+e^0\right)^4}=\frac{3}{16}=0{,}1875$ $n=5$: $f_5(0)=\frac{3\cdot e^0}{\left(1+e^0\right)^5}=\frac{3}{32}=0{,}09375$ Dargestellt sind (von oben nach unten) die Graphen der Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ und $f_4(x)$. oder: Der Grafik werden die Nullwerte der drei Graphen entnommen: 1,5 , 0,75 und (etwa) 0,2. Diese werden in die Funktionsgleichung eingesetzt: $f_n(0)=\frac{3}{(1+1)^n}=1{,}5 \quad\Leftrightarrow\quad 2^n=2 \quad\Leftrightarrow\quad n=1$ $f_n(0)=\frac{3}{(1+1)^n}=0{,}75 \quad\Leftrightarrow\quad 2^n=4 \quad\Leftrightarrow\quad n=2$ $f_n(0)=\frac{3}{(1+1)^n}\approx 0{,}2 \quad\Leftrightarrow\quad 2^n\approx 15 \quad\Leftrightarrow\quad n\approx 4$ $f_3(0) = 0{,}375$ und $f_5(0) \approx 0{,}09$, so dass die Ableseungenauigkeit hier keine Rolle spielen sollte.	15		
b)	<u>Fallunterscheidung:</u> $n=1$: $f_1(x)=\frac{3\cdot \mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$. Es gilt: $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x)=0$, da der Zähler gegen Null und der Nenner gegen 1 geht.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Es gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} f_1(x)=3$, da für große x der Summand 1 im Nenner zu vernachlässigen ist. $n>1$: $f_n(x)=\dfrac{3\cdot e^x}{(1+e^x)^n}$. Das Verhalten der Funktionen der Schar im Unendlichen kann man über das Wachstum von Zähler und Nenner untersuchen. Der Nenner lässt sich nach unten abschätzen durch $e^{n\cdot x}$, der ganze Bruch lässt sich dann nach oben abschätzen durch $\dfrac{3}{e^{(n-1)\cdot x}}$, so dass $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, da der Zähler gegen Null und der Nenner gegen 1 geht. Auch andere Argumentationen wie „der Zähler wächst mit e^x, während der Nenner mit $e^{x\cdot n}$ wächst“ sind zulässig.	10	10	5
c)	F_n ist eine Stammfunktion, wenn $F_n'(x)=f_n(x)$. $F_n(x)=\dfrac{3\,(1+e^x)^{1-n}}{1-n}$, so dass für $F_n'(x)$ folgt: $F_n'(x)=\dfrac{3}{1-n}\cdot(1-n)\,e^x\cdot(1+e^x)^{-n}$ $=f_n(x)$.	5	10	
d)	Da f_2 und f_3 keinen gemeinsamen Punkt haben und f_2 oberhalb von f_3 liegt (siehe Aufgabenteil a), ergibt sich der gesuchte Flächeninhalt durch Integration der Differenz der Funktionsterme. $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 (f_2(x)-f_3(x))\,dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\left[\dfrac{3\,(1+e^x)^{1-2}}{1-2}-\dfrac{3\,(1+e^x)^{1-3}}{1-3}\right]_a^0$ $=\lim\limits_{a\to-\infty}\left[\dfrac{3\,(1+e^0)^{-1}}{-1}-\dfrac{3\,(1+e^0)^{-2}}{-2}-\left(\dfrac{3\,(1+e^a)^{-1}}{-1}-\dfrac{3\,(1+e^a)^{-2}}{-2}\right)\right]$ $=\lim\limits_{a\to-\infty}\left[-1{,}5+0{,}375+3\,(1+e^a)^{-1}-1{,}5\,(1+e^a)^{-2}\right]$ $=0{,}375$		20	
e)	• f_2 ist symmetrisch zur y-Achse, wenn $f_2(x)=f_2(-x)$. Dazu führt man folgende Äquivalenzumformungen durch: $f_2(x)=f_2(-x)$ $\Leftrightarrow \dfrac{3\cdot e^x}{(1+e^x)^2}=\dfrac{3\cdot e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ $\Leftrightarrow \dfrac{3\cdot e^x}{(1+e^x)^2}=\dfrac{(e^x)^2\cdot 3\cdot e^{-x}}{(e^x)^2\cdot(1+e^{-x})^2}$			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3\cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{3\cdot e^x}{(e^x+1)^2} \quad \text{w.z.b.w.}$$

• f_1 ist symmetrisch zu (0 | 1,5), wenn $f_1(x) - 1{,}5 = -\left[f_1(-x) - 1{,}5 \right]$.

Dazu führt man folgende Äquivalenzumformungen durch:

$$f_1(x) - 1{,}5 = -\left[f_1(-x) - 1{,}5 \right]$$

$$\Leftrightarrow \quad f_1(x) = -f_1(-x) + 3$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3\cdot e^x}{1+e^x} = \frac{-3\cdot e^{-x}}{1+e^{-x}} + 3$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3\cdot e^x}{1+e^x} = \frac{-3\cdot e^{-x} + 3\cdot(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3\cdot e^x}{1+e^x} = \frac{3}{1+e^{-x}}$$

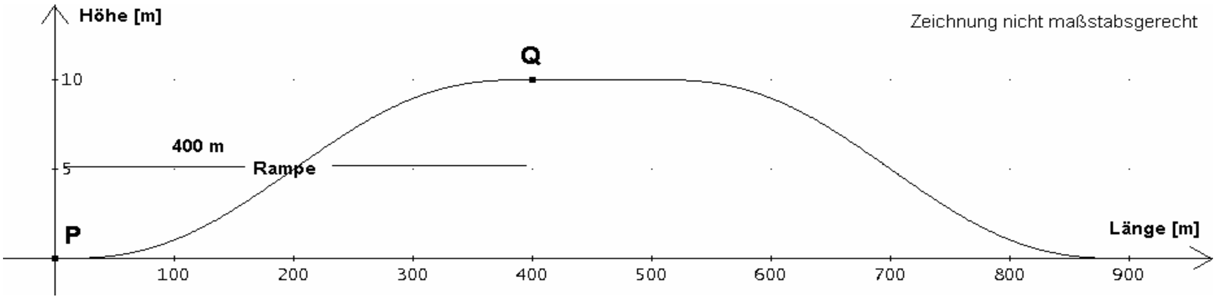
$$\Leftrightarrow \quad \frac{3\cdot e^x}{1+e^x} = \frac{3\cdot e^x}{e^x+1} \quad \text{w.z.b.w.}$$

</td><td></td><td>10</td><td>15</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>30</td><td>50</td><td>20</td></tr>
</table>

ANALYSIS 2

I.2 Überführung

Im flachen Friesland soll eine Bahnstrecke einen Kanal auf einer Brücke überqueren. Die Strecke auf der Brücke ist 100 m lang und verläuft ebenso horizontal wie die Strecken auf dem Boden. Die Strecke auf der Brücke liegt 10 m über dem Bodenniveau. Für den Übergang vom Boden auf die Brücke, die so genannte Rampe, haben die Bauplaner zunächst eine Rampenlänge *r* = 400 m in der Horizontalen vorgesehen. Die Steigungsstrecke links beginnt im Punkt *P* und endet im Punkt *Q*.



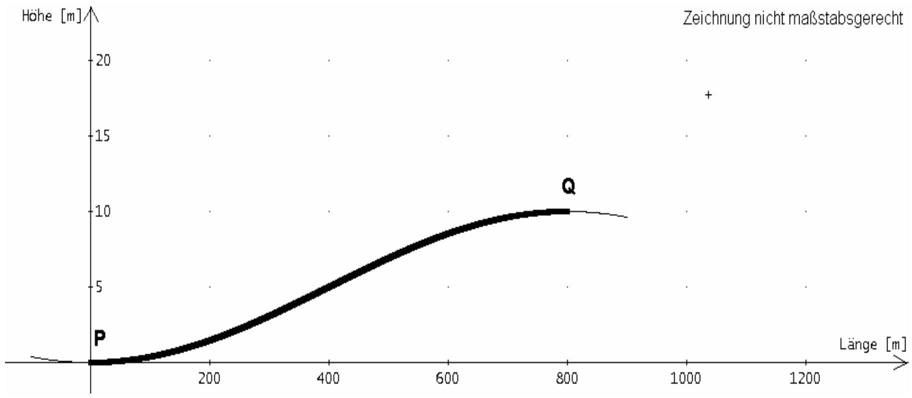
Ein Bahnexperte begutachtet die Planung und macht darauf aufmerksam, dass Eisenbahnstrecken eine maximale Steigung von 2,4 % aufweisen dürfen, damit die antreibenden Räder nicht rutschen.

a) Begründen Sie mit Argumenten aus der Anschauung, dass dieser Wert bei einer Rampenlänge von *r* = 400 m keinesfalls einzuhalten ist, unabhängig davon, wie die Rampentrasse geführt wird.

Die Rampenlänge *r* wird daraufhin in den weiteren Planungen auf **800 m** verlängert.

b) Ein Bauplaner vertritt die Idee, die Rampe darzustellen durch eine „getrimmte" Kosinusfunktion *k* vom Typ

$$k(x) = a \cdot \cos(b \cdot x) + c$$



- Begründen Sie, dass die gesuchte Darstellung durch die folgende Funktionsgleichung geliefert wird:

$$k(x) = -5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{800} \cdot x\right) + 5.$$

- Bestimmen Sie die maximale Steigung dieser Rampe und interpretieren Sie das Ergebnis.

Fortsetzung nächste Seite →

Wieder meldet der Eisenbahnexperte Bedenken an: Er behauptet, dass an den Übergangspunkten *P* und *Q* bei schneller Fahrt ein Ruck durch den Zug gehen würde, weil „Krümmungssprünge" vorlägen. Um das zu vermeiden, müssten deshalb die 1. und 2. Ableitung der aneinander stoßenden Trassen an den Übergangsstellen übereinstimmen.

c) Untersuchen Sie, weshalb bei dem Kosinus-Entwurf Krümmungssprünge auftreten.

d) Damit auch diese Bedenken des Eisenbahnexperten ausgeräumt werden können, soll nun die Rampe durch eine ganzrationale Funktion *h* dargestellt werden.

Um deren Koeffizienten handhabbar zu machen, verkürzen Sie den Maßstab in *x*-Richtung um den Faktor 800. Wählen Sie also jetzt für die Punkte *P* und *Q* die Koordinaten $\boldsymbol{P(0 \mid 0)}$ und $\boldsymbol{Q(1 \mid 10)}$. Berechnete Steigungen sind dann um den Faktor 800 zu groß, sie müssen deshalb für die <u>tatsächliche</u> Trasse durch 800 geteilt werden.

- Begründen Sie, dass die Funktion *h* mindestens den Grad 5 haben muss.
- Untersuchen Sie, welche der Koeffizienten von *h* Null sein müssen.
- Bestimmen Sie den Funktionsterm von *h*.

  (Zur Kontrolle: $h(x) = 60 \cdot x^5 - 150 \cdot x^4 + 100 \cdot x^3$)
- Bestimmen Sie die <u>tatsächliche</u> maximale Steigung dieser Rampe und interpretieren Sie das Ergebnis.

e) Der Eisenbahnexperte ist nun zufrieden, aber den sparsamen Planern fällt auf, dass man die Rampe noch verkürzen könnte, ohne dass sie zu steil würde. Erläutern Sie einen mathematischen Weg, den man (bei Beibehaltung einer ganzrationalen Funktion 5. Grades) gehen könnte, um die minimal mögliche Rampenlänge *r* zu finden. Die Rechnungen sollen nicht ausgeführt werden.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Die Verbindung von P nach Q als <u>Strecke</u> hat die Steigung

$$m = \frac{\Delta h}{\Delta l} = \frac{10}{400} = 2{,}5\% \,.$$

Der Anschauung entnimmt man, dass im Vergleich zur Strecke jede <u>gekrümmte</u> Rampenführung von P nach Q Stellen aufweisen muss, deren Steigung noch größer als 2,5 % ist. Der Maximalwert von 2,4 % auf der ganzen Rampenstrecke ist also keinesfalls einzuhalten.</td><td>5</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

- Die Amplitude beträgt die Hälfte von 10 m, also $|a| = 5$.
  Die Rampe beginnt mit dem Minimum, der Verlauf entspricht einer an der x-Achse gespiegelten Kosinusfunktion, also $a = -5$.
  Die Mittellinie ist um 5 m nach oben verschoben, also $c = 5$.
  Die halbe Periodenlänge beträgt 800 m, also muss in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{b} = \frac{800}{\pi}$ gestreckt werden.
  Man kann auch so argumentieren:
  Dem x-Wert $b \cdot 800$ entspricht π, also $b \cdot 800 = \pi \Leftrightarrow b = \frac{\pi}{800}$.
  Als Ergebnis erhalten wir: $k(x) = -5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{800} \cdot x\right) + 5.$
- Die Steigung wird durch die Ableitung von k dargestellt:

$$k'(x) = \frac{\pi}{160} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{800} \cdot x\right).$$

Das Steigungsmaximum liegt aus Symmetriegründen „in der Mitte“ der Rampe bei der Wendestelle von k:

$$k'(400) = \frac{\pi}{160} = 0{,}0196... \approx 2\% \,.$$

Dies ist genügend niedrig, die Strecke ist an keiner Stelle zu steil.

Man kann dieses Ergebnis natürlich auch mit Hilfe der 2. und 3. Ableitung bestätigen, das wird aber nicht erwartet.

$k''(x) = \frac{\pi^2}{128000} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{800} \cdot x\right) = 0$ *führt im betrachteten Bereich zu x = 400.*

$k'''(400) = -\frac{\pi^3}{102400000} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{800} \cdot 400\right) < 0$*, also liegt hier ein Maximum vor.*</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
c)	Für die geraden horizontalen Streckenabschnitte ist die erste und die zweite Ableitung jeweils die konstante Funktion mit dem Funktionswert Null. Die Kosinusfunktion hat an ihren Extremstellen auch Extremstellen in der zweiten Ableitung, die Werte der zweiten Ableitung sind dort ganz bestimmt nicht Null. Man kann auch konkret rechnen: $k''(x)=\frac{\pi^2}{128000}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{800}\cdot x\right)$ $k''(0)=\frac{\pi^2}{128000}\neq 0,\quad k''(800)=-\frac{\pi^2}{128000}\neq 0.$ Der Eisenbahnexperte hat also mit seinen Bedenken Recht in Bezug auf die 2. Ableitung.		10	
d)	• Die folgenden 6 Bedingungen sind zu beachten: Punkt *P*: $h(0)=0$; $h'(0)=0$; $h''(0)=0$ Punkt *Q*: $h(1)=10$; $h'(1)=0$; $h''(1)=0$. Das lässt sich nur mit einer ganzrationalen Funktion 5. Grades erreichen. • Ansatz: $h(x)=a\cdot x^5+b\cdot x^4+c\cdot x^3+d\cdot x^2+e\cdot x+f$. Aus den Bedingungen für den Punkt *P* folgt: $d=e=f=0$. • Es bleibt also: $h(x)=a\cdot x^5+b\cdot x^4+c\cdot x^3$ Aus den drei Bedingungen für *Q* erhält man das folgenden linearen Gleichungssystem für die Koeffizienten *a, b* und *c*: $a+b+c=10$ $5\cdot a+4\cdot b+3\cdot c=0$ $10\cdot a+6\cdot b+3\cdot c=0$ Dieses Gleichungssystem hat die Lösung: $a=60$; $b=-150$; $c=100$. Also gilt $h(x)=60\cdot x^5-150\cdot x^4+100\cdot x^3$. (*Das **Lösen** des LGS sollte bei der Bewertung nicht mehr als 15 Punkte umfassen. Die nicht erwartete maßstabsgerechte Funktionsgleichung lautet übrigens:* $\hat{h}(x)=h\left(\frac{x}{800}\right)=\frac{3}{1{,}6384\cdot 10^{13}}\cdot x^5-\frac{3}{8{,}192\cdot 10^{9}}\cdot x^4+\frac{1}{5{,}12\cdot 10^{6}}\cdot x^3$) • Die Steigungen der Trasse werden durch die Ableitung von *h* ausgedrückt: $h'(x)=300\cdot x^4-600\cdot x^3+300\cdot x^2$. Aus Symmetriegründen liegt das Maximum von h' (der Wendepunkt von *h*) in der Mitte der Rampe, also bei $x=\frac{1}{2}$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Man kann dieses Ergebnis natürlich auch mit Hilfe der 2. und 3. Ableitung bestätigen, das wird aber nicht erwartet: $$h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{75}{4}.$$ Indem wir die Maßstabsveränderung rückgängig machen, erhalten wir den tatsächlichen Maximalwert für die Steigung der Rampe $\frac{75}{4\cdot 800} \approx$ 2,34%. Dieser Wert ist noch zulässig.	10	25	
e)	Statt des konkreten Wertes von $r=1$ (in Wirklichkeit: $\hat{r}=800$*)* kann man eine Variable *r* (für die Rampenlänge) einführen. Dann argumentiert und rechnet man entweder genau wie in d) und erhält den Maximalwert für die Steigung als Funktion $max\, s(r)$ von *r*. Nun löst man die Gleichung: $$max\ s(r)=800\cdot 2{,}4\%\ .$$ Oder man kann auch direkt in das Gleichungssystem eine weitere Gleichung $h'\left(\frac{r}{2}\right)=800\cdot 0{,}024$ mit der weiteren Unbekannten *r* einführen und erhält dann die minimale Rampenlänge direkt als ein Element des Lösungsvektors. (*Zuatzinformation für Korrektoren: Beide Wege führen auf das Ergebnis* $r\approx 0{,}977$ bzw. $(\hat{r}\approx 781{,}25)$. *Die Rampe kann also nur unwesentlich um knapp 19 m verkürzt werden.*)			20
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

ANALYSIS 3

I.3 Funktionenschar von gebrochen rationalen Funktionen

Für jedes $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist eine Funktion f_k mit $f_k(x) = \dfrac{k \cdot x}{x^2 + k}$, $x \in D_{f_k}$, definiert.

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von f_k an und untersuchen Sie die Graphen von f_k auf

- Symmetrie
- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
- Asymptoten (Geben Sie jeweils an, von welcher Seite sich die Graphen an die Asymptoten anschmiegen.)
  Polstellen
- Extrem- und Wendepunkte.

Hinweis: Zeigen Sie dazu, dass $f_k'(x) = \dfrac{k(k - x^2)}{(x^2 + k)^2}$ *ist.*

b) Skizzieren Sie die Graphen von f_1 und f_{-1} für $-6 \le x \le 6$ in ein gemeinsames Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm.

c) In der Nähe des Koordinatenursprungs sind die beiden Graphen aus Teil b) schwer zu unterscheiden.

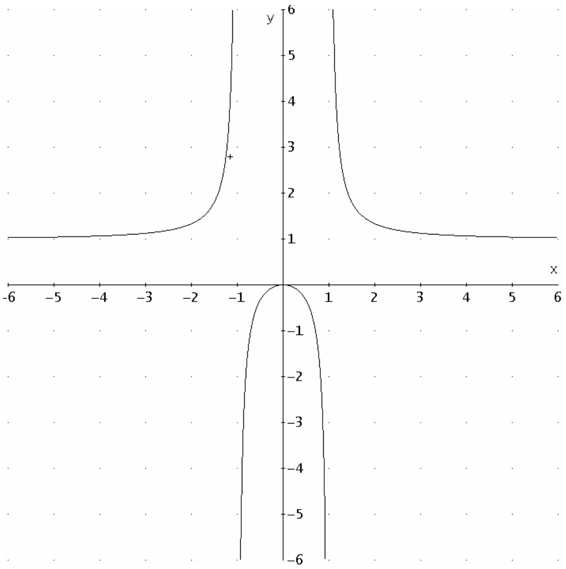
- Weisen Sie nach, dass die beiden Graphen nur einen gemeinsamen Punkt haben.
- Zeigen Sie, dass der Abstand zwischen den Funktionswerten im Intervall $I = [0 ; 0{,}5]$ für wachsendes x immer größer wird.

d) Begründen Sie für jeden der Graphen in der Anlage, warum er nicht Graph einer Funktion f_k sein kann.

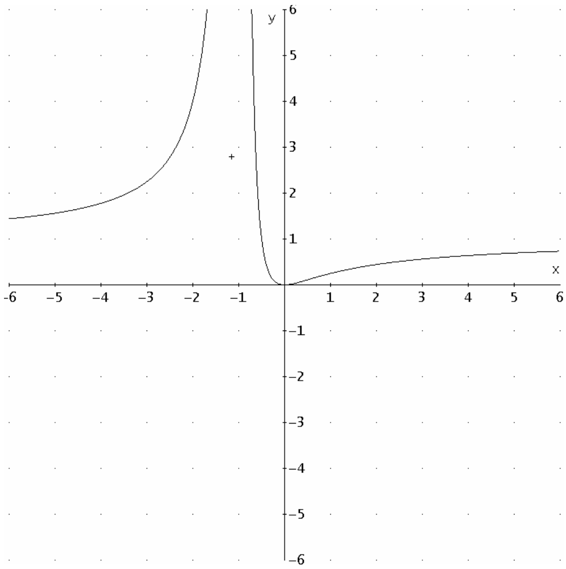
e) Der Graph von f_1 schließt mit der x-Achse über dem Intervall $[\,0; \infty\,[$ eine Fläche ein. Entscheiden Sie, ob der Flächeninhalt endlich oder unendlich ist.

Anlage zur Aufgabe „Funktionenschar von gebrochen rationalen Funktionen“, Teil d)

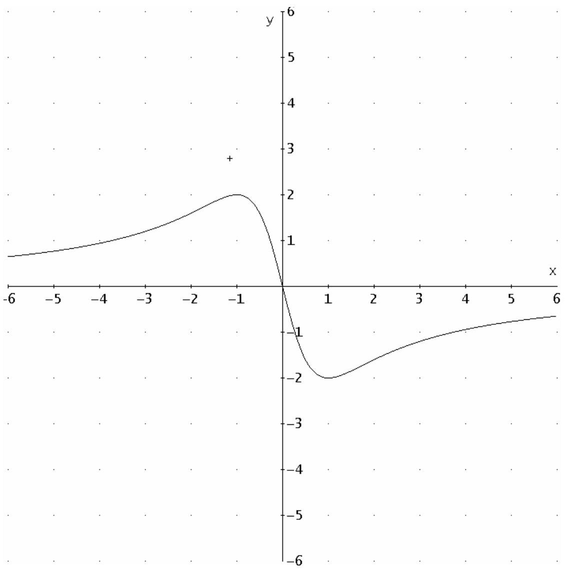
Graph 1



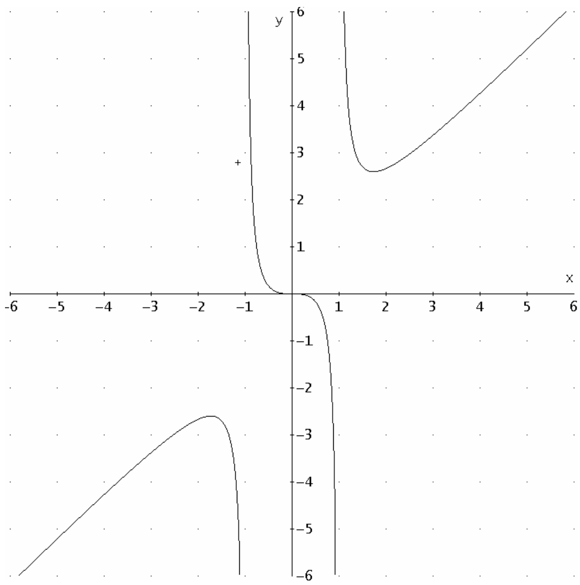
Graph 2



Graph 3



Graph 4



Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

Für $k > 0$ gilt: $D_{f_k} = \mathbb{R}$ **;** für $k < 0$ gilt: $D_{f_k} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \sqrt{-k}\, , -\sqrt{-k} \right\}$ **.**

<u>Symmetrie:</u>

Für jedes k ist der Graph symmetrisch zum Koordinatenursprung, denn es gilt:

$$f_k(-x) = \frac{-k \cdot x}{x^2 + k} = -f_k(x)\,.$$

<u>Schnittpunkte mit den Achsen:</u>

$f_k(x) = \dfrac{k \cdot x}{x^2 + k} = 0$, daraus folgt: $x = 0$.

$$f_k(0) = \frac{k \cdot x}{x^2 + k} = 0\,.$$

Für jedes k werden die Achsen nur im Ursprung geschnitten.

<u>Asymptoten:</u>

Da für jedes k gilt: $\lim\limits_{x \to \infty} f_k(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$**,** ist die x-Achse für jeden der Graphen eine Asymptote.

Für $k > 0$ schmiegen sich die Graphen für $x \to \infty$ von oben an die x-Achse an, für $x \to -\infty$ von unten.

Für $k < 0$ schmiegen sich die Graphen für $x \to \infty$ von unten an die x-Achse an, für $x \to -\infty$ von oben.

<u>Polstellen:</u>

Nur für $k < 0$ gibt es Pole, nämlich bei $-\sqrt{-k}$ und $\sqrt{-k}$.

<u>Ableitungen:</u>

$$f_k'(x) = \frac{k \cdot (x^2 + k) - k \cdot x \cdot 2x}{(x^2 + k)^2} = \frac{k \cdot x^2 + k^2 - 2k \cdot x^2}{(x^2 + k)^2} = \frac{k^2 - k \cdot x^2}{(x^2 + k)^2} = \frac{k(k - x^2)}{(x^2 + k)^2}$$

$$\begin{aligned} f_k''(x) &= \frac{-2k \cdot x \cdot (x^2 + k)^2 - k(k - x^2) \cdot 2(x^2 + k) \cdot 2x}{(x^2 + k)^4} \\ &= \frac{-2k \cdot x \cdot (x^2 + k)^1 - k(k - x^2) \cdot 2 \cdot 2x}{(x^2 + k)^3} \\ &= \frac{-2k \cdot x^3 - 2k^2 \cdot x - 4k^2 \cdot x + 4k \cdot x^3}{(x^2 + k)^3} \\ &= \frac{2k \cdot x^3 - 6k^2 \cdot x}{(x^2 + k)^3} = \frac{2kx(x^2 - 3k)}{(x^2 + k)^3} \end{aligned}$$

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

<u>Bestimmung der Extrema:</u>

$$f_k'(x) = 0 \iff \frac{k\,(k - x^2)}{(x^2 + k)^2} = 0 \iff k\,(k - x^2) = 0\,.$$

Nur für $k > 0$ gibt es Nullstellen von f_k' **:** $-\sqrt{k}$ und $\sqrt{k}$.

$$f_k''(\sqrt{k}) = \frac{2k \cdot \sqrt{k}\,(k - 3k)}{(k + k)^3} < 0 \text{ für } k > 0.$$

$$f_k''(-\sqrt{k}) = \frac{-2k \cdot \sqrt{k}\,(k - 3k)}{(k + k)^3} > 0 \text{ für } k > 0.$$

$$f_k(\sqrt{k}) = \frac{k \cdot \sqrt{k}}{k + k} = \frac{\sqrt{k}}{2} \quad \text{bzw.} \quad f_k(-\sqrt{k}) = \frac{-k \cdot \sqrt{k}}{k + k} = -\frac{\sqrt{k}}{2}\,.$$

Hochpunkte der Graphen: $(\sqrt{k} \mid \frac{\sqrt{k}}{2})$, Tiefpunkte der Graphen: $(-\sqrt{k} \mid -\frac{\sqrt{k}}{2})$.

Andere Argumentationen ohne Betrachtung der 2. Ableitung sind möglich (z.B. über die Nullstelle im Ursprung und das asymptotische Verhalten: für $k > 0$ schmiegen sich die Graphen für $x \to \infty$ von oben an die x-Achse an, für $x \to -\infty$ von unten).

<u>Bestimmung der Wendepunkte:</u>

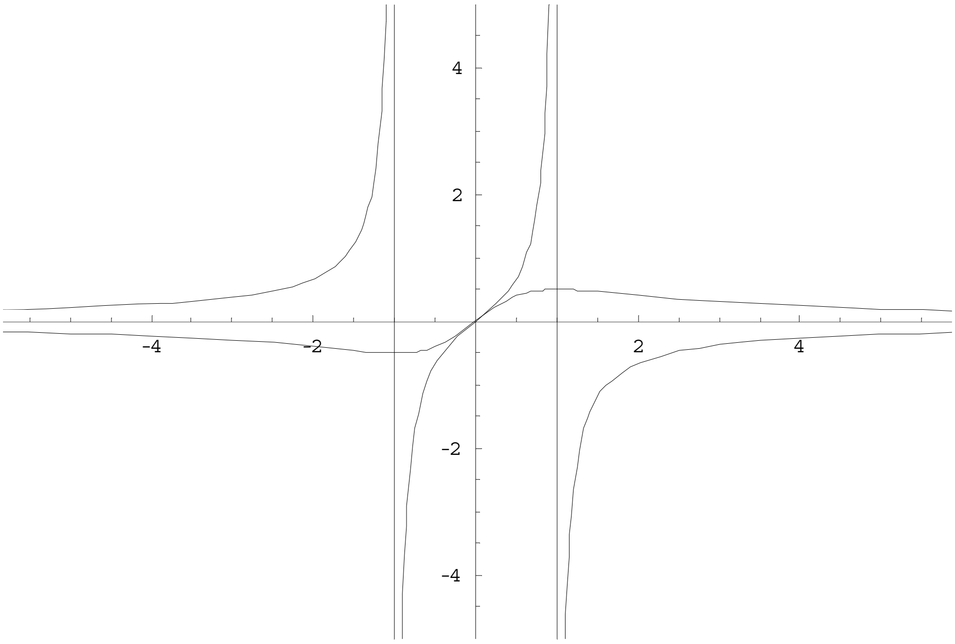
Aufgrund der Punktsymmetrie ist der Koordinatenursprung für jedes k ein Wendepunkt. Damit: $W_{k,1}(0 \mid 0)$.

Nur für $k > 0$ gibt es von Null verschiedene Nullstellen der zweiten Ableitung: $-\sqrt{3k}$ und $\sqrt{3k}$.

Aus dem asymptotischen Verhalten folgt auch ohne die dritte Ableitung, dass es sich hierbei um Wendestellen handeln muss. Also:

$$W_{k,2}(-\sqrt{3k} \mid -\frac{\sqrt{3k}}{4}),\ W_{k,3}(\sqrt{3k} \mid \frac{\sqrt{3k}}{4})\,.$$

		I	II	III
		15	30	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
b)		10		
c)	<u>Graphen haben nur einen gemeinsamen Punkt:</u> $f_1(x)=\dfrac{x}{x^2+1}\ ,\quad f_{-1}(x)=\dfrac{-x}{x^2-1}$ Zur Bestimmung gemeinsamer Punkte werden die Terme gleichgesetzt. $\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{-x}{x^2-1}\ \Leftrightarrow\ x(x^2-1)=-x(x^2+1)\ \Leftrightarrow\ x^3-x=-x^3-x\ \Leftrightarrow\ x=0\,.$ Die einzige Lösung der Gleichung ist $x = 0$. Also ist der Punkt (0 | 0), den allen Graphen gemeinsam haben, auch der einzige gemeinsame Punkt von Graphen von f_1 und f_{-1}. <u>Abstand d der Funktionswerte im Intervall $I = [0;0,5]$:</u> $d(x)=\dfrac{-x}{x^2-1}-\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{-x^3-x-x^3+x}{x^4-1}=\dfrac{-2x^3}{x^4-1}=\dfrac{2x^3}{1-x^4}$ Monoton wachsendes d für wachsendes $x\in[0;0,5]$ lässt sich bereits hier erkennen, denn der Zählerterm wächst streng monoton, während der Nennerterm streng monoton fällt. oder: Nachweis über die 1. Ableitung: $d'(x)=\dfrac{6x^2\cdot\left(1-x^4\right)-2x^3\cdot\left(-4x^3\right)}{\left(1-x^4\right)^2}=\dfrac{6x^2-6x^6+8x^6}{\left(1-x^4\right)^2}=\dfrac{6x^2+2x^6}{\left(1-x^4\right)^2}\,.$ Der Zählerterm ist größer oder gleich 0 für alle $x\in[0;0,5]$; der Nennerterm ist positiv. Damit gilt: $d'(x)\ge 0$ für alle $x\in I$. Daraus folgt, d ist im Intervall monoton wachsend.		10	10

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Die Graphen 1 und 2 scheiden aus, z.B. da alle Graphen von f_k punktsymmetrisch zum Ursprung sind. Da Graph 3 keine Pole besitzt, müsste der Parameter k positiv sein. Dann jedoch schmiegt sich der Graph im ersten Quadranten der x-Achse an. Graph 4 besitzt eine schräge Asymptote. Dann müsste der Grad des Zählerterms größer als der des Nennerterms sein.		5	5
e)	$F_k(x) = \frac{k}{2} \cdot \ln(x^2 + k)$ ist eine Stammfunktion von f_k. $\lim\limits_{b\to\infty} \int_0^b f_1(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty} \left[\frac{1}{2} \cdot \ln\left(x^2+1\right)\right]_0^b = \lim\limits_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2} \cdot \ln\left(b^2+1\right)\right)$ Für $b \to \infty$ gilt: $\frac{1}{2} \cdot \ln\left(b^2+1\right) \to \infty$. Also ist der Flächeninhalt unendlich.		5	10
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

LA/AG 1

II.1 Eckpyramide

Gegeben ist die Ebenenschar $\boldsymbol{E}_a$ mit $\boldsymbol{E}_a$: $(1+a)\cdot x_1 + a\cdot x_2 + (a-1)\cdot x_3 = a, \quad a\in\mathbb{R}$.

a) Beschreiben Sie die Lage von $\boldsymbol{E}_0$.

b) Zeigen Sie, dass die Gerade g mit $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\ k\in\mathbb{R}$ in jeder der Ebenen $\boldsymbol{E}_a$ liegt.

c) Mit S_1, S_2 und S_3 seien die Schnittpunkte der jeweiligen Ebene mit den Koordinatenachsen bezeichnet.

- Bestimmen Sie S_1, S_2 und S_3 in Abhängigkeit von a.
- Fassen Sie die Punkte S_1, S_2 und S_3 sowie den Koordinatenursprung O als Eckpunkte einer Pyramide auf, der so genannten Eckpyramide.

  Zeigen Sie, dass für das Volumen V_a einer Eckpyramide gilt: $V_a = \frac{1}{6}\cdot|\overline{OS_1}|\cdot|\overline{OS_2}|\cdot|\overline{OS_3}|$.
- Bestimmen Sie diejenigen positiven a, bei denen die zugehörige Eckpyramide das Volumen 1 aufweist.

d) Welche Bedingung müssen die Parameter m und a zweier Ebenen $\boldsymbol{E}_m$ und $\boldsymbol{E}_a$ dieser Schar erfüllen, damit diese beiden Ebenen senkrecht zueinander stehen? Begründen Sie.
Berechnen Sie für $a = 2$ den Parameter m der zu $\boldsymbol{E}_2$ senkrechten Ebene $\boldsymbol{E}_m$.

e) Bestimmen Sie die Ebenen aus der gegebenen Ebenenschar, die vom Ursprung O den Abstand 0,5 aufweisen.

f) Es wird das Volumen V_a der Eckpyramiden der Ebenenschar $\boldsymbol{E}_a$ betrachtet.
Zeigen Sie:

- Für $a\to\pm\infty$ geht V_a gegen den Wert $\frac{1}{6}$.
- V_a hat kein Maximum.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	$\boldsymbol{E_0}$: $x_1 - x_3 = 0$ Die Ebene enthält alle Punkte der Form (a | x_2 | a), $a \in \mathbb{R}$. Also enthält die Ebene die x_2-Achse (a = 0) und insbesondere auch den Nullpunkt. Ihr Schnitt mit der x_1-x_3-Ebene ist die Gerade $x_1 = x_3$, d. h. die Winkelhalbierende dieser Ebene.	10		
b)	Lösung z.B. über die Form von g mit dem allgemeinen Vektor: $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} k \\ 1-2k \\ k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$. Eingesetzt in die Koordinatenform von $\boldsymbol{E_a}$ ergibt dies die Gleichung $(1+a)\cdot k + a\cdot(1-2k) + (a-1)\cdot k = a$. Diese Gleichung vereinfacht sich zu der für alle a richtigen Beziehung $a = a$. Damit liegt g in jeder der Ebenen $\boldsymbol{E_a}$.	10	5	
c)	<u>Schnittpunkte</u> S_1 (x_{S_1} | 0 | 0). Einsetzen in die Koordinatenform von $\boldsymbol{E_a}$ ergibt $S_1\left(\frac{a}{a+1}\,\vert\,0\,\vert\,0\right)$, $a \neq -1$. Analog ergeben sich $S_2\left(0\,\vert\,1\,\vert\,0\right)$ und $S_3\left(0\,\vert\,0\,\vert\,\frac{a}{a-1}\right)$, $a \neq 1$. (Die Abschnitte ergeben sich selbstverständlich unmittelbar, wenn man die Koordinatenform in die Hesse-Form umwandelt: $\boldsymbol{E_a}$: $\frac{1}{\frac{a}{1+a}}\cdot x_1 + \frac{1}{1}\cdot x_2 + \frac{1}{\frac{a}{a-1}}\cdot x_3 = 1$.) Die Ebene $\boldsymbol{E_1}$ hat keinen Schnittpunkt mit der x_3-Achse, denn die x_3-Komponente ist gleich Null und das absolute Glied ungleich Null. Entsprechend schneidet die Ebene $\boldsymbol{E_{-1}}$ die x_1-Achse nicht. (Nach Aufgabenteil a) schneidet die Ebene $\boldsymbol{E}_0$ alle drei Achsen – im Nullpunkt.) <u>Volumen der Eckpyramide:</u> Das Volumen der von den Vektoren $\overrightarrow{OS_1}$, $\overrightarrow{OS_2}$ und $\overrightarrow{OS_3}$ aufgespannten dreiseitigen Pyramide ist $\frac{1}{6}$ des Volumens des von $\overrightarrow{OS_1}$, $\overrightarrow{OS_2}$ und $\overrightarrow{OS_3}$ ausgespannten Spats, denn die Grundfläche der dreiseitigen Pyramide ist halb so groß wie die Grundfläche des Spats und eine Pyramide hat das Volumen „$\frac{1}{3}$ mal Grundfläche mal Höhe“. Der Spat ist ein Quader mit den Seitenlängen $\vert\overrightarrow{OS_1}\vert$, $\vert\overrightarrow{OS_2}\vert$ und $\vert\overrightarrow{OS_3}\vert$, also berechnet sich das Spatvolumen als $\vert\overline{OS_1}\vert\cdot\vert\overline{OS_2}\vert\cdot\vert\overline{OS_3}\vert$. Beide Überlegungen zusammen ergeben die gesuchte Formel. (Hier sind natürlich auch Rechnungen möglich.)			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>
Eine andere Argumentation wäre die folgende:
Die Eckpyramide hat am Ursprung drei Flächen, die paarweise senkrecht aufeinander stoßen. Damit ist ihr kleinster Umhüllungsquader der Quader mit den drei Kantenlängen x_{S_1}, x_{S_2} und x_{S_3}. Dessen Volumen ist $V_Q = |x_{S_1} \cdot x_{S_2} \cdot x_{S_3}|$.
Wählt man eine dieser Flächen als rechteckige Umhüllung der Grundfläche der Eckpyramide aus, so hat die Grundfläche der Eckpyramide als rechtwinkliges Dreieck mit den entsprechenden Seitenlängen genau die Hälfte des Inhalts des Rechtecks.
Andererseits weist jede Pyramide als Volumen nur ein Drittel des Volumens des sie umhüllenden Prismas auf.
Da $x_{S_1} = \left|\overrightarrow{OS_1}\right|$ (und entsprechend für die anderen Punkte), ergibt sich das gewünschte Resultat.
<u>Bestimmung der a-Werte:</u>
Für die Eckpyramide der Ebenen E_a gilt (mit Einsetzen): $V_a = \frac{1}{6} \cdot \left|\frac{a}{a+1}\right| \cdot \left|\frac{a}{a-1}\right|$.
Je nachdem, ob a > 1 oder 0 < a < 1 gilt, ergeben sich die beiden Bestimmungsgleichungen für a:
$1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2}{a^2-1}$ oder $1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2}{1-a^2}$.
Daraus ergeben sich die beiden Gleichungen $6 - 6a^2 = a^2$ oder $6a^2 - 6 = a^2$.
Diese haben die positiven Lösungen $a_1 = \sqrt{\frac{6}{7}} \wedge a_2 = \sqrt{\frac{6}{5}}$.
</td><td>5</td><td>25</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>
Grundsätzlich gilt:
Zwei Ebenen stehen genau dann senkrecht zueinander, wenn ihre Normalenvektoren orthogonal zueinander sind.
Es gilt dabei $\overrightarrow{n_m} = \begin{pmatrix} 1+m \\ m \\ m-1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_a} = \begin{pmatrix} 1+a \\ a \\ a-1 \end{pmatrix}$.
Die Orthogonalität ergibt die Gleichung
$\overrightarrow{n_m} \cdot \overrightarrow{n_a} = 0 \Leftrightarrow (1+m)(1+a) + m \cdot a + (m-1)(a-1) = 0$.
Dies führt zu der Bedingung $m \cdot a = -\frac{2}{3}$.
Für a = 2 liefert Einsetzen die Lösung $m = -\frac{1}{3}$.
</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Aus der Tafel folgt für den Abstand: $dis_a = \left\|\left(\vec{0} - \vec{v}_0\right) \cdot \vec{n}_0\right\|$, wobei $\vec{v}_0$ ein beliebiger Punkt der Ebene ist und $\vec{n}_0$ ist der Normaleneinheitsvektor der Ebene. $dis_a = \left\|\vec{v}_0 \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right\| = \left\|\frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right\|$ $= \left\|\frac{a}{\sqrt{(1+a)^2 + a^2 + (a-1)^2}}\right\|$ (1) aufgrund der speziellen Koordinatengleichung $= \left\|\frac{a}{\sqrt{2+3a^2}}\right\|$ Zu lösen sind die beiden Gleichungen $\frac{a}{\sqrt{2+3a^2}} = 0{,}5$ und $\frac{a}{\sqrt{2+3a^2}} = -0{,}5$ Für die erste Gleichung folgt z.B.: $\frac{a}{\sqrt{2+3a^2}} = 0{,}5.$ Durch Quadrieren ergibt sich $\frac{a^2}{2+3a^2} = \frac{1}{4}$ und weiter $4a^2 = 2 + 3a^2$ $a^2 = 2,$ also a $= \sqrt{2}$ oder a $= -\sqrt{2}$. Durch Einsetzen erhält man, dass nur $a = \sqrt{2}$ Lösung der ersten Gleichung ist. Entsprechend erhält man die Lösung der zweiten Gleichung: $a = -\sqrt{2}$. *Hinweis: Schülerinnen und Schüler hätten auch gleich mit der Abstandsformel rechnen können.* Die Ebenen $\boldsymbol{E}_{\sqrt{2}}$ und $\boldsymbol{E}_{-\sqrt{2}}$ sind diejenigen, die vom Nullpunkt den Abstand 0,5 haben.		15	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>f)</td><td>Es gilt $V_a = \left|\frac{1}{6}\cdot\frac{a}{a+1}\cdot\frac{a}{a-1}\right| = \left|\frac{a^2}{6(a^2-1)}\right|$.
Für $a>1$ oder $a<-1$ gilt: $V_a = \frac{a^2}{6\cdot(a^2-1)}$.
Für diesen Bereich gilt also $V_a = V_{-a}$ und man kann sich auf die Betrachtung des Verhaltens der Funktion auf den Bereich $a>1$ beschränken, für das asymptotische Verhalten auf $x\to\infty$. Es ergibt sich $\lim\limits_{a\to\infty} V_a = \lim\limits_{a\to\infty}\left(\frac{a^2}{6(a^2-1)}\right) = \frac{1}{6}$.
Für a = 0 ist ersichtlich das Volumen gleich Null. Da das Volumen aber größer oder gleich Null sein muss, liegt hier ein Minimum vor.
Andererseits liegt bei a = 1 eine Polstelle vor. Da das Volumen immer positiv ist, ist gesichert, dass V_a für beide Richtungen der Annäherung an die Polstelle über alle Grenzen wächst.
Damit hat V_a kein Maximum.</td><td></td><td></td><td>15</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>60</td><td>15</td></tr>
</table>

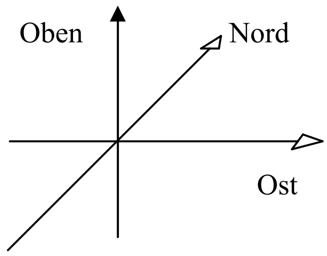
LA/AG 2

II.2 Meteorit

Zwei Beobachter *M* und *N* sehen die Leuchtspur eines Meteoriten, der in die Erdatmosphäre eintaucht. Diese Leuchtspur beginnt im Punkt *A* (Aufleuchten) und endet im Punkt *V* (Verlöschen).
Für die folgende Aufgabe benutzen Sie die folgenden Verabredungen bzw. Vereinfachungen:
Die beiden Beobachter werden als punktförmig angenommen; sie befinden sich auf der Erdoberfläche, die in dem betrachteten Bereich als Ebene angenommen wird.
M befindet sich im Koordinatenursprung des Koordinatensystems. *N* wohnt 4,5 km weiter westlich und 15 km weiter nördlich von *M*. Die Beobachter werden mit ihren Punkten im Koordinatensystem identifiziert. Die gesamte Bahn des Meteoriten im Beobachtungszeitraum ist als Gerade anzusehen.
Beide Beobachter können jeweils die Richtungsvektoren angeben, die ihre Sicht auf die beiden Punkte *A* und *V* beschreiben.

Die Koordinaten der Richtungsvektoren sind kartesisch mit den Koordinatenachsen in Ostrichtung, in Nordrichtung und senkrecht nach oben. Entgegen der üblichen Schreibweise wird hier, angepasst an die Navigation auf der Erde, die folgende Darstellung gewählt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ost \\ Nord \\ Oben \end{pmatrix}$$



Die Längeneinheit in allen drei Richtungen beträgt 1 km.

M sieht die beiden Punkte *A* und *V* unter den Richtungsvektoren $\overrightarrow{r_{M,A}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{r_{M,V}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) *M* weiß, dass Meteoriten in einer Höhe von 24 km aufleuchten. Bestimmen Sie aus diesen Angaben die Lage des Punktes *A*.

Begründen Sie, dass *M* aus seinen Daten allein nicht die Einschlagsstelle auf der Erde bestimmen kann.

Sollten Sie die Koordinaten des Punktes A nicht berechnen können, verwenden Sie im Weiteren A (–5 | 3 | 24).

b) Der Beobachter *N* konnte zwar wegen einiger Wolken nicht den Anfang der Leuchtspur des Meteoriten beobachten, aber ihr Ende. Für diesen Punkt *V* gibt er, von seiner Position aus betrachtet, den Richtungsvektor $\overrightarrow{r_{N,V}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ an.

- Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes *V*.
- Geben Sie die Gerade an, die die Bahn des Meteoriten beschreibt.
- Bestimmen Sie den Einschlagpunkt *E* des Meteoriten sowie den Winkel α, unter dem der Meteorit den Boden trifft.

Fortsetzung nächste Seite →

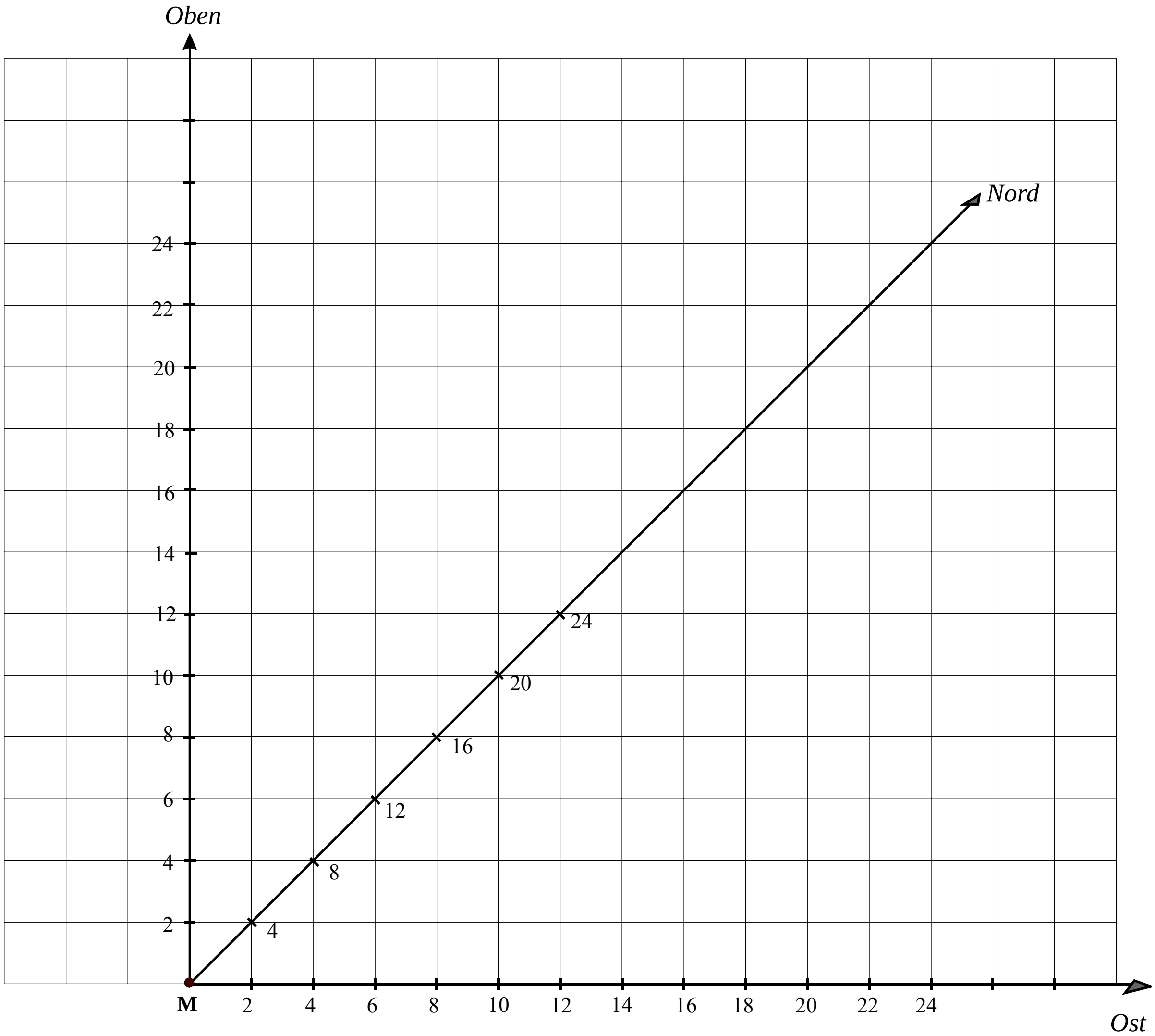
Sollten Sie die Koordinaten des Punktes V nicht berechnen können, verwenden Sie im Weiteren V (4 | 11 | 13).

c) Zeichnen Sie in das beigefügte Koordinatensystem die Punkte *M*, *N*, *A*, *V* und *E* sowie die Gerade, die die Bahn des Meteoriten beschreibt, zusammen mit dem Auftreffwinkel α ein.

d) Nehmen wir an, das Ende der Leuchtspur im Punkt *V* sei auch mit einem akustischen Ereignis (einem Knall) verbunden gewesen.
Bestimmen Sie den Zeitunterschied zwischen dem Eintreffen des Knalls in *M* und in *N*.

Hinweis: Sie können bei der Lösung dieser Teilaufgabe davon ausgehen, dass der Schall in 3 Sekunden 1 km zurücklegt.

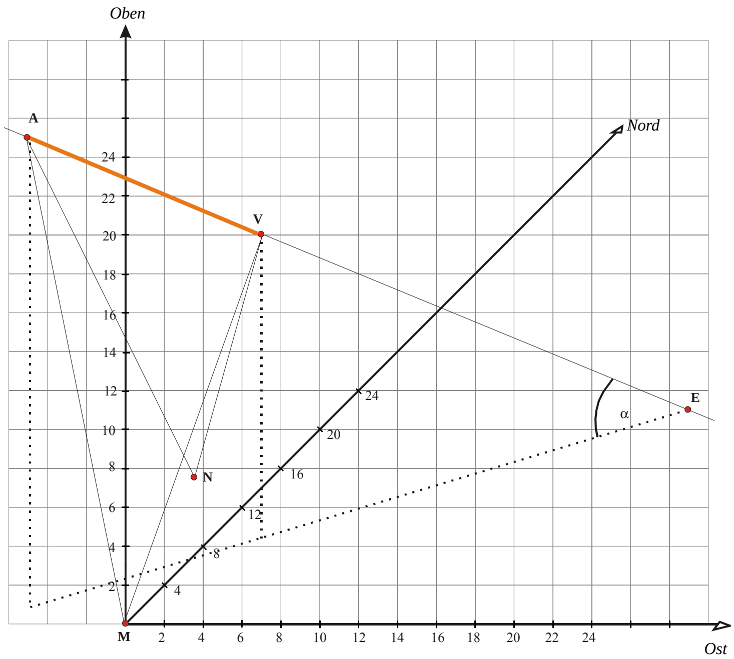
Anlage zur Aufgabe „Meteorit“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	A liegt auf der Geraden, die die Beobachtungsrichtung von M zu A angibt: $$b_{M,A}: \vec{x} = k \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} \\ 1 \end{pmatrix},\ k \in \mathbb{R}^+.$$ Da die x_3-Koordinate 24 sein soll, muss $k = 24$ gelten, und damit ist A der Punkt $A(-6\|2\|24)$. Die beiden Vektoren der Beobachtungsrichtungen von M spannen mit M zusammen eine Nullpunktsebene auf, in der die Bahn des Meteoriten liegt. Diese Ebene hat mit der Grundebene eine Gerade als Schnitt. Alles, was M also bisher feststellen kann, ist, dass der Einschlagspunkt auf dieser Geraden liegt.	15		
b)	V liegt im Schnittpunkt zweier Geraden, die von den Beobachtern M und N zu V gehen: $$b_{M,V}: \vec{x} = k \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix},\ k \in \mathbb{R}^+, \text{und } b_{N,V}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4,5 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix},\ l \in \mathbb{R}^+$$ Durch Gleichsetzen erhält man das Gleichungssystems $k \cdot \frac{1}{5} = -4,5 + l \cdot \frac{1}{2}$ $k \cdot \frac{2}{3} = 15 - l \cdot \frac{1}{3}$ $k \cdot 1 = 0 + l \cdot 1$ Aus der letzten Zeile folgt sofort $k = l$. Damit erhält man mit der zweiten Zeile: $k = l = 15$ und daraus folgt durch Einsetzen, dass V die Koordinaten (3 | 10 | 15) hat. Die Gerade, auf der die Bahn des Meteoriten liegt, ist durch die Punkte A und V eindeutig festgelegt und ergibt sich zu $$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix},\ k \in \mathbb{R}.$$ Der Einschlagspunkt E des Meteoriten ist der Spurpunkt der Geraden g in der x_1-x_2-Ebene, d. h. $x_3 = 0$. Daraus ergibt sich aus der oben gegebenen Darstellung von g: $k = \frac{5}{3}$ und damit erhält man durch Einsetzen die Koordinaten von E als $(18 \| \frac{70}{3} \| 0)$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Der Winkel, mit dem der Meteorit in den Boden trifft, lässt sich z.B. als Komplementwinkel der Zenitrichtung zur Richtung der Geraden g bestimmen. Bei diesem Ansatz ist die Richtung von g „nach oben" zu verwenden, also $\vec{r}_g = \begin{pmatrix} -9 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}$: $$\alpha = 90° - \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix} -9 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} -9 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}\right\| \cdot \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|}\right)$$ Damit ist $a \approx 36{,}77°$. Sollte der angegebene Ersatzpunkt A und der korrekte Punkt V verwendet werden, so ergeben sich: $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$, $E\left(\frac{49}{3} \mid \frac{65}{3} \mid 0\right)$ und $a \approx 40{,}25°$. Sollten für A und V die Ersatzpunkte verwendet werden, so ergeben sich: $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$, $E\left(\frac{161}{11} \mid \frac{225}{11} \mid 0\right)$ und $a \approx 42{,}41°$.	10	35	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
c)			20	
d)	Benötigt werden die Längen der Strecken $\overline{MV}$ und $\overline{NV}$: $\lvert\overline{MV}\rvert = \sqrt{334} \approx 18{,}276$; $\lvert\overline{NV}\rvert = \sqrt{306{,}25} = 17{,}5$ Die Wegdifferenz ist damit 0,776 km. Die Zeitdifferenz beträgt mit der angegebenen Schallgeschwindigkeit $\Delta t \approx 2{,}33$s. Sollte der Ersatzwert für V verwendet werden, so ergibt sich entsprechend die Wegdifferenz zu 1,45 und damit die Zeitdifferenz zu $\Delta t \approx 4{,}35$ s.		5	15
	Insgesamt 100 BWE	25	60	15

Stochastik 1

III.1 Blutspenden

Jeder Mensch hat Blut einer bestimmten Blutgruppe. Die folgende Tabelle zeigt die Häufigkeit des Auftretens von drei Blutgruppen in einer Bevölkerung:

Blutgruppe	AB rh–	B Rh+	A Rh+
Anteil	$\frac{1}{100}$	$\frac{11}{100}$	$\frac{1}{3}$

a) Es werde eine feste Anzahl von zufällig herausgegriffenen Blutspendern betrachtet.

- Unter welchen Umständen ist es sinnvoll, die Anzahl X der Personen unter den Blutspendern, die eine bestimmte Blutgruppe haben, als binomialverteilt anzunehmen?
- Beschreiben Sie eine Situation, in der die Voraussetzungen einer Binomialverteilung nicht erfüllt sind.

Im Folgenden soll angenommen werden, dass die in a) genannten Zufallsgrößen X tatsächlich binomialverteilt ist.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter

- 100 Blutspendern genau 11 Blutspender mit der Blutgruppe B Rh+ sind,
- 100 Blutspendern höchstens einer mit der Blutgruppe AB rh– ist,
- 50 Blutspendern mindestens 15 Blutspender mit der Blutgruppe A Rh+ sind,
- 2500 Blutspendern mindestens 800 Blutspender und höchstens 900 Blutspender mit der Blutgruppe A Rh+ sind.

c) Berechnen Sie, wie viele Spender man mindestens benötigt, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens einen Spender mit der Blutgruppe AB rh– zu finden.

Man kann davon ausgehen, dass in Deutschland ein Anteil von 1 ‰ unter den möglichen Blutspendern mit Präcortal-Retroviren infiziert ist.
Jede Blutspende wird auf die Präcortal-Retroviren getestet. Der dafür verwendete Test erkennt eine vorhandene Infektion mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 %. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 % zeigt der Test eine Infektion auch bei nicht infiziertem Blut an.

d) Blutspender werden nach der Spende üblicherweise über den Ausgang des Tests informiert.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem zufällig ausgewählten Spender das Testergebnis fehlerhaft ist.

e) Bei einer Person weist der Test auf eine Infektion hin. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person dennoch nicht infiziert ist. Interpretieren Sie diesen Wert.

f) Die Testentwickler wollen den Test verbessern im Hinblick auf das erstaunliche Resultat von e).
Da bisher der Test bei 2 % der nicht infizierten Personen dennoch auf eine Infektion hinweist, versuchen sie, diesen Prozentsatz zu senken.
Ermitteln Sie den Wert, auf den er gesenkt werden müsste, damit die in e) bestimmte Wahrscheinlichkeit immerhin bei 50 % liegt.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Interessiert man sich nur für eine der Blutgruppen und ob ein Mensch diese Blutgruppe hat oder nicht (z. B. bei einer Bluttransfusion), so liegt ein Bernoulli-Experiment vor. Geht man zudem von einer großen Grundgesamtheit aus und wenig Personen, die zu einem Blutspendetermin erscheinen, kann die Tatsache, dass „nicht zurückgelegt wird“ (dass niemand mehrfach nacheinander Blut spenden darf), vernachlässigt werden. Bestehen zwischen den Blutgruppen der Spender keine Abhängigkeiten, so sind alle Voraussetzungen für eine Bernoulli-Kette erfüllt, *X* ist binomialverteilt. Die Blutgruppe eines Menschen ist durch die Blutgruppen seiner Vorfahren bestimmt. Kommen Familienangehörige gemeinsam zum Blutspenden, so liegt keine Unabhängigkeit vor, also auch keine Binomialverteilung.		15	
b)	Die Wahrscheinlichkeit für genau *k* Treffer in einer Bernoulli-Kette der Länge *n* beträgt: $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ $n = 100,\ \ p = 0{,}11$: $P(X=11)=\binom{100}{11}\cdot 0{,}11^{11}\cdot 0{,}89^{89}\approx 0{,}127$. $n = 100,\ \ p = 0{,}01$: $P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)=0{,}99^{100}+100\cdot 0{,}01\cdot 0{,}99^{99}\approx 0{,}736$. $n = 50,\ \ p=\frac{1}{3}$. Hierfür liegen Tabellen mit den kumulierten Werten vor: $P(X\ge 15)=1-P(X\le 14)\approx 1-0{,}2612\approx 0{,}739$. $n = 2500,\ \ p=\frac{1}{3}$: Da $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}=\sqrt{2500\cdot 0{,}\overline{3}\cdot 0{,}\overline{6}}=\sqrt{555{,}\overline{5}}>3$, kann die Binomialverteilung durch die Normalverteilung approximiert und die integrale Näherungsformel angewendet werden. $P(800\le X\le 900)\approx\Phi\left(\frac{900{,}5-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{799{,}5-\mu}{\sigma}\right)$ $=\Phi\left(\frac{900{,}5-833{,}\overline{3}}{\sqrt{555{,}\overline{5}}}\right)-\Phi\left(\frac{799{,}5-833{,}\overline{3}}{\sqrt{555{,}\overline{5}}}\right)$ $\approx\Phi(2{,}85)-\Phi(-1{,}44)=\Phi(2{,}85)-(1-\Phi(1{,}44))\approx 0{,}9978-0{,}0749\approx 0{,}923$. *In einigen Büchern wie auch in der genehmigten Tafel wird die Formel von Moivre-Laplace ohne die Korrektur mit 0,5 angegeben. Entsprechende Rechnungen sind natürlich auch als richtig anzusehen.*	15	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	Aus der Überlegung, dass „kein Spender“ das Gegenereignis von „mindestens ein Spender“ ist, ergibt sich der Ansatz: Gesucht ist das kleinste *n*, so dass gilt: $1-0{,}99^n > 0{,}99$. Aufgelöst nach *n* erhält man: $n > \frac{\lg 0{,}01}{\lg 0{,}99}$ und somit $n = 459$.		10	
d)	Es bezeichne - *K* das Ereignis, dass die betreffende Person infiziert ist, - P_0 das Ereignis, dass der Test bei der betreffenden Person eine Infektion anzeigt. Gegeben sind: - $P(K) = 0{,}001$ (a-priori-Wahrscheinlichkeit) - $P(P_0 / K) = 0{,}99$ - $P(P_0 / \overline{K}) = 0{,}02$ Das Testergebnis ist fehlerhaft, wenn eine vorhandene Infektion nicht angezeigt wird oder wenn eine Infektion angezeigt wird, obwohl das Blut nicht infiziert ist. Mit Hilfe eines Baumdiagramms oder durch folgende Rechnung erhält man: $P(F) = P(\overline{P_0} \cap K) + P(P_0 \cap \overline{K}) = P(K)\cdot P(\overline{P_0}/K) + P(\overline{K})\cdot P(P_0/\overline{K})$ $= 0{,}001\cdot 0{,}01 + 0{,}999\cdot 0{,}02 \approx 0{,}020$ Nur in ca. 2 % aller Fälle ist das Testergebnis fehlerhaft.	10	10	
e)	Gesucht ist $P(\overline{K}/P_0) = \frac{P(\overline{K})\cdot P(P_0/\overline{K})\cdot}{P(P_0)}$. Für den Nenner gilt: $P(P_0) = P(\overline{K})\cdot P(P_0/\overline{K}) + P(K)\cdot P(P_0/K) = 0{,}999\cdot 0{,}02 + 0{,}001\cdot 0{,}99 = 0{,}02097$ $P(\overline{K}/P_0) = \frac{0{,}999\cdot 0{,}02}{0{,}02097} \approx 0{,}953$ *Dieses Ergebnis erscheint auf den ersten Blick sehr erstaunlich: trotz eines positiven Testergebnisses ist für eine Person die Wahrscheinlichkeit, dass sie nicht infiziert ist, noch über 95%. Das liegt daran, dass der Anteil der nicht mit diesen Viren infizierten Personen in der Bevölkerung so groß ist, dass 2 % von dieser Personengruppe der nicht Infizierten bei weitem mehr sind als der Anteil von 99 % der richtig diagnostizierten Kranken.*		10	5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
f)	Für diesen Wert *x* müsste nach e) gelten: $$\frac{0{,}999\cdot x}{0{,}999\cdot x+0{,}001\cdot 0{,}99}=0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}999x=0{,}000495+0{,}4995x$$ $$\Leftrightarrow 0{,}4995x=0{,}000495$$ $$\Leftrightarrow x\approx 9{,}91\cdot 10^{-4}$$ Der Wert müsste noch unter 1 ‰ liegen.			15
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

Stochastik 2

III.2 Kugelschreiberproduktion

Eine Firma stellt Kugelschreiber her, die die Abnehmer als Werbegeschenke für ihre Kunden nutzen. Bei der Produktion treten zwei voneinander unabhängige Fehler auf: defekte Mechanik (3 %) und defekte Mine (2 %).

a) Ein Kugelschreiber wird zufällig der laufenden Produktion entnommen.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Kugelschreiber sowohl eine defekte Mechanik als auch eine defekte Mine hat.
- Zeigen Sie, dass der Kugelschreiber mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95 % fehlerfrei ist.
- Ein Qualitätsprüfer prüft zehn zufällig der Produktion entnommene Kugelschreiber. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Kugelschreiber fehlerhaft ist.
- Aus langer beruflicher Erfahrung meint der Qualitätsprüfer, dass er mindestens 100 Kugelschreiber prüfen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % auch mindestens einen defekten Kugelschreiber zu finden.
  Beurteilen Sie die Aussage des Qualitätsprüfers.

b) Die Kugelschreiber werden zu je 50 Stück in Schachteln verpackt.

- Bestimmen Sie die durchschnittliche Anzahl defekter Kugelschreiber in einer Schachtel.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Durchschnittszahl nicht überschritten wird.

An einen Abnehmer liefert die Herstellerfirma Sendungen zu je 20 Schachteln.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Sendung genau 50 defekte Kugelschreiber enthält.
- Interpretieren Sie Ihr Ergebnis unter Berücksichtigung der Bemerkung eines „stochastischen Laien“, dass die berechnete Wahrscheinlichkeit ihm sehr niedrig vorkommt (unter 10 %).

c) Die Herstellungskosten eines Kugelschreibers betragen 0,30 €. Der Herstellerbetrieb strebt einen Reingewinn von 10 % an. Die Abgabe der Kugelschreiber erfolgt für 0,40 €. Allerdings wird der Reingewinn dadurch verringert, dass sich der Betrieb den Abnehmern gegenüber verpflichtet hat, defekte Kugelschreiber zurück zu nehmen und durch extra geprüfte zu ersetzen. Pro Ersatz entsteht 1 € an zusätzlichen Kosten.
Beurteilen Sie, ob unter diesen Bedingungen der angestrebte Gewinn voraussichtlich erwirtschaftet werden kann.

d) Ein Großabnehmer dieses Herstellerbetriebes erhält ein Angebot eines Konkurrenten. Dieser beziffert den Anteil fehlerfreier Kugelschreiber in seiner Produktion auf mindestens 98 %. Da es sehr ärgerlich ist, defekte Werbegeschenke zu verteilen, beschließt der Großabnehmer mit einem Signifikanztest auf dem 5% Niveau, das Angebot des Konkurrenten zu prüfen, indem eine Probelieferung von 50 Kugelschreibern auf Fehlerfreiheit untersucht wird. Bei der Frage, wie das Ergebnis nach Durchführung des Tests auszuwerten sei, kommt es zu einem Streit zwischen zwei Mitgliedern der Geschäftsleitung:

- A hat hohes Vertrauen in das Angebot des Konkurrenten und meint, man solle es nur ablehnen, wenn signifikant deutlich wird, dass das Versprechen des Konkurrenten nicht stimmt.
- B hält den Konkurrenten für unsolide und schlägt vor, das Angebot nur anzunehmen, wenn signifikant deutlich wird, dass der Konkurrent wirklich besser ist als die alte Lieferfirma.

Beurteilen Sie, bei welchen Prüfergebnissen A und bei welchen Prüfergebnissen B den Hersteller wechseln würde.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	• <u>Ereignis *A*: Sowohl die Mechanik als auch die Mine sind defekt.</u> Es bezeichne: *K*: defekte Mechanik *E*: defekte Mine Nach Voraussetzung gilt: $P(K) = 0{,}03$, $P(E) = 0{,}02$ Unmittelbar aus der Definition der Unabhängigkeit oder mit Hilfe eines Baumdiagramms folgt: $P(A) = P(K \cap E) = P(K) \cdot P(E) = 0{,}0006 = 0{,}06\%$. • <u>Ereignis *B*: Der Kugelschreiber ist fehlerfrei.</u> $P(B) = P(\overline{K} \cap \overline{E}) = P(\overline{K}) \cdot P(\overline{E}) = 0{,}97 \cdot 0{,}98 = 0{,}9506 \approx 95\%$. • <u>Mindestens ein Kugelschreiber ist defekt:</u> Es beschreibe *X* die Anzahl der fehlerhaften Kugelschreiber. Die Prüfung von *n* Kugelschreibern kann als Bernoulli-Kette der Länge *n* angesehen werden. Es handelt sich offensichtlich um eine Massenproduktion, die Fehler treten nach Aufgabenstellung unabhängig voneinander auf, so dass von einer konstanten Trefferwahrscheinlichkeit von $p = 0{,}05$ ausgegangen werden kann. Die Zufallsvariable *X* ist demnach binomialverteilt. Hier gilt: $n = 10$, $p = 0{,}05$. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{10} = 1 - 0{,}5987 \approx 0{,}4013 \approx 40{,}1\%$. *Das Ergebnis kann auch mithilfe der Tafel bestimmt werden.* Ist $n = 10$, so ist in der Stichprobe mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 40% mindestens ein fehlerhafter Kugelschreiber enthalten. • <u>Im Folgenden ist *n* zu bestimmen.</u> Es soll gelten: $P(X \geq 1) \geq 0{,}99$. Aus $P(X \geq 1) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}95^n \leq 0{,}01 \Leftrightarrow n \geq \frac{-2}{\lg 0{,}95}$ folgt: $n \geq 90$ Auch mit systematischem Probieren lässt sich *n* aus der Bedingung $0{,}95^n \leq 0{,}01$ ermitteln. Auch mit einem Gegenbeispiel für *n* mit $90 \leq n < 100$ ist die Aussage des Qualitätsprüfers widerlegt.	10	20	
b)	• <u>Erwartungswert</u> $n = 50$ und $p = 0{,}05$. Da *X* binomialverteilt ist, gilt: $E(X) = n \cdot p = 2{,}5$ Pro Schachtel sind also im Durchschnitt 2,5 Kugelschreiber defekt.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	• Bestimmt werden soll $P(Z \le 2)$: Entweder berechnet man die Einzelwahrscheinlichkeiten mit der Formel $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ und erhält $P(X \le 2)=0{,}95^{50}+\binom{50}{1}\cdot 0{,}05^1\cdot 0{,}95^{49}+\binom{50}{2}\cdot 0{,}05^2\cdot 0{,}95^{48}\approx 0{,}5405\approx 54{,}1\%$ oder man bedient sich der Formelsammlung, die eine Tafel für n = 50 und p = 0,05 enthält, und liest den Wert 0,5405 ab. • Ereignis G: Sendung enthält genau 50 defekte Kugelschreiber $n = 1000,\ p = 0{,}05$. Es gilt: $P(G)=P(X=50)=\binom{1000}{50}0{,}05^{50}\cdot 0{,}95^{950}\approx 0{,}058$. Mit den meisten Taschenrechnern kann man diesen Wert mit dieser Formel auf diesem Wege nicht berechnen, aber man kann die Binomial- durch die Poisson-Verteilung approximieren, da n sehr groß und p klein ist. $P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\left(1-p\right)^{n-k}\approx\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$. $P(G)\approx\frac{\mu^{50}}{50!}e^{-\mu}=\frac{50^{50}}{50!}e^{-50}\approx 0{,}06$. • Der Erwartungswert der Anzahl defekter Kugelschreiber in 20 Schachteln mit je 50 Kugelschreibern beträgt zwar $n\cdot p=1000\cdot 0{,}05=50$, aber es ist dennoch sehr unwahrscheinlich, diesen **genau** zu treffen. (Andererseits ist es sehr wahrscheinlich, in die „Nähe“ zu kommen, z.B. in eine 2σ-Umgebung.)	5	15	10
c)	Die Zufallsvariable Y beschreibe die Kosten, die pro Kugelschreiber auftreten. Dann gilt: $E(Y)=0{,}30€\cdot 0{,}95+1{,}30€\cdot 0{,}05=0{,}35€$ Bei einem Preis von 0,40 € ist also ein Gewinn von 0,05 € pro Kugelschreiber zu erwarten. Dieser beträgt dann $\frac{1}{7}\approx 14{,}3\%$ der zu erwartenden Kosten. Der Herstellerbetrieb kann also sein Planungsziel erreichen.	10	5	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>
In beiden Fällen handelt es sich um einen einseitigen Hypothesentest über eine Binomialverteilung mit $n = 50$.
A vertraut dem Angebot des Konkurrenten und verwirft die Nullhypothese $H_A : p \geq 0{,}98$ erst dann, wenn das Ergebnis der Stichprobe so klein ist, dass es im Ablehnungsbereich von H_A liegt.
Hierbei ist $\mu = n \cdot p = 49$, $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{0{,}98} < 3$
Hier ist also die Voraussetzung für die Approximation der Binomial- durch die Normalverteilung nicht erfüllt. Es muss mit dem Tafelwerk gearbeitet werden, das sowohl für $p = 0{,}02$ als auch für $p = 0{,}05$ vorliegt.
Mit Hilfe der Tafel ergibt sich unter der Annahme $p = 0{,}98$ für die Anzahl Z der fehlerfreien Kugelschreiber:
$P(Z \leq 46) \approx 1{,}8\,\%$, $P(Z \leq 47) \approx 7{,}8\,\%$
A wird also erst dann beim alten Hersteller bleiben wollen, wenn weniger als 47 fehlerfreie Kugelschreiber in der Lieferung sind.

B misstraut dem Konkurrenten und ist erst dann bereit, die Lieferfirma zu wechseln, wenn das Ergebnis der Stichprobe auf eine deutlich bessere Qualität hinweist.
Seine Nullhypothese ist, dass die Qualität keineswegs besser als die des alten Lieferanten ist: $H_B : p \leq 0{,}95$.
Von dieser Meinung weicht er erst ab, wenn die Stichprobe ungewöhnlich gut ausfällt.
Unter der Annahme $p = 0{,}95$ liest man aus der Tafel ab:
$P(Z = 50) = 1 - P(Z \leq 49) \approx 7{,}7\,\%$.
Das heißt: selbst wenn B H_B erst dann ablehnt, wenn alle Kugelschreiber fehlerfrei sind, ist die Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art immer noch über 5 % , d.h. B wird durch kein mögliches Testergebnis davon abzubringen sein, den alten Lieferanten beizubehalten. (Um hier überhaupt zu signifikanten Ergebnissen zu kommen, müsste n erhöht werden, der Fehler 2. Art beträgt so übrigens 100 %).
</td><td></td><td>10</td><td>15</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>50</td><td>25</td></tr>
</table>