ANALYSIS 1

I.1 Kaffeerösterei

Die Gesamtkosten einer Kaffeerösterei hängen von der produzierten Kaffeemenge x ab und werden durch die Gesamtkostenfunktion K beschrieben.
Die Entwicklung der Gesamtkosten $K(x)$ ist im Anhang grafisch dargestellt.

a) Nehmen Sie an, dass die Kostenfunktion K eine ganzrationale Funktion ist. Geben Sie anhand der Grafik an, warum die Kostenfunktion K mindestens vom Grad 3 sein muss.

Die Funktion K mit $K(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}55x^2 + 11{,}58x + 25$ beschreibt die dargestellte Kostenentwicklung in guter Näherung.

b) Berechnen Sie den Wendepunkt von K.
Begründen Sie, warum in der Nähe der Wendestelle eine Produktionserhöhung sinnvoll ist.

Der Erlös ergibt sich aus dem Produkt „Menge mal Preis" und wird mit E bezeichnet. Der Gewinn G wird in Abhängigkeit von der abgesetzten Menge x betrachtet und lässt sich als Differenz von Erlös und Kosten berechnen, also $G(x) = E(x) - K(x)$.

c) Das Unternehmen legt einen Preis von 10 Geldeinheiten (GE) pro Mengeneinheit (ME) fest.

Geben Sie die Funktionsgleichung der entsprechenden Erlösfunktion E an.

Zeigen Sie, dass für die Gleichung der Gewinnfunktion G gilt:
$G(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}55x^2 - 1{,}58x - 25$.

Untersuchen Sie, bei welcher Produktionsmenge maximaler Gewinn erwirtschaftet wird.

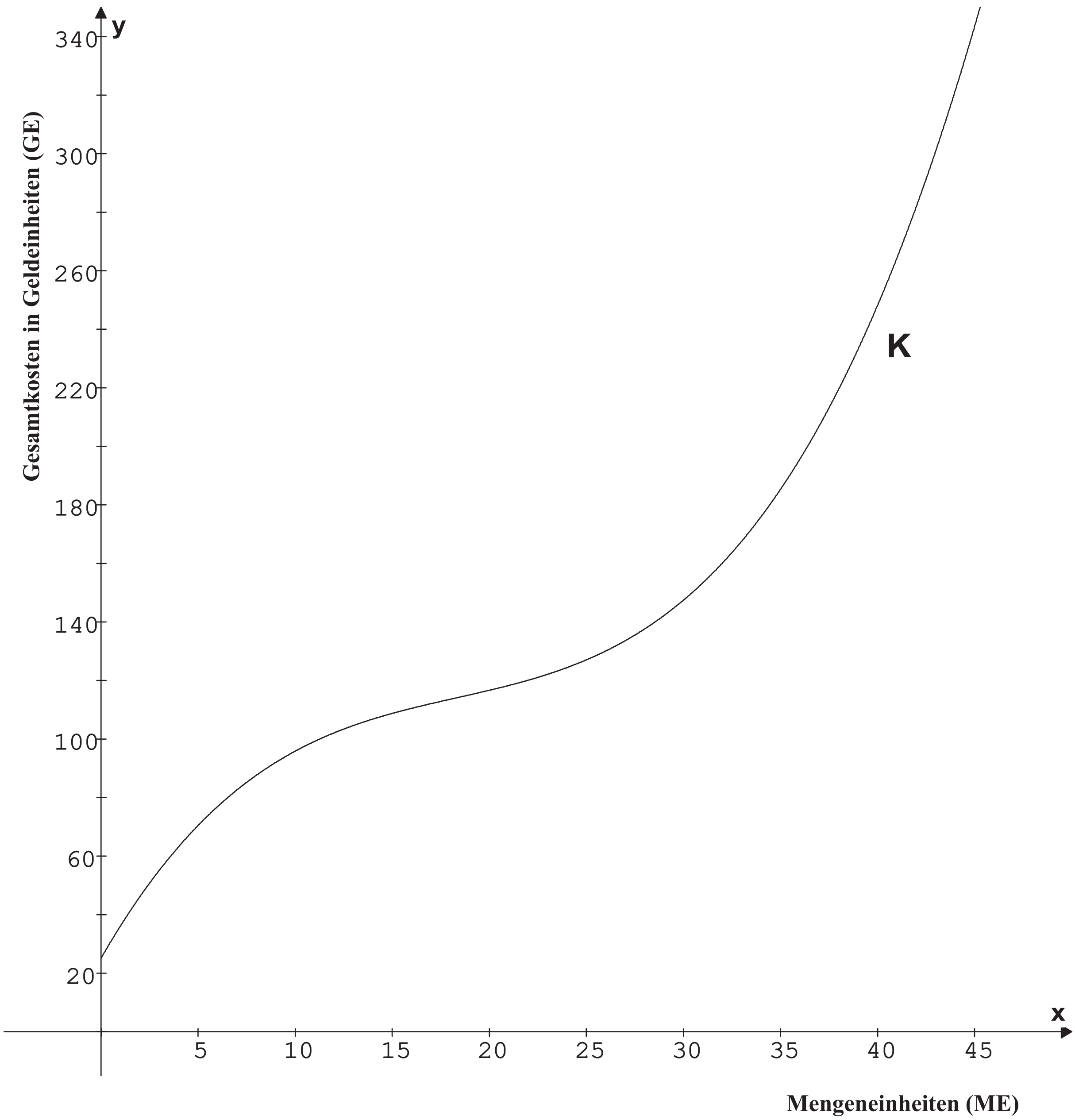
d) Betrachtet wird nun die so genannte Stückkostenfunktion S (Gesamtkosten pro Mengeneinheit) mit $S(x) = \frac{K(x)}{x}$. Begründen Sie, dass minimale Stückkosten in guter Näherung bei einer Absatzmenge von 29 ME erreicht werden.

e) Die Geschäftsführung will den Preis senken und damit ein „Schnupperangebot" auf den Markt bringen.

Weisen Sie nach, dass bei einem Preis von z. B. 4 GE der beim Verkauf erzielte Erlös stets kleiner als die zugehörigen Gesamtkosten ist und damit nur noch mit Verlust produziert werden kann.

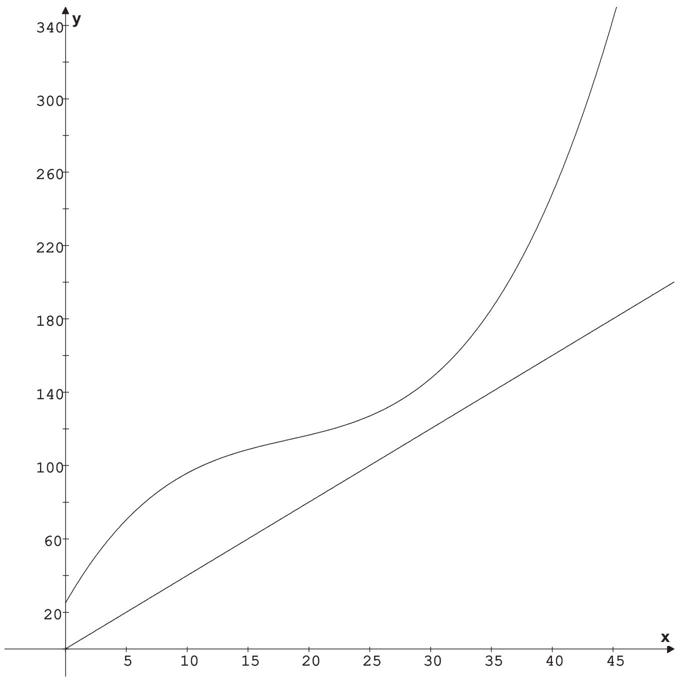
Bis zu welchem Mindestwert kann der Preis gesenkt werden, ohne dass mit Verlust produziert werden muss? Bestimmen Sie – z.B. mit Hilfe der Grafik – diesen minimalen Preis und die zugehörige Produktionsmenge.

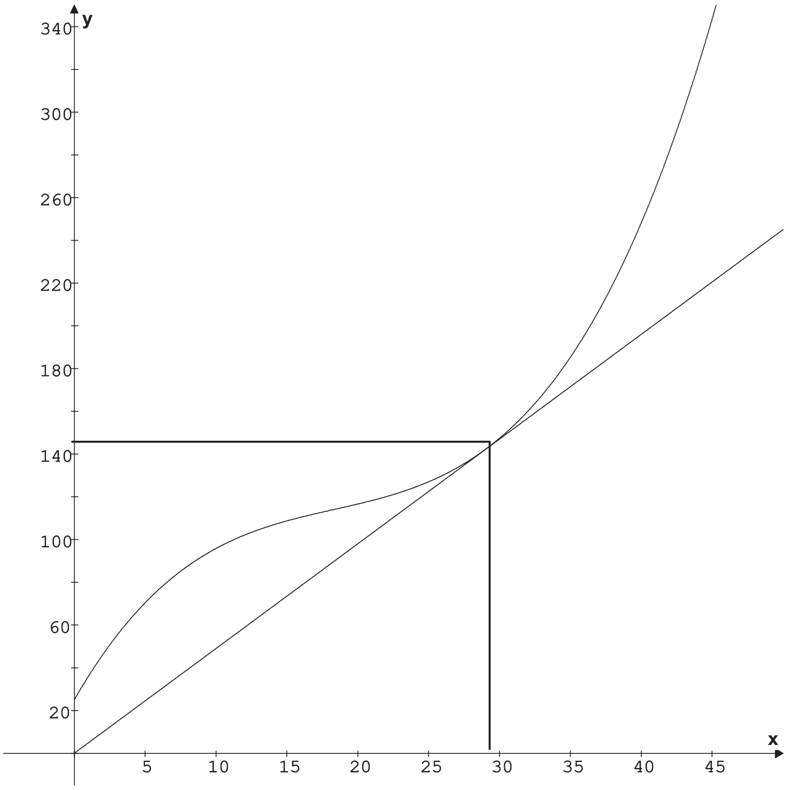
Anlage zur Aufgabe „Kaffeerösterei“:



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Der Graph der Kostenfunktion hat einen Wendepunkt; dies ist weder bei einer linearen noch bei einer quadratischen Funktion der Fall.	10		
b)	$K'(x) = 0{,}03x^2 - 1{,}1x + 11{,}58$, $K''(x) = 0{,}06x - 1{,}1$. Die notwendige Bedingung $K''(x) = 0$ ergibt: $0{,}06x - 1{,}1 = 0$ $0{,}06x = 1{,}1$ $x = 18\frac{1}{3} \approx 18{,}33$. Da $K'''(x) = 0{,}06$ konstant ungleich 0 ist, gilt: K hat an der Stelle $x = 18\frac{1}{3}$ eine Wendestelle. Der Wendepunkt hat die Koordinaten $W(18{,}\overline{3} \mid \approx 114{,}06)$. Eine Produktionserhöhung in der Nähe der Wendestelle ist sinnvoll, da die Kostenzunahme in diesem Bereich relativ klein ist.	5	10	5
c)	$E(x) = 10x$. $G(x) = E(x) - K(x)$ $= 10x - \left(0{,}01x^3 - 0{,}55x^2 + 11{,}58x + 25\right)$ $= -0{,}01x^3 + 0{,}55x^2 - 1{,}58x - 25$. Die Berechnung des Gewinnmaximums erfolgt mithilfe der Nullstellen der ersten Ableitung: $G'\left(x\right) = -0{,}03x^2 + 1{,}1x - 1{,}58$. Für $G'\left(x\right) = 0$ ergibt sich $-0{,}03x^2 + 1{,}1x - 1{,}58 = 0$ $x^2 - \frac{110}{3}x + \frac{158}{3} = 0$ $x_{1,2} = \frac{55}{3} \pm \sqrt{\frac{3025 - 474}{9}}$ $x_1 = \frac{55}{3} + \frac{\sqrt{2551}}{3} \approx 35{,}17$ $x_2 = \frac{55}{3} - \frac{\sqrt{2551}}{3} \approx 1{,}50$ Aus $G''(x) = -0{,}06x + 1{,}1$ folgt: $G(x_1) \approx -1{,}01$ und $G(x_1) \approx 1{,}01$. Also ist bei einer Produktion von ca. 35,17 ME der Gewinn beim Verkauf maximal.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Hinweis: Die Größe einer Mengeneinheit ist aus der Aufgabenstellung nicht direkt ersichtlich. Deshalb können Schülerinnen und Schüler die entsprechenden Mengeneinheiten durchaus gerundet angeben.	5	20	
d)	$S(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{0{,}01x^3 - 0{,}55x^2 + 11{,}58x + 25}{x} = 0{,}01x^2 - 0{,}55x + 11{,}58 + \frac{25}{x}$, $S'(x) = 0{,}02x - 0{,}55 - \frac{25}{x^2}$. Einsetzen von $x = 29$ in die Gleichung der Ableitungsfunktion zeigt, dass der Funktionswert nahezu Null ist: $S'(29) = 0{,}02 \cdot 29 - 0{,}55 - \frac{25}{841} \approx 0{,}00027$. Berechnet man entsprechende Werte für $x = 30$ oder $x = 28$, so stellt man fest, dass $S'(30) \approx 0{,}02$ und $S'(28) \approx -0{,}02$. Bei $x \approx 29$ liegt also ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung vor. Insgesamt kann man damit $x = 29$ als Näherung für die Minimalstelle ansehen.		20	
e)	<u>Nachweis mithilfe des Stückkostenminimums</u> aus Aufgabenteil (d): Das Stückkostenminimum liegt bei $x \approx 29$ und beträgt etwa $S(x) = \frac{K(29)}{29} = \frac{0{,}01 \cdot 29^3 - 0{,}55 \cdot 29^2 + 11{,}58 \cdot 29 + 25}{29} \approx 4{,}9$ Der Preis muss also mindestens 4,9 GE pro ME betragen, wenn er die minimalen Stückkosten decken und eine verlustfreie Produktion garantieren soll. Ein Preis von 4 GE reicht damit nicht aus. <u>Nachweis mithilfe der Grafik:</u> 			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Bei einem Preis von 4 GE hat die Erlösfunktion die Gleichung $E_2(x) = 4x$. Die zugehörige Ursprungsgerade verläuft unterhalb der Kostenkurve und schneidet diese nicht. Also sind die Kosten immer größer als der Erlös; es wird daher nur mit Verlust produziert. <u>Bestimmung des Mindestpreises über das Stückkostenminimum:</u> siehe oben. <u>Grafische Lösung:</u> Zur Bestimmung des Mindestpreises, der noch eine verlustfreie Produktion garantiert, muss man jene Ursprungsgerade suchen, die die Kostenkurve als Tangente berührt.  Die x-Koordinate des Berührpunktes gibt Auskunft über die Produktionsmenge, die Steigung der Geraden gibt Auskunft über den Preis. Durch näherungsweises Ablesen erhält man etwa 29 ME für die Produktionsmenge und Gesamtkosten in Höhe von ca. 145 GE. Berechnung des Preises: $p(29) = \frac{E(29)}{29} = \frac{145}{29} = 5$. Der Preis kann bis auf ca. 5 GE pro ME gesenkt werden, so dass noch verlustfrei produziert werden kann.		10	15
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

ANALYSIS 2

I.2 Beschränktes Wachstum

Gegeben ist die reelle Funktion *f* mit $f(x) = 2 - e^{-x}$.

a) Berechnen Sie die Stelle, an der die Funktion den Wert 1,5 annimmt.
Bestimmen Sie die Nullstelle von *f*.

b) Geben Sie den Funktionswert an der Stelle $x = 0$ an.
Bestimmen Sie die Steigung an der Stelle $x = 0$.
Untersuchen Sie, ob *f* eine Wendestelle hat.

c) Begründen Sie, dass diese Funktion ständig steigt, den Wert $y = 2$ aber nicht übersteigt.

d) Skizzieren Sie den Graphen von *f* für $-1 \le x \le 5$.

e) Bestimmen Sie das Integral $\frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} f(x)dx$.

Funktionen *f* mit $f(x) = a - b \cdot e^{-c \cdot x}$, $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^+$ beschreiben ein stetiges, aber begrenztes Wachstum. Im bisher betrachteten Fall ist $a = 2$, $b = 1$ und $c = 1$.

Ein Beispiel für beschränktes Wachstum ist die Temperaturentwicklung bei der Erwärmung einer Flüssigkeit. Nehmen Sie an, eine Flüssigkeit befindet sich im Kühlschrank. Wird die Flüssigkeit aus dem Kühlschrank genommen, so erwärmt sie sich allmählich auf die Raumtemperatur. Diese Erwärmung lässt sich durch einen Funktionsterm vom obigen Typ beschreiben.

f) Eine spezielle Flüssigkeit hat im Kühlschrank die Temperatur 6°C. Nach der Herausnahme erwärmt sie sich auf die Raumtemperatur von 22°C.
Der Zeitpunkt des Herausnehmens sei $x = 0$ Minuten. 10 Minuten nach dem Herausnehmen hat die Flüssigkeit eine Temperatur von 18,4°C.
Bestimmen Sie den Funktionsterm der Funktion f_E, die diese Erwärmung beschreibt. *Beim Funktionsterm können Sie auf die Einheiten verzichten.*

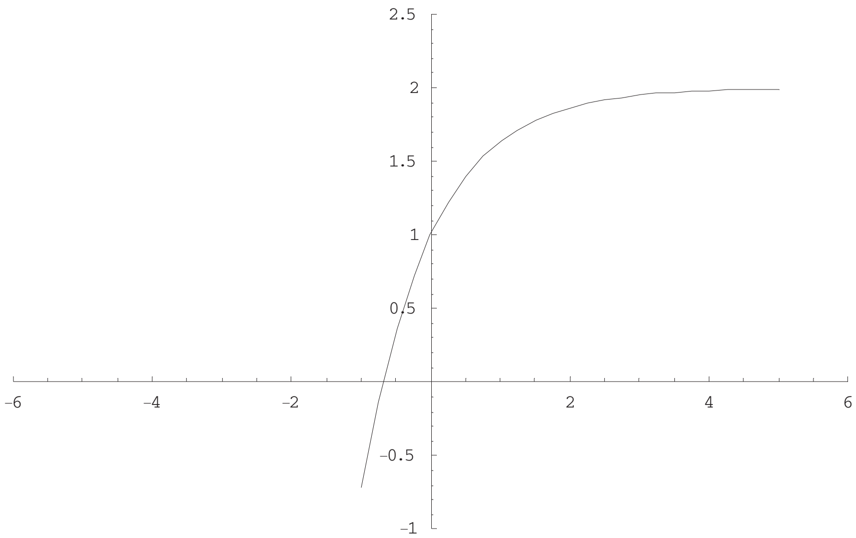
g) Interpretieren Sie f_E' und das Integral $\frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} f_E'(x)dx$ im Sachkontext der Aufgabe.

Bestimmen Sie die Integrale $\frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} f_E'(x)dx$ und $\frac{1}{10} \cdot \int_{10}^{20} f_E'(x)dx$.

Hinweis:
Falls Sie im Aufgabenteil f) keine Lösung gefunden haben, können Sie mit der folgenden – nicht mit der Lösung übereinstimmenden – Funktion f_F *mit* $f_F(x) = 20 - 10 \cdot e^{-0{,}07 \cdot x}$ *weiterrechnen.*

Das zweite Integral hat einen kleineren Wert als das erste. Begründen Sie dies anhand des prinzipiellen Funktionsverlaufs und im Sachkontext.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	• Stelle, an der die Funktion den Wert 1,5 annimmt: $2-e^{-x}=1{,}5$ $e^{-x}=0{,}5$ $-x=\ln(0{,}5)$ $x\approx 0{,}69315.$ • Nullstelle von *f*: $f(x)=0 \Leftrightarrow e^{-x}=2 \Leftrightarrow x=-\ln(2)\approx -0{,}69315$.	5	10	
b)	Funktionswert an der Stelle x = 0: Einsetzen liefert: $f(0)=2-e^{0}=2-1=1$. Die Ableitungsfunktion hat die Gleichung $f'(x)=e^{-x}$. Gesucht ist $f'(0)$; Einsetzen liefert $f'(0)=1$. Da $f''(x)=-e^{-x}$, gilt für alle x: $f''(x)\neq 0$. Die notwendige Bedingung für eine Wendestelle kann von keinem x erfüllt werden, also hat f keine Wendestelle.	10	10	
c)	Die Funktion f steigt ständig, da $f'(x)>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Der Wert y = 2 wird nicht überschritten, da • im Funktionsterm von 2 der Term e^{-x} abgezogen wird <u>und</u> • dieser Term für alle x positiv ist, so dass die Differenz – und damit der Funktionswert – für alle x kleiner als 2 ist. Da mit wachsendem x der Term e^{-x} immer kleiner wird und gegen Null geht, geht der Funktionswert gegen y = 2.		10	
d)		10		

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	$\frac{1}{10}\cdot\int_0^{10} f(x)dx = \frac{1}{10}\cdot\int_0^{10} 2-e^{-x}dx$ $= \frac{1}{10}\cdot\left[2x+e^{-x}\right]_0^{10}$ $= \frac{1}{10}\cdot\left(2\cdot 10+e^{-10}-\left(2\cdot 0+e^{-0}\right)\right)$ $= \frac{1}{10}\cdot\left(19+e^{-10}\right)\approx 1{,}9$.		10	
f)	$f_E(x)=a-b\cdot e^{-c\cdot x}\quad a,\ b,\ c\in\mathbb{R}^+$. Die obere, nicht überschreitbare Grenze ist die Raumtemperatur von 22°C. Also ist $a = 22$. Die Temperatur beim Herausnehmen ($x = 0$) ist 6°C. Aus $f(0)=6$ folgt: $22-b\cdot e^{-c\cdot 0}=22-b=6$, also $b = 16$. Aus $f(10)=18{,}4$ folgt $22-16\cdot e^{-10c}=18{,}4$ $16\cdot e^{-10c}=3{,}6$ $e^{-10c}=\frac{9}{40}$. Durch Logarithmieren erhält man $-10c=\ln\left(\frac{9}{40}\right)$ bzw. $c=-\frac{1}{10}\cdot\ln\left(\frac{9}{40}\right)=0{,}1491654...\approx 0{,}15$. Der Funktionsterm lautet demnach $f_E(x)=22-16\cdot e^{-0{,}15\cdot x}$.			10
g)	$f_E{}'$ gibt die momentane Änderungsrate der Temperatur an, $\frac{1}{10}\cdot\int_0^{10} f_E{}'(x)dx$ gibt die durchschnittliche Temperaturänderung pro Minute während der ersten 10 Minuten des Erwärmvorganges an. $\frac{1}{10}\cdot\int_0^{10} f_E{}'(x)dx = \frac{1}{10}\cdot\left(f_E(10)-f_E(0)\right)$ $= \frac{1}{10}\cdot\left(22-16\cdot e^{-0{,}15\cdot 10}-\left(22-16\cdot e^{-0{,}15\cdot 0}\right)\right)$ $= \frac{1}{10}\cdot\left(16\left(1-e^{-0{,}15\cdot 10}\right)\right)\approx 1{,}24$. und			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$\frac{1}{10}\cdot\int_{10}^{20} f_E{}'(x)dx = \frac{1}{10}\cdot\left(f_E(20)-f_E(10)\right)$ $= \frac{1}{10}\cdot\left(22-16\cdot e^{-0,15\cdot 20}-\left(22-16\cdot e^{-0,15\cdot 10}\right)\right)$ $= \frac{1}{10}\cdot\left(16\left(e^{-0,15\cdot 10}-e^{-0,15\cdot 20}\right)\right)\approx 0,28\,.$ Die entsprechenden Werte für die Funktion f_F sind: $\frac{1}{10}\cdot\int_0^{10} f_F{}'(x)dx \approx 0,50$ und $\frac{1}{10}\cdot\int_{10}^{20} f_F{}'(x)dx \approx 0,25\,.$ Die Funktion steigt zwar ständig, aber die Änderungsraten werden immer geringer. Denn $f_E{}'$ mit $f_E{}'(x) = 2,4\cdot e^{-0,15\cdot x}$ ist eine positive und monoton fallende Funktion. Also ist die durchschnittliche Änderung der Temperatur pro Minute in den ersten 10 Minuten des Erwärmvorganges größer als in den zweiten 10 Minuten des Erwärmvorganges.		15	10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

ANALYSIS 3

I.3 Dreieck

Gegeben sind zwei ganzrationale Funktionen mit den Gleichungen

$$f(x) = (x-2)^2 \quad \text{und} \quad g(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 5 \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}.$$

a) Geben Sie die Scheitelpunkte zu *f* und *g* an.

Ermitteln Sie die Schnittpunkte *D* und *A* (<u>*A* sei rechts von *D*</u>) der Graphen von *f* und *g*.

Zeichnen Sie die Graphen von *f* und *g* im Bereich $-1 \le x \le 5$ in ein Koordinatensystem ein.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der von beiden Graphen eingeschlossenen Fläche.

c) Eine Parallele zur *y*-Achse mit $x = a$ und $0 < a < 4$, schneidet den Graphen von *f* im Punkt *B* und den Graphen von *g* im Punkt *C*. Die Punkte *B* und *C* bilden sowohl mit dem Schnittpunkt *A* als auch mit dem Schnittpunkt *D* aus dem Aufgabenteil a) jeweils die Eckpunkte eines Dreiecks.

Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks *ABC* in Abhängigkeit von *a* durch die Funktion *W* mit $W(a) = \frac{5}{8}a^3 - 5a^2 + 10a$ beschrieben wird.

Ermitteln Sie, für welches *a* die Fläche des Dreiecks *ABC* den größten Inhalt hat, und geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.

Begründen Sie, warum der maximale Flächeninhalt des Dreiecks *DBC* genau so groß ist wie der maximale Flächeninhalt des Dreiecks *ABC*. Bestimmen Sie dann, für welchen Wert von *a* die Fläche des Dreiecks *DBC* den größten Inhalt hat.

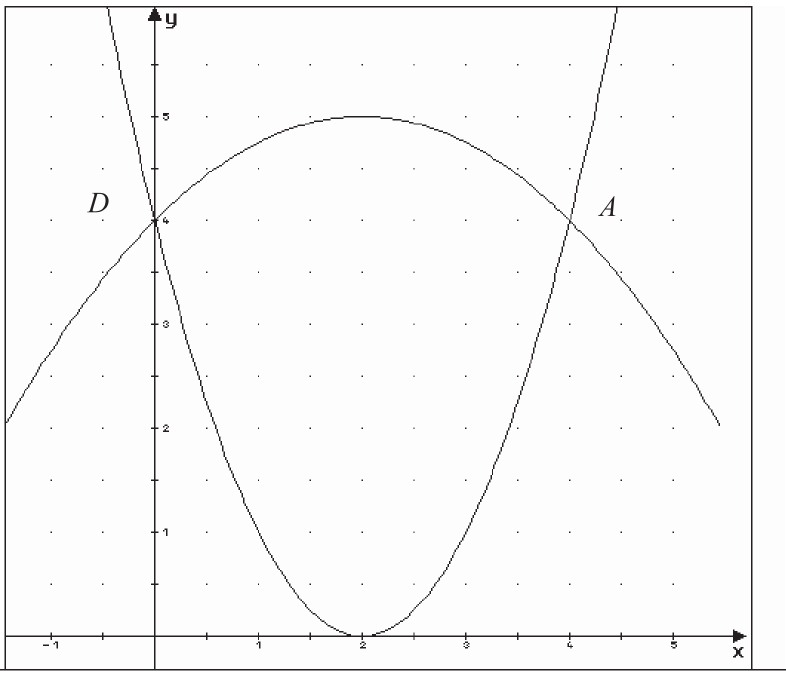
Ermitteln Sie, welchen Anteil die maximale Dreiecksfläche an dem Flächeneinschluss *K* zwischen den Graphen von *f* und *g* hat.

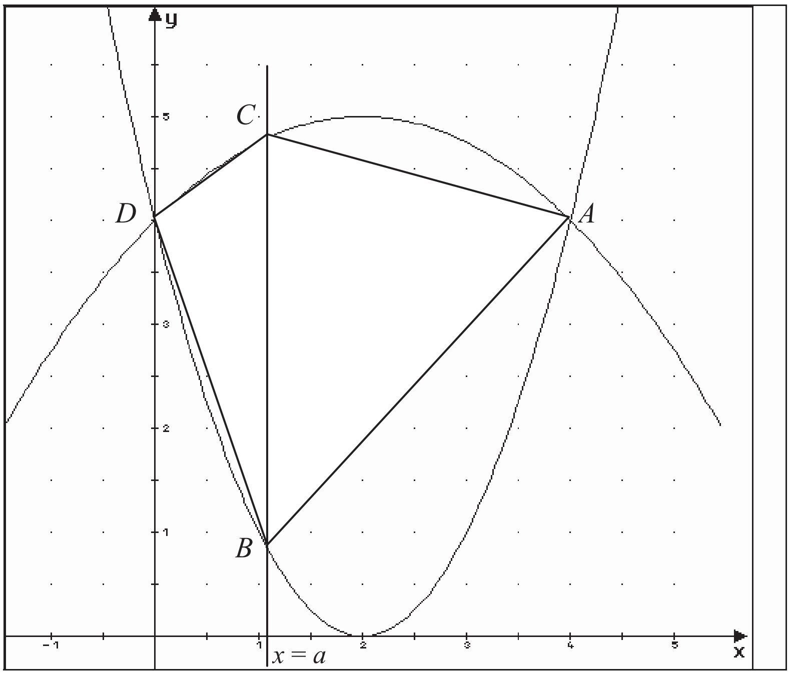
d) Die Graphen von *f* und *g* lassen sich durch einen geeigneten, von Null verschiedenen Faktor $k \in \mathbb{R}$ strecken oder stauchen, sodass die Nullstellen erhalten bleiben. Im Folgenden soll der Faktor *k* bei *f* und *g* jeweils gleich sein.

Zeigen Sie, dass die Schnittstellen der Graphen von *f* und *g* unabhängig von der Wahl von *k* sind.

Bestimmen Sie jetzt *k* so, dass die Graphen in den Schnittpunkten senkrecht zueinander stehen.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Koordinaten der Scheitelpunkte lassen sich den Funktionsgleichungen entnehmen: $S_f\,(2 \mid 0)$ und $S_g\,(2 \mid 5)$ Schnittpunkte: Beide Funktionsterme werden gleichgesetzt: $f(x) = g(x)$ $(x-2)^2 = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 5$ $x^2 - 4x + 4 = -\frac{1}{4}x^2 + x + 4$ $\frac{5}{4}x^2 - 5x = 0$ $x \cdot \left(\frac{5}{4}x - 5\right) = 0$ Die letzte Gleichung ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der beiden Faktoren gleich Null ist. D. h. $x = 0 \vee \left(\frac{5}{4}x - 5\right) = 0$ $x = 0 \vee x = 4$ Mit $f(0) = 0$ und $f(4) = 4$ erhält man die Schnittpunkte $D\,(0 \mid 4)$ und $A\,(4 \mid 4)$. Skizze:  	15	15	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
b)	Beide Funktionen haben zwischen den beiden Schnittstellen positive Funktionswerte. Also kann man den Flächeninhalt zwischen den Graphen mithilfe des Integrals über $f - g$ bzw. $g - f$ bilden: $\int_0^4 (g(x) - f(x))dx = \left[-\frac{5}{12}x^3 + \frac{5}{2}x^2\right]_0^4 = \frac{40}{3}$. Der Inhalt der Fläche, der von den beiden Funktionsgraphen umschlossen wird, beträgt $\frac{40}{3}$ Flächeneinheiten.	10		
c)	Dreiecksfläche:  Die Fläche eines Dreiecks berechnet sich aus „$\frac{1}{2} \cdot$ Grundseite $\cdot$ Höhe“. Die Höhe beträgt $4 - a$, die Grundseitenlänge $g(a) - f(a) = -\frac{5}{4}a^2 + 5a$. Also hat der Flächeninhalt des Dreiecks ABC den Wert $\left(\frac{1}{2} \cdot (4-a) \cdot (-\frac{5}{4}a^2 + 5a)\right) = \frac{5}{8}a^3 - 5a^2 + 10a$. Maximaler Flächeninhalt des Dreiecks ABC: $W(a) = \frac{5}{8}a^3 - 5a^2 + 10a$ $W'(a) = \frac{15}{8}a^2 - 10a + 10$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

$$W'(a) = 0$$

$$\frac{15}{8}a^2 - 10a + 10 = 0$$

$$a^2 - \frac{16}{3}a + \frac{16}{3} = 0$$

$$a_{1/2} = \frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9} - \frac{16}{3}} = \frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9}}$$

$$a_{1/2} = \frac{8}{3} \pm \frac{4}{3}.$$

W hat also bei $a_1 = 4$ und bei $a_2 = \frac{4}{3}$ mögliche Extremstellen. Durch Einsetzen in die zweite Ableitung W'' mit $W''(a) = \frac{15}{4}a - 10$ erhält man:

$$W''\left(\frac{4}{3}\right) = -5.$$

Also hat W bei $a_2 = \frac{4}{3}$ eine Maximumstelle.

Da W eine ganz rationale Funktion vom Grad drei ist, folgt daraus, dass die andere mögliche Extremstelle a_1 eine Minimustelle ist. Diese liegt aber außerhalb des untersuchten Bereichs. Es existieren also auch keine Randextrema.

$$W\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{160}{27} \approx 5{,}93.$$

Der maximale Flächeninhalt des Dreiecks *ABC* beträgt damit etwa 5,93 Flächeneinheiten.

Gleichheit der maximalen Flächeninhalte der Dreiecke *ABC* und *DBC*:

Aufgrund der vorliegenden Symmetrie beider Graphen zur Scheitelachse $x = 2$ liegen auch die Eckpunkte beider Dreiecke symmetrisch zur Scheitelachse. Es sind also jeweils die Länge und Höhe der Dreiecke und damit die Flächeninhalte gleich.

Da die beiden Dreiecke mit maximalen Flächeninhalt spiegelsymmetrisch zueinander sind, liegt die Extremalstelle des Dreiecks *DBC* punktsymmetrisch bzgl. 2 zur Extremalstelle des Dreiecks *ABC*:

Aus $a = \frac{4}{3}$ folgt $a = 2 - \frac{2}{3}$.

Also liegt die Extremalstelle des Dreiecks *DBC* bei

$$a = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Flächenanteil: Der Anteil beträgt $\frac{\frac{160}{27}}{\frac{40}{3}} = \frac{160}{27} \cdot \frac{3}{40} = \frac{4}{9}$.		40	
d)	Schnittstellen: Damit *f* und *g* bei gleichzeitigem Erhalt der Nullstellen gestaucht bzw. gestreckt wird, muss jeweils der ganze Funktionsterm mit *k* multipliziert werden, also haben die veränderten Funktionsterme f_k bzw. g_k von *f* bzw. *g* das Aussehen $f_k(x) = k \cdot f(x) = k(x-2)^2$ und $g_k(x) = k \cdot g(x) = -\frac{k}{4}(x-2)^2 + k \cdot 5$. Nach der Festlegung folgt dann aus $f_k(x) = g_k(x)$ sofort $f(x) = g(x)$, d.h., dass die Schnittstellen gleich sind. Graphen stehen in den Schnittpunkten senkrecht zueinander: Aus Symmetriegründen reicht es, die Schnittstelle $x = 0$ zu untersuchen. $f_k'(x) = k \cdot f'(x) = k \cdot (2x-4)$ und $g_k'(x) = k \cdot g'(x) = k \cdot (-\frac{1}{2}x + 1)$ Damit beide Funktionsgraphen an den Schnittstellen senkrecht aufeinander stehen, muss gelten $f_k'(0) = -\frac{1}{g_k'(0)}$ $k \cdot (2 \cdot 0 - 4) = -\frac{1}{k \cdot (-\frac{1}{2} \cdot 0 + 1)}$ $-4k = -\frac{1}{k}$ $k^2 = \frac{1}{4}$. D. h. $k = \frac{1}{2}$ und $k = -\frac{1}{2}$ sind Lösungen. Für $k = \frac{1}{2}$ bzw. $k = -\frac{1}{2}$ stehen die Funktionsgraphen von f_k und g_k an den Schnittstellen senkrecht zueinander.			20
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

II.1 Würfel

Gegeben sind die Punkte $A\,(-1\,|\,6\,|\,1\,)$, $B\,(\,2\,|\,2\,|\,2\,)$, $C\,(\,0\,|\,7\,|\,-1\,)$, $P\,(\,0\,|\,6\,|\,6\,)$ und $Q\,(\,6\,|\,6\,|\,6\,)$.
Die Ebene ***E*** enthält die Punkte *A, B* und *C*.

a) Geben Sie eine Gleichung der Geraden *g*, die durch die Punkte *P* und *Q* geht, in Parameterform an.

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von ***E***.
(Ein mögliches Teilergebnis ist $\boldsymbol{E}: x_1 + x_2 + x_3 - 6 = 0$.)
Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen der Geraden *g* und der Ebene ***E***.

b) Berechnen Sie die Schnittpunkte S_1, S_2 und S_3 von ***E*** mit den Koordinatenachsen.

S_1, S_2, S_3 und der Koordinatenursprung *O* sind vier Eckpunkte eines Würfels.

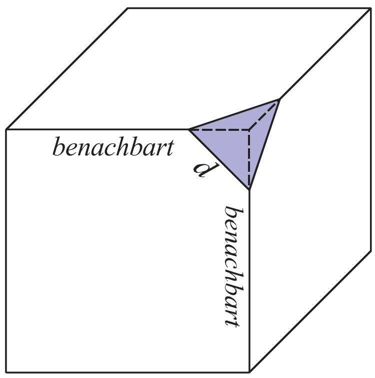
Zeichnen Sie das Dreieck $S_1S_2S_3$ und den Würfel in das beiliegende Koordinatensystem ein. Zeigen Sie, dass die Punkte *P* und *Q* ebenfalls Eckpunkte des Würfels sind.

c) Gegeben ist eine Ebene ***F*** durch die Eckpunkte *P* und *Q* des Würfels aus Aufgabenteil b) und den Punkt $R\,(\,6\,|\,0\,|\,4\,)$.

Bestimmen Sie den Schnittpunkt von ***F*** mit der x_3-Achse.

Die Ebene ***F*** zerlegt den Würfel in zwei Teile.
Zeichnen Sie die Schnittfläche in das Bild aus Aufgabenteil b) ein.
Ermitteln Sie das Verhältnis der Volumeninhalte der entstandenen Teilkörper.

d) Dem Würfel wird ein pyramidenförmiges Stück abgeschnitten, so dass die Pyramidenspitze der Punkt *Q* ist und die von *Q* ausgehenden Kanten gleich lang sind. Die entsprechenden Kanten sind in der Zeichnung gestrichelt eingezeichnet. Drei der alten Würfelflächen werden dadurch zu Fünfecken.



In diesem Aufgabenteil geht es nun um den Restkörper.

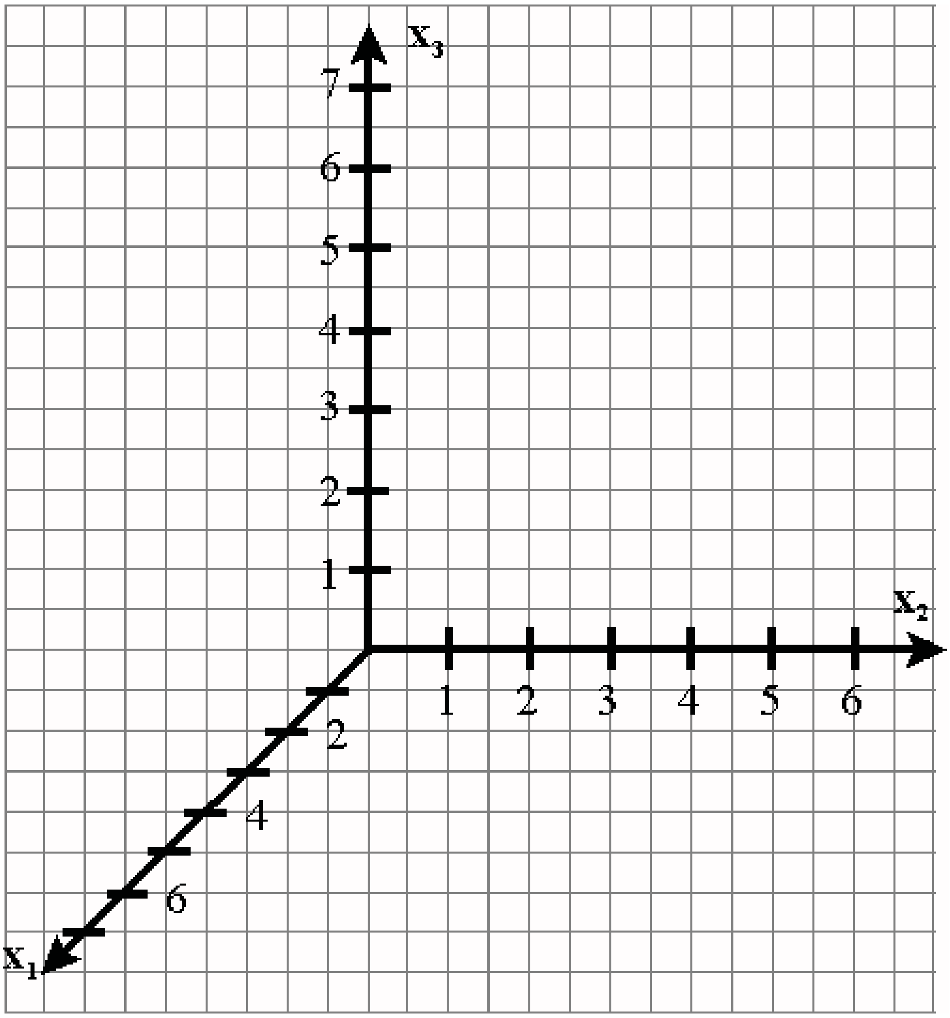
Begründen Sie, dass die entstehende Schnittfläche ein gleichseitiges Dreieck ist.

Bestimmen Sie die Länge *x* der von *Q* ausgehenden Kanten so, dass die neu entstandene Kante *d* und ihre beiden benachbarten Kanten der entstehenden fünfeckigen Seitenflächen des Restkörpers jeweils gleich lang sind. Ermitteln Sie auch diese gemeinsame Länge.

e) Nun werden von <u>allen</u> Ecken des Würfels jeweils gleich große Pyramiden abgeschnitten.
Ermitteln Sie, wie lang die von der Ecke ausgehenden Kanten der abgeschnittenen Pyramiden höchstens sein können.

Haben die abgeschnittenen Pyramiden die maximale Größe, so entsteht ein spezieller Restkörper. Ermitteln Sie, um was für einen Körper es sich hierbei handelt. Beschreiben Sie ihn dazu durch die Anzahl der Ecken sowie durch die Form und die Anzahl seiner Seitenflächen.

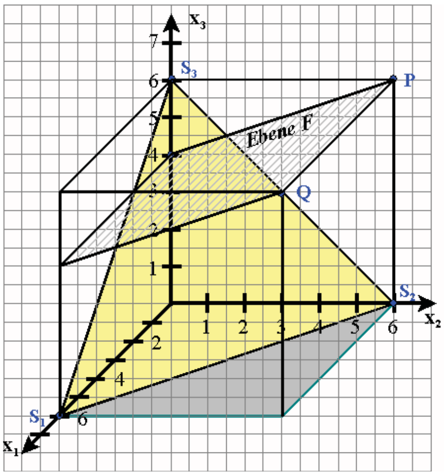
Anlage zur Aufgabe „Würfel“:



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Für die Geradengleichung der Geraden g durch die Punkte P und Q kann man als Stützvektor den Ortsvektor $\vec{p}$ und als Richtungsvektor den Vektor $\overrightarrow{PQ}$ verwenden: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Für die Bestimmung der Koordinatengleichung der Ebene E stellt man z. B. erst eine Parametergleichung auf, hier mit dem Stützvektor $\vec{a}$ und den Spannvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Dann erhält man über das lineare Gleichungssystem $\begin{cases} x_1 = -1 + 3r + s \\ x_2 = 6 - 4r + s \\ x_3 = 1 + r - 2s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + 3r + s \\ x_1 - x_2 = -7 + 7r \\ 2x_1 + x_3 = -1 + 7r \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + 3r + s \\ x_1 - x_2 = -7 + 7r \\ 2x_1 + x_3 - (x_1 - x_2) = 6 \end{cases}$ oder über den Normalenvekor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Koordinatengleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 6$. *Hinweis: Auch eine argumentative Lösung, z. B. über Spurpunkte, ist möglich.* Ein Richtungsvektor von g ($\overrightarrow{PQ}$) und ein Normalenvektor $\vec{n}$ von ***E*** werden in die Schnittwinkelformel eingesetzt und es ergibt sich $\sin\alpha = \frac{\lvert \vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} \rvert}{\lvert \vec{n} \rvert \cdot \lvert \overrightarrow{PQ} \rvert} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\lvert \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rvert \cdot \left\lvert \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rvert} = \frac{6}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{36}} = \frac{6}{\sqrt{3} \cdot 6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Damit folgt $\alpha \approx 35{,}26°$.	15	15	
b)	Zur Berechnung des Schnittpunkts S_1 der Ebene E mit der x_1-Achse setzt man in der Koordinatengleichung die Koordinaten x_2 und x_3 gleich Null und berechnet x_1. Man erhält $S_1(6 \mid 0 \mid 0)$. Entsprechend erhält man $S_2(0 \mid 6 \mid 0)$ und $S_3(0 \mid 0 \mid 6)$.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>



Nachweis, dass P und Q Eckpunkte des Würfels sind:

$$\vec{s_2}+\vec{s_3}=\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\\6\end{pmatrix}=\vec{p} \quad \text{und} \quad \vec{s_1}+\vec{s_2}+\vec{s_3}=\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix}=\vec{q}\,.$$

</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

- Da P und Q Eckpunkte des Würfels sind und R auf der Würfelkante liegt, die senkrecht auf S_1 steht, muss der Schnittpunkt mit der x_3-Achse die gleiche x_3-Koordinate wie R haben.
  Also hat der Schnittpunkt von F mit der x_3-Achse die Koordinaten $(0|0|4)$.
- Die Ebene F zerlegt den Würfel in zwei Prismen.
  Ein Prisma hat ein rechtwinkliges Dreieck als Grundfläche, das andere hat eine trapezförmige Grundfläche.
  Für das Volumen des Würfels ergibt sich: $V_{Würfel}=6^3=216$.
  Für das Prisma mit dem rechtwinkligen Dreieck als Grundfläche ergibt sich:
  $V_{Teilkörper}=G\cdot h=\frac{6\cdot 2}{2}\cdot 6=36$.
  Für das Verhältnis gilt dann: $\frac{36}{216}:\frac{180}{216}$, also 1 : 5.

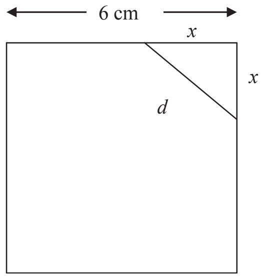
</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>

- Die abgeschnittene Pyramide hat zur Spitze hin gleich lange Kanten, jede Seitenfläche hat an der Spitze einen 90°-Winkel. Also sind die drei Seitenflächen kongruent, damit sind die Kanten an der Grundfläche auch gleich lang und die Grundfläche und damit auch die Schnittfläche ist ein gleichseitiges Dreieck.
- Sei x die Länge der von Q ausgehenden Pyramidenkante der abgeschnittenen Pyramide. Für die neu erhaltene Seite d gilt
  $2x^2=d^2$, also $d=\sqrt{2x^2}=\sqrt{2}\cdot x$ (1)
  und
  $d=6-x$. (2)

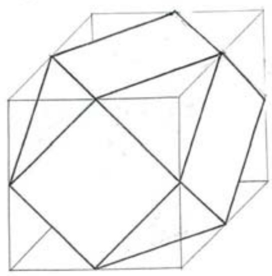
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>
Die Gleichung (1) gilt immer.

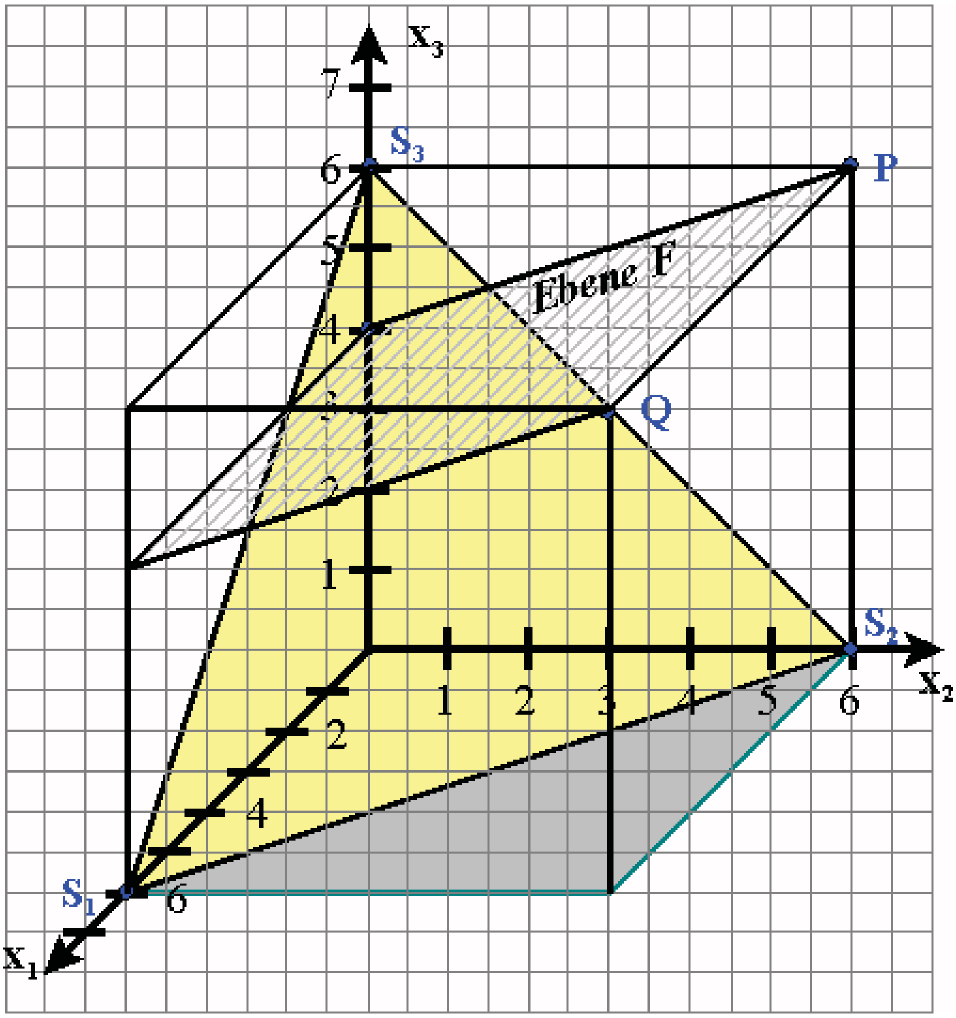
Die Gleichung (2) folgt aus der Aufgabenstellung:
d und die benachbarten Kanten sollen gleich lang sein.

Durch Gleichsetzen erhält man
$\sqrt{2} \cdot x = 6 - x$
$(\sqrt{2} + 1) \cdot x = 6$
$x = \frac{6}{\sqrt{2}+1} \approx 2{,}5 .$
bzw.
$d = 6 - x \approx 3{,}5 .$


</td><td></td><td></td><td>20</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>
• Die abgeschnittenen Kanten können höchstens 3 LE lang sein, denn dann treffen sich die abgeschnittenen Pyramiden gerade in der Mitte der Würfelkante, so dass von der Würfelkante nichts mehr übrig bleibt.

• Der Restkörper hat dort, wo der Würfel ehemals Ecken hatte, gleichseitige Dreiecke. Aus den ehemaligen Würfelflächen werden Quadrate, deren Ecken in den Mittelpunkten der ehemaligen Würfelkanten liegen. Der Körper hat also 14 Flächen: 8 gleichseitige Dreiecke und 6 Quadrate. Weiterhin hat der Körper 12 Ecken.

</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>55</td><td>20</td></tr>
</table>

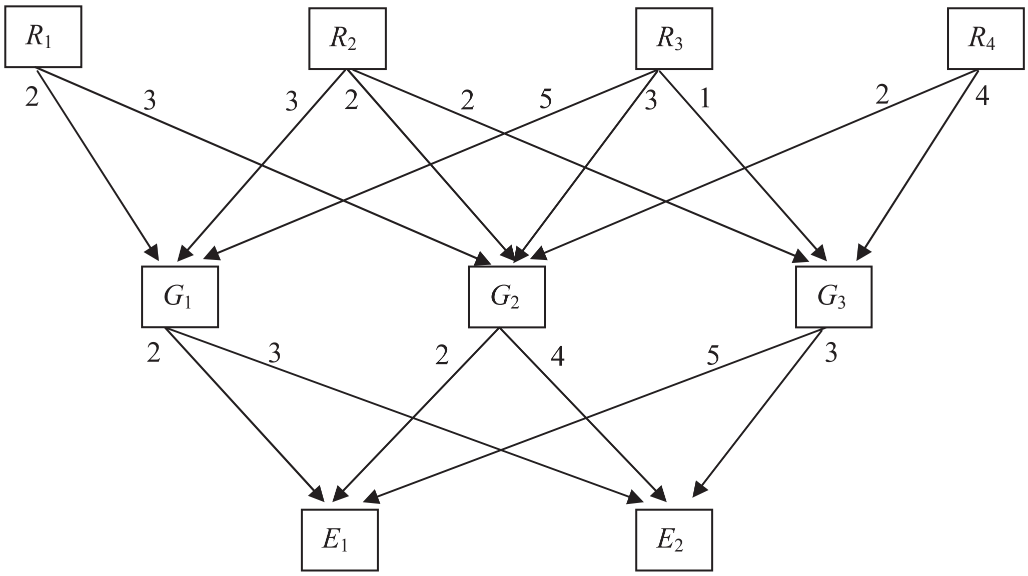
Kopiervorlage für die Zeichnung:



LA/AG 2

II.2 Schmerzmittel

Ein Pharmaunternehmen stellt aus vier pflanzlichen Rohstoffen R_1, R_2, R_3 und R_4 drei verschiedenartige Grundsubstanzen G_1, G_2 und G_3 her. Aus den Grundsubstanzen werden zwei in ihrer Wirkung unterschiedliche Schmerzmittel als Endprodukte E_1 und E_2 zusammengestellt.
Das folgende Diagramm zeigt den Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) vom Rohstoff über die Grundsubstanzen bis zu den Schmerzmitten als Endprodukte.



a) Geben Sie die Rohstoff-/Grundsubstanzenmatrix A sowie die Grundsubstanzen-/Endproduktmatrix B an und zeigen Sie, dass die Rohstoff-/Endproduktmatrix C wie folgt lautet:

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 18 \\ 20 & 23 \\ 21 & 30 \\ 24 & 20 \end{pmatrix}$$

Die Materialkosten für die pflanzlichen Rohstoffe und die Fertigungskosten für die Grundsubstanzen und die Endprodukte sind in Geldeinheiten (GE) je ME durch die nachstehenden Tabellen gegeben.

R_1	R_2	R_3	R_4
0,1	0,4	0,2	0,5

G_1	G_2	G_3
5	4	8

E_1	E_2
18	12

b) Das Unternehmen erhält regelmäßig von einer bekannten „Internet-Apotheke" einen Auftrag über 200 ME von E_1 und 300 ME von E_2.

Ermitteln Sie, wie viele ME von den pflanzlichen Rohstoffen ($\vec{v}_R$) und wie viele ME der Grundsubstanzen ($\vec{v}_G$) zur Erfüllung dieses Auftrages benötigt werden.

Fortsetzung nächste Seite →

Berechnen Sie die variablen Herstellungskosten pro ME für jedes Endprodukt ($\vec{k}_{\text{var}}^T$), die aus der Summe der zugehörigen Material- und Fertigungskosten bestehen, und zeigen Sie, dass die gesamten variablen Herstellungskosten (K_{var}) für den Kundenauftrag 48.440 GE betragen.

Bestimmen Sie den Verkaufspreis p der Schmerzmittel auf volle GE gerundet, wenn beide Mittel zum gleichen Preis verkauft werden sollen, die anteiligen Fixkosten für diesen Auftrag 10 % der variablen Kosten betragen und das Pharmaunternehmen mit einem Gewinnzuschlag von 20 % arbeitet.

Im Materiallager werden immer wieder ältere Bestände sowohl an pflanzlichen Rohstoffen als auch an Grundsubstanzen entdeckt, die aus Haltbarkeitsgründen sofort aufgebraucht oder wegen Überschreitung der Haltbarkeitsdauer sogar vernichtet werden müssen.

c) Untersuchen Sie, ob sich Altbestände an Grundsubstanzen, und zwar 3100 ME von G_1 und 3800 ME von G_2, vollständig bei der Produktion der Endprodukte verarbeiten lassen, und ermitteln Sie, wie viele ME eines jeden Endproduktes produziert werden können.
Berechnen Sie ebenfalls, wie viele ME der Grundsubstanz G_3 für die Produktion der von Ihnen ermittelten ME der Endprodukte benötigt werden.

d) Zukünftig sollen die Vorräte an pflanzlichen Rohstoffen und an Grundsubstanzen wegen der immer wieder auftretenden Haltbarkeitsprobleme dem tatsächlichen Absatz der Endprodukte angepasst werden. Neueste Marktuntersuchungen haben ergeben, dass sich die Endprodukte E_1 und E_2 im Mengenverhältnis von 2:3 absetzen lassen.

Zeigen Sie, dass die Grundsubstanzenvorräte unter Berücksichtigung des oben angegebenen Mengenverhältnisses dem Mengenvektor $\vec{v}_G = \begin{pmatrix} 13t \\ 16t \\ 19t \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{N}^*)$ entsprechen.

Bestimmen Sie ohne weitere Rechnungen den entsprechenden Mengenvektor $\vec{v}_R$ für die pflanzlichen Rohstoffe.

e) Eine von der Geschäftsleitung eingesetzte Arbeitsgruppe zur Verbesserung der Kostensituation des Unternehmens schlägt zusätzlich die Einführung eines computergesteuerten Lagerwesens vor. Nach Berechnungen der Arbeitsgruppe ließen sich hierdurch die variablen Kosten um 10 % senken. Der Anteil der fixen Kosten an den neuen variablen Kosten würde sich zwar erhöhen, und zwar von derzeit 10 % auf 20 %, aber die Gesamtkosten würden trotzdem sinken.
Beurteilen Sie diesen Vorschlag sowohl im Hinblick auf die angestrebte Kostensenkung als auch auf die Verbesserung der Kostensituation.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
Rohstoffe-/Grundsubstanzenmatrix: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.
Grundsubstanzen-/Endproduktmatrix: $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.
$C = A \cdot B \Leftrightarrow C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 18 \\ 20 & 23 \\ 21 & 30 \\ 24 & 20 \end{pmatrix}$.
Die Rohstoffe-/Endproduktmatrix lautet: $C = \begin{pmatrix} 10 & 18 \\ 20 & 23 \\ 21 & 30 \\ 24 & 20 \end{pmatrix}$.
</td><td>5</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>
Rohstoffverbrauchsvektor $\vec{v}_R$ für einen Auftragsvektor $\vec{x}_E = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix}$:
$C \cdot \vec{x}_E = \vec{v}_R \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 18 \\ 20 & 23 \\ 21 & 30 \\ 24 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7400 \\ 10900 \\ 13200 \\ 10800 \end{pmatrix}$.
Bei der Herstellung von 200 ME von E_1 und 300 ME von E_2 werden folgende pflanzliche Rohstoffe benötigt: 7.400 ME von R_1, 10.900 ME von R_2, 13.200 ME von R_3 und 10.800 ME von R_4.
Grundsubstanzenverbrauchsvektor $\vec{v}_G$ für einen Auftragsvektor $\vec{x}_E = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix}$:
$B \cdot \vec{x}_E = \vec{v}_G \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1300 \\ 1600 \\ 1900 \end{pmatrix}$.
Bei der Herstellung von 200 ME von E_1 und 300 ME von E_2 werden folgende Grundsubstanzen benötigt: 1.300 ME von G_1, 1.600 ME von G_2 und 1.900 ME von G_3.
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Variable Herstellungskosten pro ME für jedes Endprodukt ($\vec{k}_{\text{var}}^T$): $\vec{k}_{var}^T = \vec{k}_R^T + \vec{k}_G^T + \vec{k}_E^T$ $\vec{k}_R^T = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 18 \\ 20 & 23 \\ 21 & 30 \\ 24 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25{,}2 & 27 \end{pmatrix}$ $\vec{k}_G^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 55 \end{pmatrix}$ $\vec{k}_E^T = \begin{pmatrix} 18 & 12 \end{pmatrix}$. Also: $\vec{k}_{var}^T = \begin{pmatrix} 25{,}2 & 27 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 58 & 55 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 101{,}2 & 94 \end{pmatrix}$. Die variablen Kosten pro ME (= variable Stückkosten) betragen 101,2 GE bei E_1 und 94 GE bei E_2. Gesamte variable Herstellungskosten: $K_{var} = \vec{k}_{var}^T \cdot \vec{x}_E = \begin{pmatrix} 101{,}2 & 94 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix} = 48440$. Wie angegeben betragen die gesamten variablen Herstellungskosten 48.440 GE. Verkaufspreis p je ME der Schmerzmittel: $K_{fix} = 0{,}1 \cdot K_{var} = 0{,}1 \cdot 48440 = 4844$ $p = \dfrac{K_{var} + K_{fix} + 0{,}2(K_{var} + K_{fix})}{x_{E_1} + x_{E_2}} = \dfrac{48440 + 4844 + 10656{,}8}{200 + 300} = \dfrac{63940{,}8}{500} \approx 127{,}88$. Der Verkaufspreis für jedes Schmerzmittel beträgt 128 GE je ME.	10	25	5
c)	Verarbeitung alter Bestände an Grundsubstanzen: $B \cdot \vec{x}_E = \vec{v}_G \;\; mit \;\; \vec{v}_G = \begin{pmatrix} 3100 \\ 3800 \\ x_3 \end{pmatrix}$. $\left[\begin{array}{cc\|c} 2 & 3 & 3100 \\ 2 & 4 & 3800 \\ 5 & 3 & x_3 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 700 \\ 5 & 3 & x_3 \end{array}\right]$. Die genannten Grundsubstanzen lassen sich bei der Produktion der beiden Endprodukte vollständig verarbeiten. Es können 500 ME von E_1 und 700 ME von E_2 hergestellt werden. Von der Grundsubstanz G_3 werden für die Produktion noch 4.600 ME benötigt.	5	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	$B \cdot \vec{x}_E = \vec{v}_G \;\; mit \;\; \vec{x}_E = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t \end{pmatrix}$ $\vec{v}_G = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13t \\ 16t \\ 19t \end{pmatrix}.$ Der angegebene Vektor entspricht den notwendigen Vorräten an Grundsubstanzen. Aus den Lösungen aus Teilaufgabe b) lässt sich der entsprechende Mengenvektor für die pflanzlichen Rohstoffe unmittelbar herleiten: $\vec{v}_R = \begin{pmatrix} 74t \\ 109t \\ 132t \\ 108t \end{pmatrix}.$		10	5
e)	Alte und neue Kostensituation im Vergleich: $K_{alt} = K_{var} + 0{,}1K_{var} = 1{,}1K_{var}$ $K_{neu} = (0{,}9K_{var}) + 0{,}2(0{,}9K_{var}) = 1{,}08K_{var}$ Der Vorschlag der Arbeitsgruppe führt bei ansonsten unveränderten Bedingungen tatsächlich zu einer Senkung der Gesamtkosten um ca. 1,8 % von $1{,}1K_{var}$ auf $1{,}08K_{var}$. Kritisch ist jedoch anzumerken, dass die fixen Kosten unabhängig von der Produktionsmenge und damit auch unabhängig von den variablen Kosten in gleich bleibender Höhe anfallen. Sinken die Produktionsmengen und die davon abhängenden variablen Kosten, so steigt der prozentuale Anteil der fixen Kosten an den variablen Kosten entsprechend weiter an. Die Kostensituation würde sich durch eine Erhöhung der fixen Kosten bei sinkenden Produktionsmengen verschlechtern. Lediglich bei gleich bleibenden bzw. steigenden Produktionsmengen würde ein positiver Senkungseffekt bzgl. der Gesamtkosten eintreten.		5	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

STOCHASTIK 1

III.1 Allergien

Auf einer Internetseite von „netdoktor.de" vom 18.07.05 wird zunächst erklärt, was eine Allergie ist: „Bei einigen Menschen spielt das Immunsystem verrückt. Statt nur schädliche Krankheitserreger zu bekämpfen, stürzt sich die Immunabwehr auch auf harmlose Fremdlinge wie Blütenpollen, Hausstaub oder bestimmte Nahrungsmittelbestandteile: der Körper reagiert allergisch." Später heißt es: „Jeder dritte Deutsche ist Allergiker, schätzt der Ärzteverband Deutscher Allergologen. Tendenz steigend."

Für Ihre Lösungen können Sie auch den in der Anlage beigefügten Ausschnitt aus einer Tabelle summierter Binomialverteilungen benutzen.

Gehen Sie zunächst davon aus, dass ein Drittel aller Deutschen Allergiker sind.

a) Es werden 100 Bewohner Deutschlands zufällig ausgewählt und auf Allergien getestet.
Begründen Sie, dass man die möglichen Anzahlen an Allergikern unter den getesteten Personen als binomialverteilt ansehen kann.

b) Berechnen Sie unter der Annahme der Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 100 getesteten Personen
- genau 33 Allergiker
- mindestens 25 Allergiker
- höchstens 20 Allergiker sind.

Auf der oben genannten Internetseite heißt es weiter: „Die Neigung zu einer solchen Reaktion ist wahrscheinlich angeboren. Die Neigung, eine Überempfindlichkeit zu entwickeln, liegt bei Personen, bei denen beide Elternteile Allergiker sind, zwischen 40 bis 60 Prozent. Ist nur ein Elternteil betroffen, entwickelt sich in etwa 20 bis 40 Prozent der Fälle eine Allergie."

c) Gehen Sie in diesem Aufgabenteil davon aus, dass die Partnerwahl und die Familienplanung unabhängig von vorliegenden Allergien erfolgen.

Bestimmen Sie zunächst die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen „Elternkonstellationen", also dafür, dass beide Elternteile Allergiker sind, ein Elternteil oder kein Elternteil Allergiker ist.

Weisen Sie nach, dass selbst, wenn man jeweils die höheren Werte zugrunde legt – also 60%, wenn beide Elternteile Allergiker sind, 40%, wenn nur ein Elternteil betroffen ist – der Anteil der Allergiker in der Bevölkerung sinken müsste, wenn nur erbliche Faktoren für das Auftreten einer Allergie entscheidend wären und keine Allergien bei Kindern aufträten, deren Elternteile beide keine Allergiker sind.

Zitat aus der o.g. Internetseite: „Warum Allergien in Industrienationen stetig zunehmen, ist unbekannt. Jedoch scheinen besonders hygienische Lebensverhältnisse die Entstehung von Allergien im Kindesalter zu begünstigen. Denn in Regionen mit einfacheren hygienischen Standards treten Allergien deutlich seltener auf. Offenbar verpassen Schmutz und harmlose Keime in der Kindheit dem Immunsystem erst den richtigen Schliff."

d) Um die Ursachen für das Entstehen von Allergien zu erforschen, werden 100 zufällig ausgewählte fünfjährige Kinder vor ihrer Einschulung auf Allergien untersucht.

Durch einen Hypothesentest soll die Behauptung begründet werden, dass der Anteil an Allergikern steigt. Leiten Sie eine Entscheidungsregel her, mit der die Nullhypothese „Unter Kindern im Alter von 5 Jahren sind höchstens ein Drittel Allergiker." gegebenenfalls verworfen werden kann. Dabei soll die Wahrscheinlichkeit, dass die Hypothese zu Unrecht verworfen wird, und also zu Unrecht von einem erhöhten Anteil an Allergikern ausgegangen wird, höchstens 5 % betragen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mit Ihrer Entscheidungsregel eine Erhöhung des Anteils an Allergikern auf 40 % unbemerkt bleibt und interpretieren Sie dieses Ergebnis.

Tabelle der summierten Binomialverteilung für $n = 100$

k \ p	0,2	0,3	$\frac{1}{3}$	0,4	0,5
10	0,0057	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
11	0,0126	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
12	0,0253	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
13	0,0469	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
14	0,0804	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
15	0,1285	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000
16	0,1923	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000
17	0,2712	0,0022	0,0002	0,0000	0,0000
18	0,3621	0,0045	0,0005	0,0000	0,0000
19	0,4602	0,0089	0,0011	0,0000	0,0000
20	0,5595	0,0165	0,0024	0,0000	0,0000
21	0,6540	0,0288	0,0048	0,0000	0,0000
22	0,7389	0,0479	0,0091	0,0001	0,0000
23	0,8109	0,0755	0,0164	0,0003	0,0000
24	0,8686	0,1136	0,0281	0,0006	0,0000
25	0,9125	0,1631	0,0458	0,0012	0,0000
26	0,9442	0,2244	0,0715	0,0024	0,0000
27	0,9658	0,2964	0,1066	0,0046	0,0000
28	0,9800	0,3768	0,1524	0,0084	0,0000
29	0,9888	0,4623	0,2093	0,0148	0,0000
30	0,9939	0,5491	0,2766	0,0248	0,0000
31	0,9969	0,6331	0,3525	0,0389	0,0001
32	0,9985	0,7107	0,4344	0,0615	0,0002
33	0,9993	0,7793	0,5188	0,0913	0,0004
34	0.9997	0,8371	0,6019	0,1303	0,0009
35	0,9999	0,8839	0,6803	0,1795	0,0018
36	0,9999	0,9201	0,7511	0,2386	0,0033
37	1,0000	0,9470	0,8123	0,3068	0,0060
38	1,0000	0,9660	0,8630	0,3822	0,0105
39	1,0000	0,9790	0,9034	0,4621	0,0176
40	1,0000	0,9875	0,9341	0,5433	0,0284
41	1,0000	0,9928	0,9566	0,6225	0,0443
42	1,0000	0,9960	0,9724	0,6967	0,0666
43	1,0000	0,9979	0,9831	0,7635	0,0967
44	1,0000	0,9989	0,9900	0,8211	0,1356
45	1,0000	0,9995	0,9943	0,8689	0,1841
46	1,0000	0,9997	0,9969	0,9070	0,2421

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Auswahl der 100 Personen kann als Bernoulli-Kette der Länge 100 angesehen werden, denn: 1) Es werden nur zwei Ergebnisse unterschieden: Es liegt eine Allergie vor oder nicht. 2) Die Personen werden zufällig ausgewählt. 3) Da „ohne Zurücklegen gezogen" wird, verändert sich die Wahrscheinlichkeit zwar, aber wegen der großen Gesamtheit so gering, dass dies vernachlässigt werden und die Trefferwahrscheinlichkeit p als konstant angesehen werden kann.	5	10	
b)	X sei die Anzahl der Allergiker unter den 100 Personen. Mithilfe der Formel $P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ oder durch Ablesen aus dem angefügten Ausschnitt aus der Tabelle der summierten Binomialverteilung erhält man: $P(X=33)=P(X\le 33)-P(X\le 32)=0{,}0844$. Die Wahrscheinlichkeit, dass 33 von 100 getesteten Personen Allergiker sind, beträgt etwa 8,4 %. Bei der Bearbeitung der folgenden Aufgabenteile bietet sich ebenfalls die Tabelle an: $P(X\ge 25)=1-P(X\le 24)\ 1-0{,}0281=0{,}9719$. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei 100 getesteten Personen mindestens 25 Allergiker sind, beträgt etwa 97,2 %. $P(X\le 20)=0{,}0024$. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei 100 getesteten Personen höchstens 20 Allergiker sind, beträgt etwa 0,2 %.	15		
c)	• Bezeichnet man mit B: „Beide Elternteile sind Allergiker", E: „Ein Elternteil ist Allergiker" und K: „Kein Elternteil ist Allergiker", so gilt wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit: $P(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$, $P(E)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$ sowie $P(K)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$. • Mit der Bezeichnung A: „Die ausgewählte Person ist Allergiker" ergibt sich aus dem Text: $P(A\|B)=0{,}6$, $P(A\|E)=0{,}4$ sowie $P(A\|K)=0$. Für die nächste Generation folgt dann mithilfe eines Baumdiagramms oder mit einem rein formalen Ansatz: $P(A)=P(A\|B)\cdot P(B)+P(A\|E)\cdot P(E)+P(A\|K)\cdot P(K)=$ $\frac{6}{10}\cdot\frac{1}{9}+\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{9}+0=\frac{11}{45}<\frac{1}{3}$.	5	10	10

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>

• Getestet wird die Nullhypothese H_0: $p \le \frac{1}{3}$.
Hierbei handelt es sich um einen einseitigen Test. Gesucht ist also das kleinste k, für das gilt:
$P\left(X \ge k\right) = \sum_{i=k}^{100} \binom{100}{i} \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{100-i} \le 0{,}05$.

• Bei Benutzung der beigefügten Tabelle nutzt man die Beziehung $P(X \ge k) = 1 - P(X \le k-1)$ aus.
Es ergibt sich $P(X \ge 41) = 0{,}0659$ und $P(X \ge 42) = 0{,}0434$.
Also ist $k = 42$.
Haben 42 oder mehr der 100 untersuchten Kinder eine Allergie, sollte man die Nullhypothese verwerfen.

• Wäre der Anteil an Allergikern unter fünfjährigen Kindern $p = 0{,}4$, so bliebe dies unentdeckt mit der Wahrscheinlichkeit
$\sum_{i=0}^{41} \binom{100}{i} \cdot 0{,}4^i \cdot 0{,}6^{100-i} = 0{,}6225 \approx 62{,}3\,\%$.
Auch diesen Wert entnimmt man der Tabelle.
Dass diese Wahrscheinlichkeit recht hoch ist (> 50%), ist nicht verwunderlich, da der Erwartungswert für $p = 0{,}4$ (also $\mu = 40$) noch zum Annahmebereich der Hypothese H_0 gehört.

</td><td></td><td>30</td><td>15</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>50</td><td>25</td></tr>
</table>

STOCHASTIK 2

III.2 Klassischer Teetassentest

In den Kreisen des englischen Hochadels wird gerne Tee getrunken. Einige Damen rühmen sich sogar, am Geschmack zu erkennen, ob zuerst der Tee in der Tasse war und dann die Milch hinzukam oder ob umgekehrt zuerst die Milch eingegossen wurde und dann der Tee hinzukam.
Während eines nachmittäglichen Teekränzchens wollen einige Damen ihre Fähigkeiten überprüfen. Dazu werden den Damen 10 Tassen Tee mit Milch vorgesetzt, die in zufälliger Reihenfolge mit Milch und Tee gefüllt wurden. Die Anzahl der richtigen Angaben der Reihenfolge wird notiert.

a) Gehen Sie zunächst davon aus, dass eine Dame einfach nur rät, d. h. dass die Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}5$ ist.

   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Dame durch reines Raten genau 7 richtige Angaben macht.

   Bei 9 oder mehr richtigen Angaben will man der entsprechenden Dame eine geschmackliche Begabung zuerkennen:
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Dame, die ja nur rät, diese Begabung zuerkannt werden muss.

b) Nehmen Sie an, dass eine Dame mit gut ausgeprägtem Geschmacksempfinden die Reihenfolge von Tee oder Milch mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}7$ erkennt.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der man ihre Begabung nicht erkennt, wenn die Entscheidungsregel aus Aufgabenteil a), also mindestens 9 richtige Angaben, beibehalten wird.

c) Einmal in Teelaune gekommen, denken sich die Damen einen weiteren Test aus.
   5 Paare von verschieden zubereiteten Tees werden zur Auswahl gestellt. Ein Paar besteht jeweils aus zwei Tassen, die in unterschiedlicher Reihenfolge befüllt wurden.
   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, alle Reihenfolgen richtig zu erkennen. Reines Raten wird vorausgesetzt.

d) Einer Dame ist der ursprüngliche Test mit 10 Tassen nicht gut genug. Sie schlägt einen Test mit 25 Tassen vor, die in beliebiger Reihenfolge zufällig befüllt werden. Eine Person soll als geschmacklich begabt gelten, wenn Sie mindestens M richtige Angaben macht.

   Ermitteln Sie die kleinste Zahl M so, dass man einer Person, die nur durch reines Raten ihre Entscheidung fällt, mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5 % das Prädikat „geschmacklich begabt" zuerkennt.

   Ermitteln Sie entsprechend zum Aufgabenteil b) auch bei diesem Test die Wahrscheinlichkeit, mit der man die Begabung der Dame mit ausgeprägtem Geschmacksempfinden ($p = 0{,}7$) mit dem so konstruierten Test nicht erkennt.

e) Interpretieren Sie die beiden möglichen Versuchsausgänge „eine Dame besteht den Test aus Aufgabenteil d)" bzw. „eine Dame besteht den Test aus Aufgabenteil d) nicht" und nehmen Sie insbesondere Stellung zu den unterschiedlichen Ergebnissen von b) und d).

f) Beim Testen von Hypothesen kommt es sehr stark darauf an, was man für Vorstellungen von der Situation hat und was man darauf aufbauend eigentlich zeigen möchte. In dieser Aufgabe wird z. B. davon ausgegangen, dass eine Trefferwahrscheinlichkeit kleiner als 0,5 nicht sinnvoll ist. Es wurde also im Prinzip einseitig getestet.
   Es kann aber auch bei einem „Teetassentest" durchaus sinnvoll sein, einen zweiseitigen Test durchzuführen.
   Begründen Sie jeweils ein Argument, das für einen einseitigen bzw. einen zweiseitigen Test spricht.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Es sei X die Anzahl der richtig geratenen Reihenfolgen. X ist binomialverteilt mit $p = 0{,}5$. Mithilfe der Tafel zur Binomialverteilung oder der entsprechenden Formel erhält man: $P(X=7)=\binom{10}{7}\cdot 0{,}5^5\cdot 0{,}5^2=0{,}1172$. Die Wahrscheinlichkeit, genau 7 Reihenfolgen richtig zu raten, beträgt etwa 11,7 %. Ebenfalls mit Hilfe der Tafel für die summierte Binomialverteilung oder der entsprechenden Formel erhält man: $P(X\geq 9)=\binom{10}{9}\cdot 0{,}5^{10}+\binom{10}{10}\cdot 0{,}5^{10}=1-0{,}9893=0{,}0107$. Die Wahrscheinlichkeit, dass einer ratenden Dame die Begabung zuerkannt wird, beträgt etwa 1,1 %.	15		
b)	„Nicht erkennen“ bedeutet nach der Entscheidungsregel, dass die entsprechende Dame 8 oder weniger richtige Reihenfolgen bestimmt. Sei Y die Anzahl der richtigen Reihenfolgen mit $p = 0{,}7$, so ist Y wieder binomialverteilt und man erhält mithilfe der Tafel für summierte Binomialverteilungen oder der entsprechenden Formel: $P(Y\leq 8)=\sum_{k=0}^{8}\binom{10}{k}\cdot 0{,}7^k\cdot 0{,}3^{10-k}=1-0{,}1493=0{,}8507$. Die Wahrscheinlichkeit, mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}7$ nicht erkannt zu werden, beträgt etwa 85,1 %.	10		
c)	Bei einem Tassenpaar reicht das Benennen einer Tasse, weil die Versuchsbedingungen bekannt sind. Die Wahrscheinlichkeit für das richtige Benennen von 5 Tassenpaaren beträgt demnach: $0{,}5^5 = 0{,}03125$.		15	
d)	Der Tabelle für summierte Binomialverteilungen entnimmt man unmittelbar für $p = 0{,}5$, dass die Wahrscheinlichkeit, dass man weniger oder gleich k Tassen richtig rät, mit aufsteigendem k für $k = 18$ erstmals größer oder gleich 95% ist. ($P(X_{25}\leq 16)=0{,}9461$ und $P(X_{25}\leq 17)=0{,}9784$) bzw. $P(X_{25}\geq 17)=0{,}0539$ und $P(X_{25}\geq 18)=0{,}0216$. Entsprechend der Fragestellung ist also $M = 18$ zu wählen. Ein nicht signifikantes Ergebnis – d.h. man erkennt die Begabung nicht – liegt vor, wenn $X_{25}\leq 17$. Der Tabelle entnimmt man, dass für $p = 0{,}7$ gilt: $P(X\leq 17)=1-0.5118=0{,}4882$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Die Wahrscheinlichkeit, mit der Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,7 nicht erkannt zu werden, beträgt etwa 48,8 %.		30	
e)	Wenn eine Dame den Test besteht, wird sie mit Verweis auf statistische Signifikanz (auf dem 5 %-Niveau) zu Recht behaupten können, dass sie „geschmacklich begabt ist“. Betrug in Aufgabenteil b) die Wahrscheinlichkeit, dass eine Dame mit ausgeprägter Begabung (p = 0,7*)* nicht erkannt wird, etwa 85 %, so ist dieser Wert bei dem verbesserten Test aus d) zwar auf 49 % gesunken, das ist aber immer noch ein sehr hoher Wert. Wenn also eine Dame den Test nicht besteht, so kann oder wird sie bis auf weiteres durchaus zu Recht behaupten, dass damit nicht widerlegt sei, dass sie den Unterschied der Reihenfolge des Eingießens von Tee und Milch erkennen kann.		10	10
f)	Begründung für einen einseitigen Test: Wahrscheinlichkeiten kleiner als 0,5 liegen unterhalb der reinen Ratewahrscheinlichkeit, was „schlechter als reines Raten“ bedeuten würde. Das macht hier keinen Sinn. Begründung für einen zweiseitigen Test: Wenn eine Dame nur wenige Treffer erzielt, bedeutet das nicht notwendig, dass sie nur rät, sondern möglicherweise auch, dass sie ziemlich gut schmeckt, allerdings die Zuordnungen verwechselt. Wenn man dies vermutet, sollte man zweiseitig testen.			10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20