**ANALYSIS 1**

## I.1 Straßenbahn in Wobelingen

Anwohner eines nahe der Hauptstraße liegenden Wohngebietes klagen über ständigen Fahrzeuglärm. Ihre Beschwerde begründen sie damit, dass diese Straße am Wochenende und auch in Ruhezeiten stark befahren wird. In den Medien werden folgende Werte veröffentlicht, die auszugsweise einer Verkehrszählung am Sonnabend ab 0:00 Uhr entsprechen.

| Uhrzeit (in Stunden) | 8 | 10 | 12 | 13 | 14 | 16 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl der bis dahin gezählte Fahrzeuge | 6000 | 8500 | 9250 | 9500 | 11000 | 15000 | 21000 |

a) Geben Sie mittels Regression eine kubische Modellierungsfunktion $f: t \to f(t)$ an, welche die angegebenen Tabellenwerte näherungsweise erfasst. Dabei sind: $t$ die Zeit (in Stunden) und $f(t)$ die Anzahl der bis zu diesem Zeitpunkt gezählten Fahrzeuge.

Skizzieren Sie den Graphen Ihrer Modellierungsfunktion für den Zeitraum von 4:30 bis 19:30 Uhr in ein Koordinatensystem.

*Für den Fall, dass Sie keine Funktion ermitteln konnten, arbeiten Sie im Folgenden weiter mit:* $f_{Hilf}(t) = 26t^3 - 870t^2 + 10260t - 33600$. **10 P**

b) Untersuchen und beschreiben Sie mit Hilfe des Graphen der Modellierungsfunktion $f$, in welchem zeitlichen Bereich die Funktion $f$ sinnvoll ist und zu welchen Zeiten mit einer besonders hohen bzw. niedrigen Nutzung der Hauptstraße gerechnet werden kann. **10 P**

c) Der Verkehrslärm hängt unter anderem von der Fahrzeugrate (Anzahl der durchfahrenden Fahrzeuge in einer bestimmten Zeit) ab. Die Anwohner berufen sich darauf, dass der vorgeschriebene Höchstwert von 10 Fahrzeugen pro Minute auch in der Mittagszeit von 12:00 Uhr bis 14:00 Uhr permanent überschritten wird und fordern den Einsatz verkehrsberuhigender Maßnahmen. Beziehen Sie sich auch in diesem Aufgabenteil auf die in Aufgabenteil a) gefundene Funktion $f$ bzw. auf die angegebene Ersatzfunktion $f_{Hilf}$.

- Geben Sie eine Gleichung für die Fahrzeugrate an.
- Bestimmen Sie den Wert der Fahrzeugrate um 12:30 Uhr in $\frac{Fahrzeuge}{Stunde}$ und $\frac{Fahrzeuge}{Minute}$.
- Beurteilen Sie die Rechtmäßigkeit der Forderung der Anwohner. **20 P**

d) Die Behörde legt nach Auswertung umfangreicher Daten für die Fahrzeugrate folgende Modellierungsfunktion zugrunde, welche die Fahrzeugrate in der Mittagszeit, d.h. von 12:00 bis 14:00 Uhr, gut nähert :

$$g_a(t) = 60 \cdot \left( a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}(t-7)\right) + 35 - a \right)$$

($t$ : Zeit in Stunden, $g_a(t)$ : Zahl der Fahrzeuge pro Stunde).

Dabei ist $a > 0$ ein Parameter, welcher den Einfluss verkehrsberuhigender Maßnahmen beschreibt.

- Bestätigen Sie zunächst, dass für $a = 12$ im Mittel der Höchstwert von 10 Fahrzeugen pro Minute in der Mittagszeit von 12:00 Uhr bis 14:00 Uhr nicht eingehalten wird.
- Bestimmen Sie den kleinstmöglichen Wert für $a$, sodass der Höchstwert von maximal $10 \frac{Fahrzeuge}{Minute}$ um 12 Uhr nicht überschritten wird.
- Begründen Sie, dass dieses $a$ die Einhaltung des Höchstwertes für die gesamte Mittagszeit garantiert. **15 P**

e) Eine Maßnahme zur Entlastung der Hauptstraße soll der Ausbau des Straßenbahnnetzes sein. Nach dem neuesten Planungsstand (siehe Anlage) endet die linke (westliche) geradlinige Trasse an der Stelle $x = 0$ und lässt sich durch die Funktion $w(x) = -\frac{13}{4}x + 3$ beschreiben.

Die rechte (östliche) geradlinige Anschlussstrecke verbindet die Punkte $B(5|5{,}5)$ und $C(6|11)$ miteinander.

- Geben Sie eine Funktionsvorschrift $\ddot{o} : x \to \ddot{o}(x)$ für den östlichen Streckenverlauf an.
- Skizzieren Sie beide Streckenverläufe in die vorliegende Umgebungsskizze (siehe Anlage). **10P**

f) Das Planungsteam muss nun eine geeignete Verbindung beider linearer Streckenabschnitte finden.

- Beschreiben Sie, welchen (mathematischen) Bedingungen dieses Verbindungsstück $p : x \to p(x)$ genügen muss.
  (*Auf die Berücksichtigung der zweiten Ableitung zur Sicherstellung der Krümmungsruckfreiheit wird hier verzichtet.*)
- Bestimmen Sie eine geeignete ganzrationale Funktion $p : x \to p(x)$ dritten Grades und zeichnen Sie den Graphen in die Umgebungsskizze (siehe Anlage) ein. **20P**

*Für den Fall, dass Sie keine Funktion ermitteln konnten, arbeiten Sie weiter mit:*

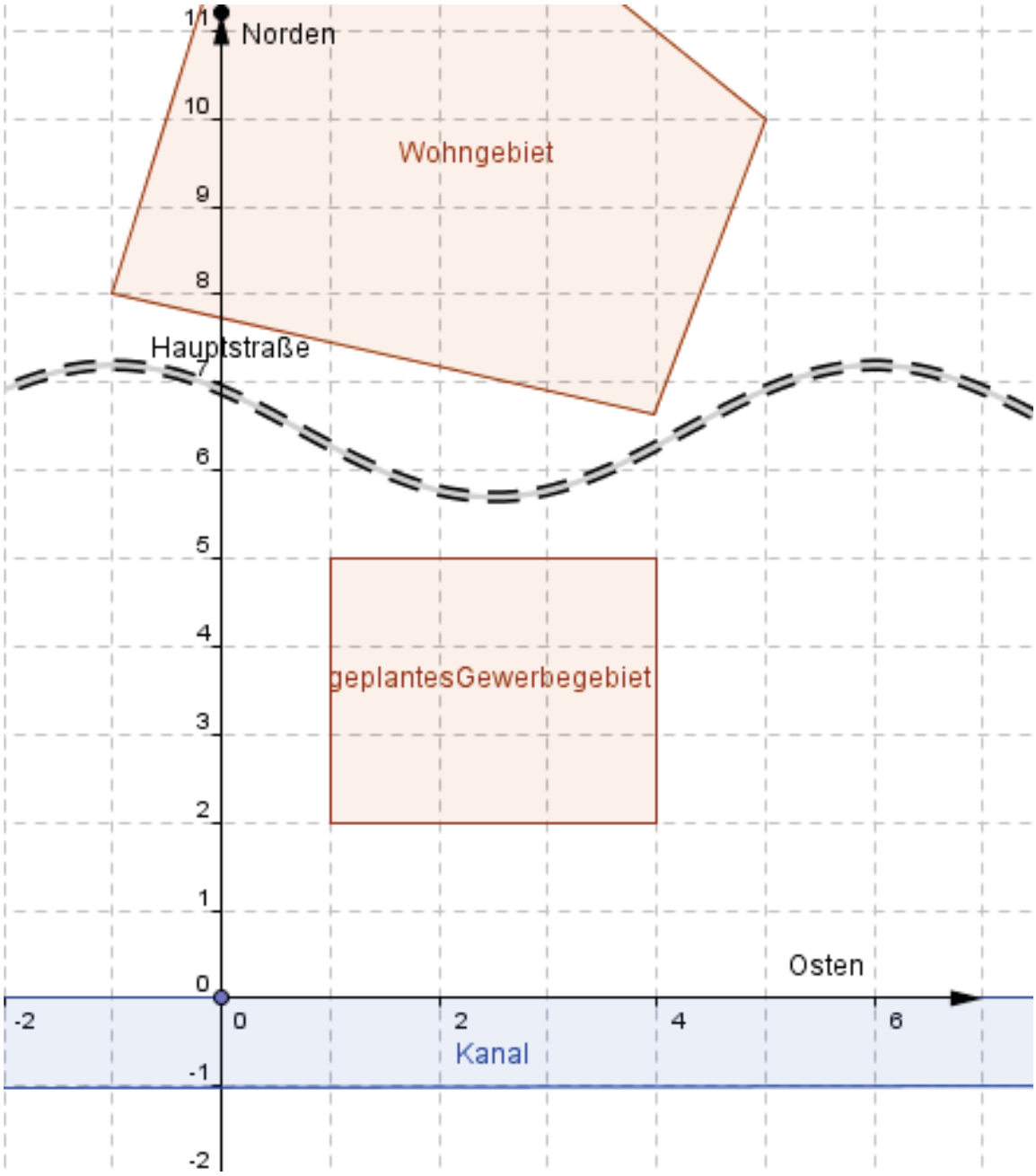
$$q(x) = 0{,}004x^4 + 0{,}01x^3 + 0{,}6x^2 - 3{,}25x + 3\,.$$

g) Das Planungsteam entscheidet sich für den folgenden Trassenverlauf, der ebenfalls die in Aufgabenteil f) erfragten Bedingungen erfüllt:

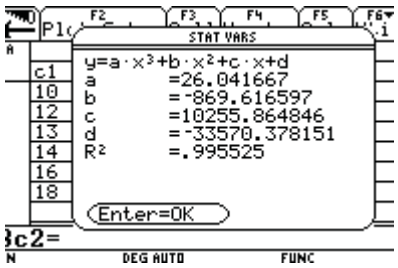
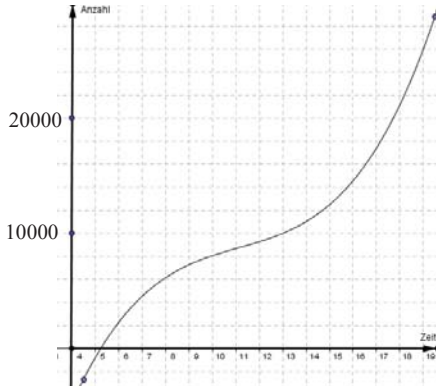
$$v(x) = 0{,}1x^4 - 0{,}95x^3 + 3x^2 - 3{,}25x + 3\,.$$

- Skizzieren Sie auch diesen Trassenverlauf in die Umgebungsskizze (siehe Anlage).
- Vergleichen Sie den Trassenverlauf $v : x \to v(x)$ mit Ihrem Ergebnis $p : x \to p(x)$ (bzw. der Hilfsfunktion $q$) aus Aufgabenteil f.
- Beurteilen Sie die Entscheidung des Planungsteams vor dem Hintergrund des Sachkontextes. Beachten Sie dabei die in der Anlage dargestellten realen Objekte *Wohngebiet*, *geplantes Gewerbegebiet* und *Kanal*. **15 P**

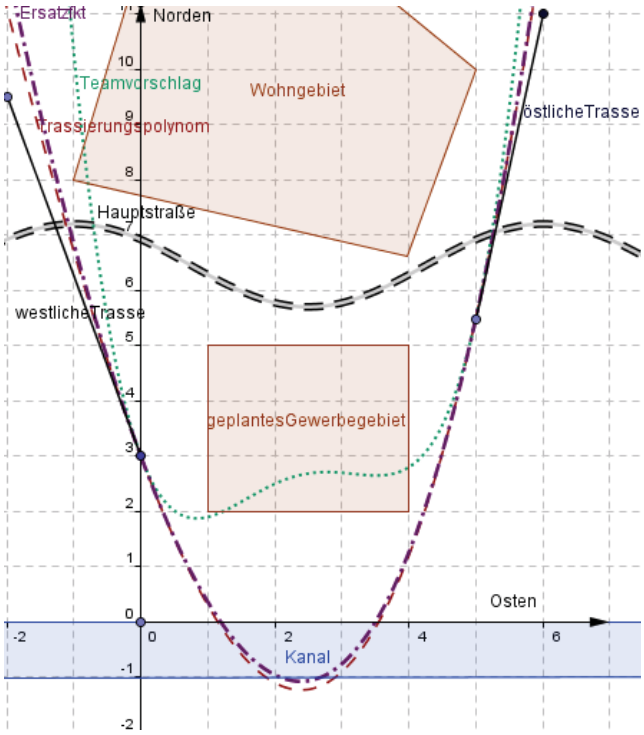
## Anlage zur Aufgabe „Straßenbahn in Wobelingen“



## Erwartungshorizont

| | Lösungsskizze | Zuordnung Bewertung I | II | III |
|---|---|---|---|---|
| a) | Regression ergibt: Darstellung der Regressionskurve (Verlauf des Graphen der Ersatzfunktion ganz ähnlich)<br>  <br><br>  <br><br>*Hinweis 1: Je nach Rechner/Software können die Koeffizienten geringfügig von der o.g. Lösung abweichen.*<br>*Hinweis 2: Arbeiten die Schülerinnen und Schüler mit gerundeten Koeffizienten, z.B* $f_{ungefähr}(t) = 26t^3 - 870t^2 + 10256t - 33570$ *ergeben sich (auch nachfolgend) andere Ergebnisse.*<br>*Die im Folgenden dargestellten Ergebnisse beziehen sich auf die oben angegebenen genaueren Koeffizienten.* | 10 | | |
| b) | Eine wesentliche Einschränkung ist: $f(t) \geq 0$, d.h. vor ca. 5:14 Uhr ist die Funktion unsinnig, weil es negative Anzahlen von Autos nicht gibt.<br>Sieht man sich die Steigung an, kann man davon ausgehen, dass sie vor 8:00 Uhr und nach 18:00 Uhr kaum derartig große Werte annehmen kann, d.h. der Verkehr wird im Tabellenintervall gut beschrieben, außerhalb eher nicht.<br>Die geringste Zunahme der Fahrzeuganzahl erfolgt in der „Mittagszeit“, dort ist die Steigung des Graphen am geringsten, d.h. es befahren nur vergleichsweise wenig Autos die Hauptstraße. | | 10 | |
| c) | Bildet man die Ableitungsfunktion von $f$, so erhält man die Änderung der Fahrzeugzahl pro Zeit, also die Fahrzeugrate<br>$f'(t) \approx 78{,}125 \cdot t^2 - 1739{,}23 \cdot t + 10255{,}9$.<br>Der Wert der Fahrzeugrate um 12:30 Uhr ist mit<br>$f'(12{,}5) \approx 720\left(\frac{Fahrzeuge}{Stunde}\right) \approx 12\left(\frac{Fahrzeuge}{Minute}\right)$<br>größer als der vorgeschriebene Höchstwert.<br>*Die Hilfsfunktion liefert* $f'_{Hilf}(12{,}5) \approx 700\left(\frac{Fahrzeuge}{Stunde}\right) \approx 12\left(\frac{Fahrzeuge}{Minute}\right)$. | | | |

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| | Die Minimalstelle der Ableitungsfunktion $f'$ (entspricht der Wendestelle von $f$) ist $t_{\min} \approx 11{,}13$ (11:08 Uhr).<br>*Für die Hilfsfunktion gilt $t_{\min} \approx 11{,}15$ (11:09 Uhr).*<br>Da $f'$ quadratisch mit Scheitelpunkt bei ca. 11,13, liegt die <u>kleinste</u> <u>zur Mittagszeit</u> gehörende Fahrzeugrate bei 12:00 Uhr mit $f'(12) \approx 635\left(\frac{Fahrzeuge}{Stunde}\right)$, d.h. durchschnittlich ca. 11 Fahrzeugen pro Minute über der Höchstgrenze. Dies bedeutet, dass die Anwohner Recht haben.<br>*Für die Hilfsfunktion gilt analog $f'_{Hilf}(12) = 612\left(\frac{Fahrzeuge}{Stunde}\right)$, d.h. durchschnittlich 10,2 Fahrzeugen pro Minute, was ebenfalls über der Höchstgrenze liegt.*<br>*Anmerkung: Dies wird nicht als Schülerleistung erwartet. Allerdings trifft dies nur für <u>eine</u> Zählung und die approximierende Modellierungsfunktion zu.* | 5 | 5 | 10 |
| d) | Es geht zunächst um Mittelwertbildung mittels Integration und dann um die Division durch 60, weil die Rate auf die Minute bezogen wird:<br>$\frac{\left(\int_{12}^{14} g_{12}(t)dt\right)\cdot\frac{1}{2}}{60} \approx 12{,}2$ ,<br>also befahren in der Mittagszeit von 12 bis 14 Uhr im Mittel mehr als 12 Fahrzeuge pro Minute die Hauptstraße.<br>Zu lösen ist die Gleichung $g_a(12)/60 = 10$ mit dem Ergebnis: $a \approx 14{,}64$ .<br>Der sinusförmige Verlauf von $g_a$ hat seine Maxima unabhängig von $a$ bei $t = 9, 17, 25$ , … und seine Minima bei 5, 13, 21, … . Der Graph ist – ebenfalls unabhängig von $a$ – achsensymmetrisch zu den Parallelen zur $y$-Achse durch all diese Stellen. Die Funktion $g_a$ hat also an den Rändern 12 und 14 des betrachteten Intervalls die größten (gleichen) Werte. Deshalb wird der Wert von $\frac{g_a}{60}$ im ganzen betrachteten Zeitintervall ebenso wie bei 12 den Wert 10 nicht überschreiten.<br>*In dieser Schärfe wird die Argumentation von den Schülern nicht erwartet, aber eine Grundvorstellung dieser Situation muss schon aus der Argumentation erkennbar sein.* | | 10 | 5 |
| e) | Für die rechte Trasse (also den östlichen Verlauf) ergibt sich $\ddot{o}: x \to \frac{11}{2}x - 22$<br>(bzw. $\ddot{o}(x) = \frac{11}{2}x - 22$ ).<br>*Zur Darstellung vgl. Abbildung in Lösung g).* | 10 | | |

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| f) | Gesucht ist ein knickfreier Anschluss durch eine ganzrationale Funktion $p$. Es muss der Anschluss und ein knickfreier Übergang gewährleistet werden,<br>d.h. $\begin{matrix} w(0)=p(0) \\ \ddot{o}(5)=p(5) \end{matrix}$ Anschluss und $\begin{matrix} w'(0)=p'(0) \\ \ddot{o}'(5)=p'(5) \end{matrix}$ Knickfreiheit.<br>Ein möglicher Ansatz lautet: $p(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d$<br>Die obigen vier Bedingungen führen zu einem LGS für $a$, $b$, $c$ und $d$.<br>Löst man dieses, ergibt sich: $p(x)=0{,}05x^3+0{,}5x^2-3{,}25x+3$. | | 20 | |
| g) | Mögliche Schülerantworten wären:<br>Beide Trassen erfüllen die Anschluss- und Knickfreiheitsbedingung.<br>Beide Trassen meiden das Wohngebiet.<br>Der Graph zu $p$ schneidet die $x$-Achse, d.h. die berechnete Trassenführung überquert den Kanal zweimal, beeinträchtigt aber nicht den Ausbau des Gewerbegebietes (gleiches gilt für die Ersatzfunktion $q$).<br>Die vorgegebene Trasse $v$ verläuft oberhalb des Kanals, schneidet aber ein Stück vom geplanten Gewerbebereich ab.<br>$v$ ist bautechnisch leichter zu realisieren und (wahrscheinlich) kostengünstiger.<br>  <br> | 5 | | 10 |
| | Insgesamt 100 BWE | 30 | 45 | 25 |

**Analysis 2**

## I.2 Fischexperiment

Von einem Forscherteam werden in einem See einige Fische einer bisher dort nicht lebenden Art ausgesetzt. Die Anzahl der Fische wird regelmäßig geschätzt. Im Folgenden sei $t$ die Zeit in Wochen seit dem Aussetzen der Fische. In den ersten 20 Wochen werden folgende Werte angegeben:

| $t$ in Wochen | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl der Fische | 60 | 90 | 135 | 200 | 300 |

Die Werte sind im beiliegenden Koordinatensystem (siehe Anlage) grafisch dargestellt. Zur Auswertung des Experiments soll die Anzahl der Fische in Abhängigkeit von der Zeit $t$ durch eine Modellfunktion beschrieben werden. Für die Modellierung stehen zwei Funktionstypen – eine lineare Funktion und eine Exponentialfunktion – zur Diskussion.

a) Geben Sie mithilfe einer linearen und einer exponentiellen Regression zwei Funktionen an, welche die Anzahl der Fische in Abhängigkeit von der Zeit $t$ ($0 \le t \le 20$) näherungsweise beschreiben.
Skizzieren Sie die zugehörigen Graphen in das beiliegende Koordinatensystem.
Entscheiden Sie, welche der beiden Funktionen den Sachverhalt besser beschreibt. **20 P**

Das Forscherteam entscheidet sich für folgende Modellfunktion: $f: t \to 40 \cdot e^{0{,}101 \cdot t}$.

b) Berechnen Sie mithilfe der Modellfunktion $f$
- die Anzahl der ausgesetzten Fische und
- den Zeitpunkt, ab welchem die Anzahl der Fische über 500 liegt.

Bestimmen Sie den Zeitraum, in welchem sich die Anzahl der Fische jeweils verdoppelt (Verdoppelungszeit). **15 P**

Die Forscher beobachten den Fischbestand im See weitere 20 Wochen. Sie stellen fest, dass die Anzahl der Fische in der zweiten Phase des Experiments nicht mehr durch die Funktion $f$ beschrieben werden kann. Das Forscherteam wählt zur Beschreibung der Fischanzahl während der zweiten Phase des Experiments (also für $20 \le t \le 40$) eine Funktion $g$ mit folgendem Funktionsterm:

$$g(t) = 600 - c \cdot e^{-k \cdot t} \quad \text{mit } c > 0 \text{ und } k > 0.$$

c) Bestimmen Sie die Parameter $c$ und $k$ so, dass sich der Funktionsgraph von $g$ an der Stelle $t = 20$ knickfrei an den Graphen der Funktion $f$ anschließt. Runden Sie die Ergebnisse auf drei Nachkommastellen.

*Hinweis: Wenn Sie keine Ergebnisse für die Parameter c und k bestimmen konnten, arbeiten Sie mit der Ersatzfunktion* $g_{Ersatz}(t) = 600 - 2243{,}941 \cdot e^{-0{,}101 \cdot t}$ *weiter.* **15 P**

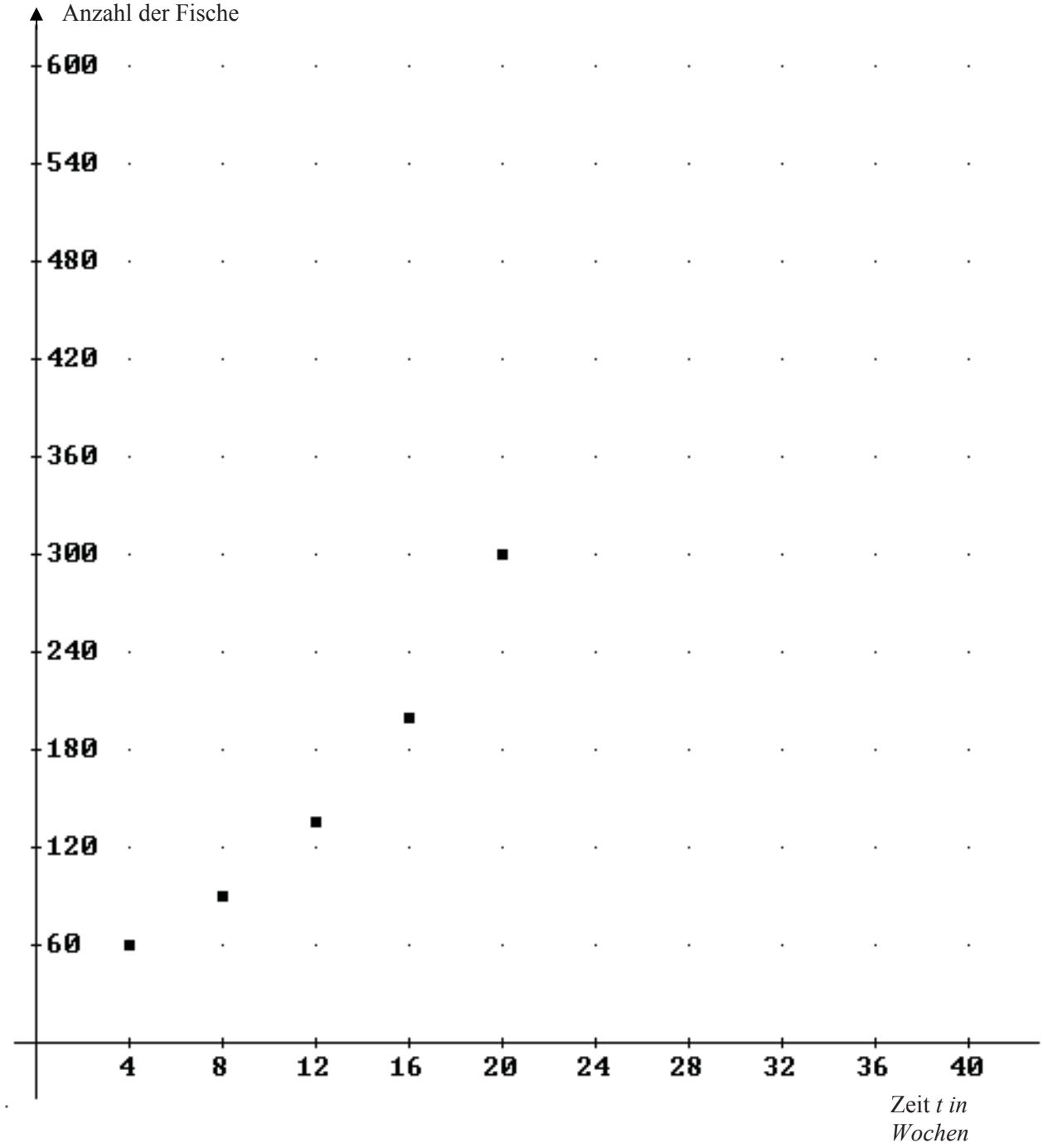
d)
- Skizzieren Sie den Graphen von $g$ ebenfalls in das beiliegende Koordinatensystem.
- Bestimmen Sie mithilfe der Modellfunktion $g$ die Anzahl der Fische, die man für sehr große Zeitwerte erwarten kann.
- Interpretieren Sie den Parameter $k$ in der Modellfunktion $g$ in Bezug auf die Entwicklung der Fischpopulation. **15 P**

Für die Nahrungsversorgung **eines** Fisches braucht man pro Woche eine Packung Fischfutter. Die Forscher möchten vor Beginn des Experiments die zur Versuchsdurchführung insgesamt benötigte Menge an Fischfutter besorgen.

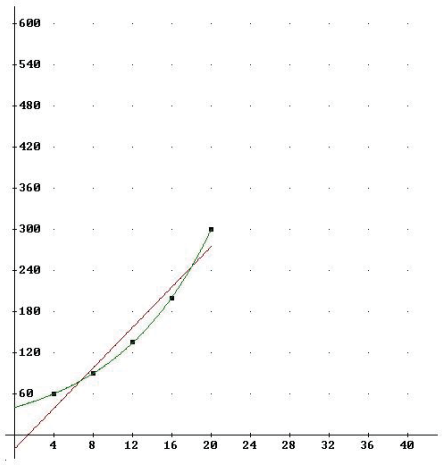
e) Ermitteln Sie mithilfe der Modellfunktionen $f$ und $g$, wie viele Fischfutterpackungen benötigt werden, um die Fische im See über den Zeitraum von 0 bis 40 Wochen ausreichend mit Nahrung zu versorgen. **15 P**

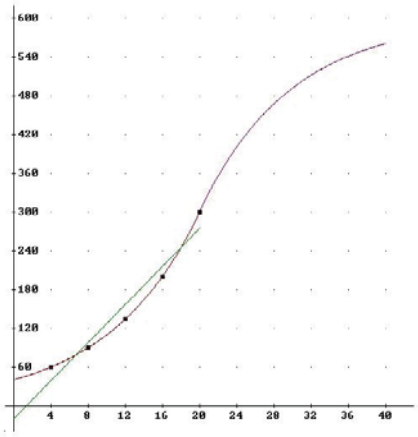
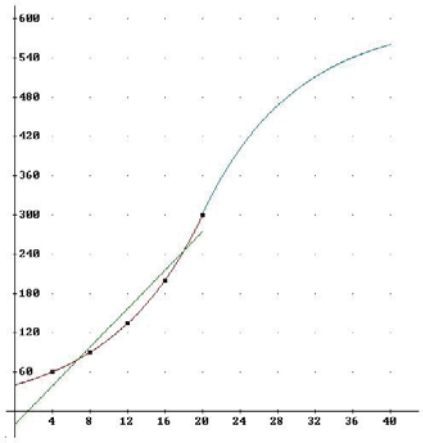
f) Bestimmen Sie mithilfe der Modellfunktionen $f$ und $g$, zu welchem Zeitpunkt die Wachstumsgeschwindigkeit der Fischpopulation maximal ist.
(Hinweis: Eine Argumentation, die sich ausschließlich auf den Verlauf der Graphen von $f$ und $g$ bezieht, ist nicht ausreichend.) **20 P**

## Anlage zur Aufgabe "Fischexperiment"



## Erwartungshorizont

| | Lösungsskizze | Zuordnung Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| a) | Eine lineare Regression liefert folgende Funktionsgleichung:<br>$l(t) = 14,75x - 20$.<br>Eine exponentielle Regression liefert folgende näherungsweise Funktionsgleichung: $k(t) \approx 40,249 \cdot e^{0,100 \cdot t} \approx 40,249 \cdot 1,105^t$.<br>Skizze:<br>  <br><br>Die Skizze zeigt:<br>Die lineare Funktion beschreibt die vorliegenden Datenpunkte nicht besonders gut. Zudem liefert die lineare Funktion für $0 < t < 1,3$ negative Funktionswerte, dies ergibt im Sachzusammenhang keinen Sinn.<br>Die Exponentialfunktion beschreibt die Datenpunkte wesentlich besser: Die Abweichungen zwischen den gegebenen Punkten und dem Funktionsgraphen sind sehr gering. | 15 | 5 | |
| b) | Es gilt $f(0) = 40$. Es wurden demnach 40 Fische ausgesetzt.<br>Die Gleichung $f(t) = 500$ hat als Lösung $t \approx 25,01$. Die Anzahl der Fische übersteigt also nach gut 25 Wochen erstmals die 500-Grenze.<br>Die Gleichung $e^{0,101 \cdot t} = 2$ hat als Lösung $t \approx 6,86$. Die Verdoppelungszeit beträgt also ungefähr 7 Wochen. | 10 | 5 | |
| c) | Der knickfreie Anschluss führt auf die beiden Bedingungen:<br>I. $f(20) = g(20)$<br>II. $f'(20) = g'(20)$<br>Das Gleichungssystem hat als Lösung : $c \approx 2297,116$ und $k \approx 0,102$. | | 15 | |

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| d) | Skizze mit Funktion $g$:   Skizze mit Ersatzfunktion:   Der Ausdruck $e^{-0{,}102\cdot t} > 0$ (Ersatzfunktion $e^{-0{,}101\cdot t} > 0$) in der Funktionsvorschrift von $g$ wird für größer werdendes $t$ immer kleiner bzw. strebt gegen Null. Somit strebt der Funktionsterm gegen 600.<br>Die Anzahl der Fische nähert sich daher für größere Zeitwerte $t$ immer mehr der Grenze 600.<br>Der Parameter $k$ bestimmt, wie schnell sich die Funktionswerte von $g$ (also die Anzahl der Fische) der Schranke 600 nähern: Je größer $k$ ist, desto näher liegen die Funktionswerte (für festes $t > 0$) bei dem Wert 600. | 5 | 5 | 5 |
| e) | Es gilt: $\dfrac{\int_0^{20} f(t)dt + \int_{20}^{40} g(t)dt}{40} \approx 301$.<br>(*Rechnung mit der Ersatzfunktion liefert ebenfalls ca. 301.*)<br>Demnach beträgt die mittlere Anzahl der im See lebenden Fische während des Experiments ca. 301. Es werden also $301 \cdot 40 = 12040$ Packungen Fischfutter benötigt.<br>*Möglich ist auch die direkte Bestimmung ohne Verwendung des Mittelwertes.* | | 15 | |

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| f) | Die Fischpopulation wird durch folgende zusammengesetzte Funktion beschrieben: | | | |

$$k(t) \approx \begin{cases} 40 \cdot e^{0{,}101 \cdot t} & \text{in Phase I für } t < 20 \\ 600 - 2297{,}116 \cdot e^{-0{,}102 \cdot t} & \text{in Phase II für } t \geq 20 \end{cases}.$$

Die Wachstumsgeschwindigkeit entspricht demnach:

$$k'(t) \approx \begin{cases} 4{,}04 \cdot e^{0{,}101 \cdot t} & \text{in Phase I für } t < 20 \\ 234{,}306 \cdot e^{-0{,}102 \cdot t} & \text{in Phase II für } t \geq 20 \end{cases}.$$

Die 2. Ableitung lautet:

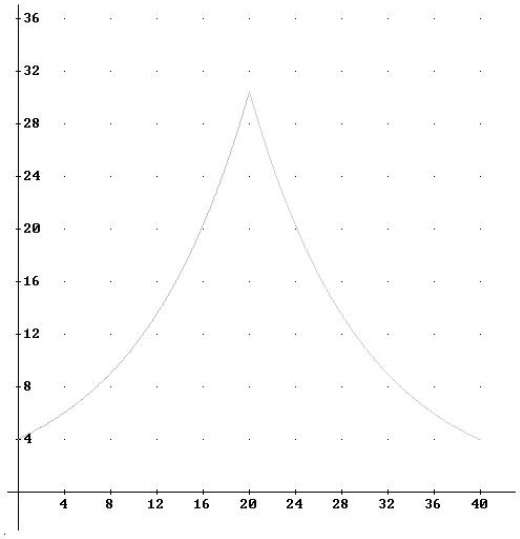
$$k''(t) \approx \begin{cases} 0{,}40804 \cdot e^{0{,}101 \cdot t} & \text{in Phase I für } t < 20 \\ -23{,}899 \cdot e^{-0{,}102 \cdot t} & \text{in Phase II für } t \geq 20 \end{cases}.$$

Die 2.Ableitung hat keine Nullstellen. Um das Maximum der Wachstumsgeschwindigkeit (also von *k*') zu bestimmen, muss daher ein anderer Lösungsweg gewählt werden:

- Die zweite Ableitung von $k$ ist für $t < 20$ (bzw. die erste Funktion für alle $t$) positiv, d.h. die erste Ableitung – die Wachstumsgeschwindigkeit - steigt streng monoton (der Graph von $k$ ist linksgekrümmt). Ebenso gilt: Die zweite Ableitung von $k$ ist für $t > 20$ (bzw. die zweite Funktion für alle $t$) negativ d.h. die erste Ableitung – die Wachstumsgeschwindigkeit - fällt streng monoton (der Graph von $k$ ist rechtsgekrümmt).
  Also liegt das Maximum der (stetigen) Wachstumsgeschwindigkeit im Übergang bei $t = 20$.

Die Vermutung, dass die Wachstumsgeschwindigkeit für $t = 20$ maximal ist, sollte von den Prüflingen durch ein ähnliches Argument bestätigt werden, oder auch z. B:

- anhand der grafischen Darstellung der ersten Ableitung:



| | **Lösungsskizze** | Zuordnung Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |

Aus der Grafik ist abzulesen, dass die Wachstumsgeschwindigkeit für $t = 20$ ihr Maximum (Spitze) erreicht.

- Eine Wertetabelle für die erste Ableitung bestätigt die Vermutung (Werte gerundet):

| *t* | *k'(t)* |
|---|---|
| 19,8 | 29,8 |
| 19,9 | 30,1 |
| 20 | 30,5 |
| 20,1 | 30,2 |
| 20,2 | 29,9 |

Bei der Lösung mit der Ersatzfunktion $g_{Ersatz}$ ergeben sich folgende Änderungen:

Die Fischpopulation wird durch folgende zusammengesetzte Funktion beschrieben:

$$k(t) = \begin{cases} 40 \cdot e^{0,101 \cdot t} & \text{in Phase I für } t < 20 \\ 600 - 2243,941 \cdot e^{-0,101 \cdot t} & \text{in Phase II für } t \geq 20 \end{cases}.$$

Die Wachstumsgeschwindigkeit entspricht demnach:

$$k'(t) \approx \begin{cases} 4,04 \cdot e^{0,101 \cdot t} & \text{in Phase I für } t < 20 \\ 226,638 \cdot e^{-0,101 \cdot t} & \text{in Phase II für } t \geq 20 \end{cases}.$$

Die 2. Ableitung lautet:

$$k''(t) \approx \begin{cases} 0,40804 \cdot e^{0,101 \cdot t} & \text{in Phase I für } t < 20 \\ -22,890 \cdot e^{-0,101 \cdot t} & \text{in Phase II für } t \geq 20 \end{cases}.$$

- Wertetabelle für die erste Ableitung (Werte gerundet):

| *t* | *k'(t)* |
|---|---|
| 19,8 | 29,8 |
| 19,9 | 30,1 |
| 20 | 30,5 |
| 20,1 | 29,8 |
| 20,2 | 29,5 |

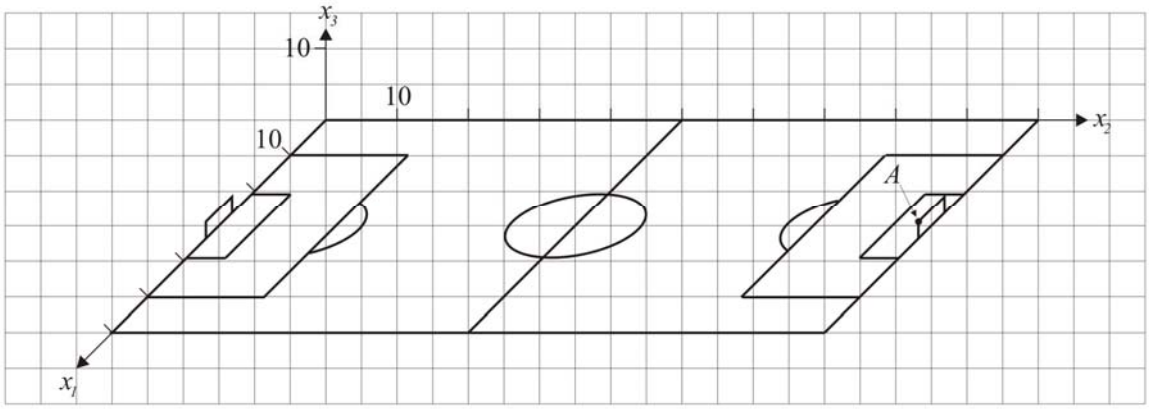
In Phase I ist die zweite Ableitung – welche die Zunahme der Wachstumsgeschwindigkeit beschreibt – immer positiv (da $e^{0,101 \cdot t} > 0$), in Phase 2 negativ (da $e^{-0,101 \cdot t} > 0$). Demnach nimmt die Wachstumsgeschwindigkeit *k'* für $t < 20$ kontinuierlich zu und für $t > 20$ kontinuierlich ab. Das Maximum von *k'* wird also bei $t = 20$ erreicht. — 20

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Insgesamt 100 BWE | 30 | 45 | 25 |

**LA / AG1**

## II.1 Fußball

Im Folgenden wird ein Fußballfeld der Länge 100 m und der Breite 60 m betrachtet. Ein Fußballtor hat eine Breite von 7,32 m und eine Höhe von 2,44 m. In der Abbildung ist zu erkennen, wie das Fußballfeld in einem Koordinatensystem positioniert ist: Eine Spielfeldecke liegt im Ursprung, die Seitenlinien verlaufen entlang den Achsen. Eine Einheit in dem Koordinatensystem entspricht 1 m in der Realität. Im Verlauf der folgenden Aufgabe wird angenommen, dass der Ball punktförmig ist.




a) Geben Sie die Koordinaten der mit $A$ bezeichneten oberen Ecke des rechten Tores an. **5P**

Begeht eine Mannschaft einen Regelverstoß, kann es einen Freistoß für die gegnerische Mannschaft geben. Dabei wird der ruhende Ball aus einer auf dem Rasen befindlichen Position geschossen.

b) Ein Freistoß werde von der Position (49 | 21 | 0) in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} -20 \\ -25 \\ 4 \end{pmatrix}$ auf das linke Tor geschossen. Es sei angenommen, dass der Ball so scharf geschossen wird, dass er sich auf einer geraden Linie bewegt und durch nichts und niemanden in seiner Bahn behindert wird. Geben Sie eine Gleichung derjenigen Geraden an, auf der sich der Ball bewegt. Untersuchen Sie, ob dieser Schuss in das linke Tor geht. **15P**

Bei Fernsehübertragungen von Fußballspielen kann es zu perspektivischen Verzerrungen kommen. So ist beispielsweise auf dem Bildschirm nicht immer gut zu erkennen, wie weit der Ball am Tor vorbeifliegt. Mit der Problematik der Perspektive beschäftigen sich die folgenden Aufgabenteile.

c) Bei einem abendlichen Fußballspiel verhelfen die Schattenwürfe hervorgerufen durch Flutlichtscheinwerfer zu einem räumlichen Eindruck. In den Punkten $L_1(0 \mid 0 \mid 40)$, $L_2(60 \mid 0 \mid 40)$, $L_3(60 \mid 100 \mid 40)$ und $L_4(0 \mid 100 \mid 40)$ befinden sich Scheinwerfer; zur Vereinfachung sei angenommen, dass diese Lichtquellen punktförmig sind. Am Tage nach dem Spiel wird in der Presse ein Foto veröffentlicht, auf dem man zwei der vier durch die Scheinwerfer erzeugten Ballschatten erkennen kann, nämlich $S_1(50 \mid 30 \mid 0)$ und $S_2(35 \mid 30 \mid 0)$. Dabei wird der Schatten $S_1$ vom Scheinwerfer $L_1$ und der Schatten $S_2$ vom Scheinwerfer $L_2$ erzeugt. Bestimmen Sie aus diesen Angaben die Koordinaten der Ballposition zum Zeitpunkt, als das Foto geschossen wurde. **15P**

d) Findet ein Fußballspiel bei Tageslicht statt, wird kein Flutlicht eingesetzt. Es ist jedoch denkbar, auf eine andere Weise die Position des Balles im dreidimensionalen Raum zu bestimmen. Dazu wird je ein Lasermessgerät in den Punkten $P_1(0 \mid 0 \mid 30)$, $P_2(60 \mid 0 \mid 35)$, $P_3(60 \mid 100 \mid 35)$ und $P_4(0 \mid 100 \mid 35)$ positioniert, das erste Messgerät ist also etwas tiefer als die anderen drei angebracht. Die Laserstrahlen "verfolgen" den Ball und dadurch kann zu jedem Zeitpunkt der Abstand des Balles – in Metern – zu jedem der vier Messgeräte mit einer Genauigkeit von einer Nachkommastelle ermittelt werden.
Zu einem bestimmten Zeitpunkt ergeben sich die folgenden Abstände des Balles zu den Messpunkten:

| Messpunkt | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ |
|---|---|---|---|---|
| Abstand des Balles zum Messpunkt | 52,4 m | 34,0 m | 84,6 m | 94,6 m |

Ermitteln Sie aus diesen Angaben die Position des Balles zu dem entsprechenden Zeitpunkt. Geben Sie die Koordinaten gerundet auf ganze Meter an. **20 P**

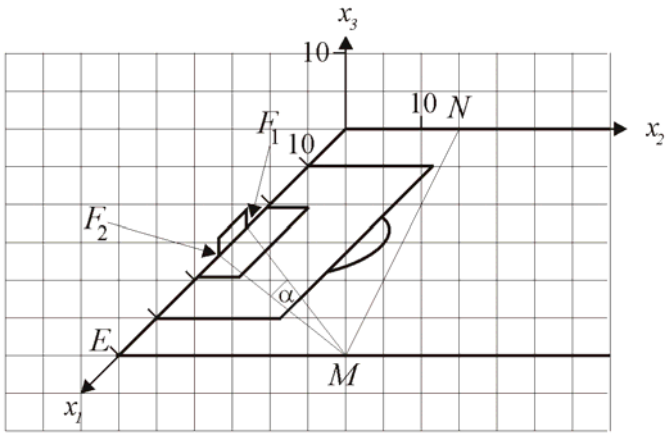
e) Ein Torwart kickt zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einem gewaltigen Schuss den Ball von einem Punkt nahe des rechten Tors in Richtung des gegnerischen Tors. Der Ball bewegt sich dadurch bogenförmig über das Spielfeld. Während des Fluges befindet sich der Ball zur Zeit $t$ (in Sekunden) im Punkt $B_t$ mit den Koordinaten $(4{,}4t + 15 \mid -20{,}8t + 90 \mid -4{,}9t^2 + 21{,}2t + 1)$.

h) In der folgenden Tabelle fehlen die Koordinaten für $t = 1$. Ergänzen Sie diese, zeichnen Sie die fünf Punkte in das Koordinatensystem in der Anlage ein und skizzieren Sie dann die Flugbahn für $t \in [0;4]$.

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $B_t$ | (15\|90\|1) | | (23,8\|48,4\|23,8) | (28,2\|27,6\|20,5) | (32,6\|6,8\|7,4) |

- Eine Möglichkeit, auf dem Fernsehbildschirm einen räumlichen Eindruck von dieser Flugkurve zu bekommen, ist, auf dem Bildschirm mit technischen Mitteln den bewegten Ball virtuell senkrecht von oben auf die Spielfläche zu projizieren. Gehen Sie davon aus, dass diese senkrechte Projektion der Flugkurve einen Teil einer Geraden darstellt. Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Geraden. Zeichnen Sie denjenigen Abschnitt dieser Geraden, der zur Flugzeit $t \in [0;4]$ gehört, ebenfalls in das Koordinatensystem in der Anlage ein. **20 P**

f) Im Rahmen von Fernsehübertragungen wird bei Freistößen häufig die Entfernung zum Tor angegeben. Ebenfalls wichtig wäre zusätzlich die Angabe eines *Torwinkels*. Dieser Winkel hat seinen Scheitel in der Ballposition (im Beispiel in der Abbildung auf der nächsten Seite ist dies der Punkt $M$), seine Schenkel sind die Halbgeraden durch den Scheitel und die beiden Torpfostenfußpunkte $F_1$ und $F_2$. Ist der Torwinkel klein, ist das Tor schwerer zu treffen als bei einem größeren Winkel. In der zweidimensionalen Fernsehdarstellung des dreidimensionalen Spielgeschehens unterliegt der Torwinkel einer gewissen Verzerrung. Betrachtet man beispielsweise einen Freistoß auf das linke Tor vom Punkt $M(60|30|0)$ und misst in der folgenden zweidimensionalen Abbildung die Größe des Torwinkels, erhält man einen Wert von ca. 14°. Die wahre Größe dieses Winkels ist jedoch kleiner.

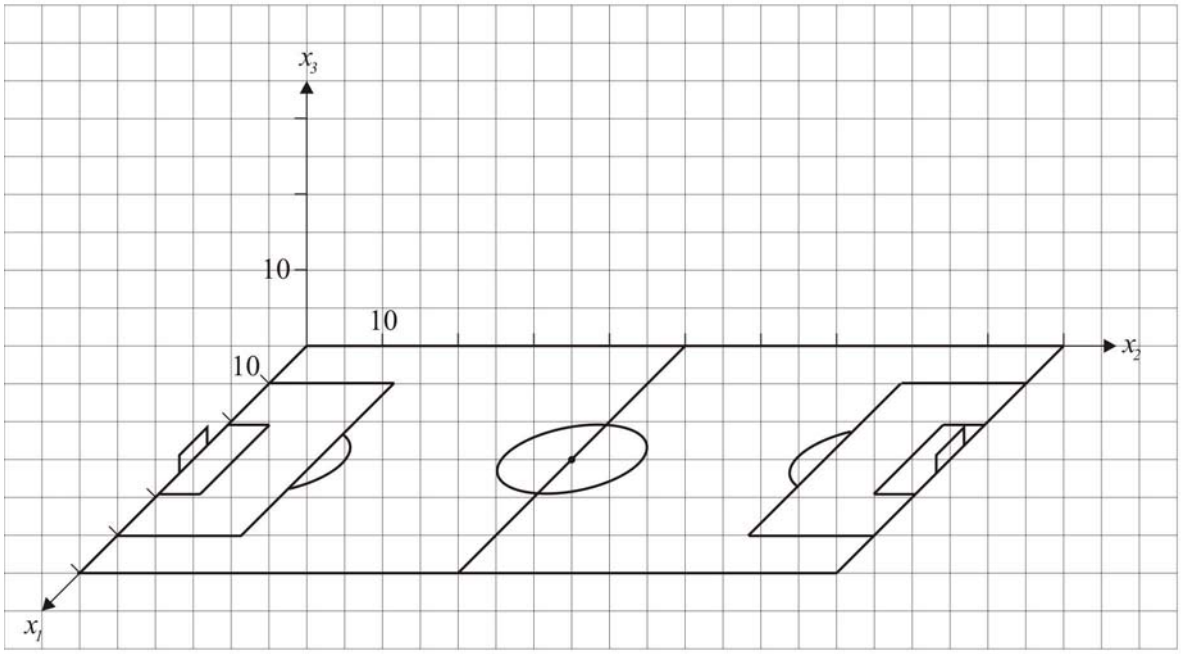



- Bestätigen Sie, dass die Positionen der Pfostenfußpunkte des linken Tores durch $F_1(26{,}34 \mid 0 \mid 0)$ bzw. $F_2(33{,}66 \mid 0 \mid 0)$ gegeben sind.

- Bestimmen Sie rechnerisch die wahre Größe des Torwinkels $\alpha$ (in Grad).

- Ein Angriffsspieler läuft vom Punkt $M(60 \mid 30 \mid 0)$ in Richtung auf den Punkt $N(0 \mid 15 \mid 0)$ auf der gegenüberliegenden Seitenauslinie zu. Bestimmen Sie <u>ohne Verwendung einer Ableitung</u> den größten Torwinkel (in Grad), den der Spieler im Verlaufe seines Weges erreichen kann. Geben Sie diesen Winkel mit einer Genauigkeit von einer Nachkommastelle an. **25P**

## Anlage zur Aufgabe „Fußball“



## Erwartungshorizont

| | Lösungsskizze | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| a) | Die Koordinaten des Punktes $A$ sind (33,66 \| 100 \| 2,44). | 5 | | |
| b) | Der Ball bewegt sich auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 49 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -20 \\ -25 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$.<br><br>Zu untersuchen ist, wo diese Gerade die $x_1$-$x_3$-Ebene schneidet.<br>In diesem Punkt muss gelten $x_2 = 0$, also $21 - 25\lambda = 0$ und somit $\lambda = 0{,}84$.<br><br>Der gesuchte Schnittpunkt hat also die Koordinaten:<br>( 49 – 0,84·20 \| 21 – 0,84·25 \| 0 + 0,84·4 ) = (32,2 \| 0 \| 3,36)<br>Der Ball fliegt daher *über* das Tor. | 5 | 10 | |
| c) | Der Ball liegt auf dem Schnittpunkt zweier Geraden gebildet jeweils aus einer Scheinwerfer- und der zugehörigen Schattenposition:<br>$g_{L_1S_1}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0-50 \\ 0-30 \\ 40-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -50 \\ -30 \\ 40 \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$<br>$g_{L_2S_2}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 60-35 \\ 0-30 \\ 40-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 25 \\ -30 \\ 40 \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R}$<br>Der Schnittpunkt wird durch Gleichsetzen ermittelt:<br>$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -50 \\ -30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 25 \\ -30 \\ 40 \end{pmatrix}$<br>Dieses lineare Gleichungssystem hat die Lösungen $\lambda = \mu = -0{,}8$,<br>woraus sich für die Koordinaten der gesuchten Ballposition ergibt<br>( 60 – 0,8·25 \| 0 + 0,8·30 \| 40 – 0,8·40 ) = (40 \| 24 \| 8) | | 15 | |
| d) | Der Ball befindet sich im Idealfall im Schnittpunkt von vier Kugeln, deren Mittelpunkte in den vier Messpunkten liegen und deren Radien durch die vier Entfernungen gegeben sind.<br>Die Gleichungen dieser Kugeln sind:<br>$k_1: \quad x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 30)^2 = 52{,}4^2$<br>$k_2: \quad (x_1 - 60)^2 + x_2^2 + (x_3 - 35)^2 = 34{,}0^2$<br>$k_3: \quad (x_1 - 60)^2 + (x_2 - 100)^2 + (x_3 - 35)^2 = 84{,}6^2$<br>$k_4: \quad x_1^2 + (x_2 - 100)^2 + (x_3 - 35)^2 = 94{,}6^2$ | | | |

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| | Hilfsweise wird das lineare Ersatzsystem<br>$k_1 - k_2$<br>$k_2 - k_3$<br>$k_3 - k_4$<br>gelöst, welches zur gerundeten Ballposition (45 \| 20 \| 12) führt.<br><br>*Anmerkung: Aufgrund der nur gerundeten Entfernungsangaben ist das obige nichtlineare Gleichungssystem unlösbar, deshalb wird das lineare Ersatzsystem gelöst. Eine diesbezügliche Begründung oder Erläuterung ist nicht erforderlich.* | | 10 | 10 |
| e) | $t$: 1<br>$B_t$: (19,4\|69,2\|17,3)<br><br>Die Gleichung der Projektion erhält man beispielsweise als Gleichung der Geraden durch die senkrechten Projektionen der Punkte $B_0$ und $B_4$; durch diese Projektionen nehmen die $x_3$-Koordinaten den Wert null an, während die anderen Koordinaten unverändert bleiben.<br>Eine mögliche Parameterform der Gleichung der Geraden durch (15 \| 90 \| 0) und (32,6 \| 6,8 \| 0) ist<br>$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 90 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 32,6-15 \\ 6,8-90 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 90 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 17,6 \\ -83,2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$<br>*Anmerkung 1: Zulässig sind auch Gleichungsdarstellungen in der $x_1$-$x_2$ - Ebene, etwa* $x_2 = -\frac{52}{11}x_1 + \frac{1770}{11}$<br>*Anmerkung 2: Ein korrekturfreundliches Koordinatensystem in derselben Größe wie in der Anlage für die Prüflinge mit den eingezeichneten Graphen befindet sich im Anschluss an diesen tabellarischen Erwartungshorizont.* | 10 | 10 | |
| f) | Aus den Größenangaben im Kopf der Aufgabenstellung bestimmt sich die $x_1$-Koordinate von $F_1$ aus der Rechnung (60 – 7,32) : 2 = 26,34.<br>Die $x_1$-Koordinate von $F_2$ ergibt sich durch die Addition der Torbreite zum Wert 26,34. Alle anderen Koordinaten sind 0, weil die Punkte auf der $x_1$ - Achse liegen.<br>Gesucht ist der Winkel $\alpha$ zwischen den Vektoren $\overrightarrow{MF_1}$ und $\overrightarrow{MF_2}$.<br>*Diesen Winkel kann man entweder mit Mitteln der Mittelstufenmathematik oder über das Skalarprodukt bestimmen.* | | | |

| | Lösungsskizze | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |

*1. Weg:*

Der gesuchte Winkelgröße ist die Differenz folgender beider Winkelgrößen:

$$\alpha_1 = \sphericalangle F_1ME \text{ und } \alpha_2 = \sphericalangle F_2ME\,.$$

Dabei bezeichnet $E$ die Spielfeldecke links vorne, also $E(60 \mid 0 \mid 0)$.

$$\tan(\alpha_1) = \frac{60-26{,}34}{30} \Rightarrow \alpha_1 \approx 48{,}29°$$

Es gilt $\tan(\alpha_2) = \dfrac{60-33{,}66}{30} \Rightarrow \alpha_2 \approx 41{,}28°$

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 \approx 7°$$

*2. Weg:*

Es gilt $\overrightarrow{MF_1} = \begin{pmatrix} 26{,}34-60 \\ 0-30 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33{,}66 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{MF_2} = \begin{pmatrix} 33{,}66-60 \\ 0-30 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26{,}34 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix}$

Für den Winkel $\alpha$ gilt: $\alpha = \arccos \dfrac{\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2}}{\left|\overrightarrow{MF_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{MF_2}\right|}$, woraus sich $\alpha \approx 7{,}0°$ ergibt.

Die Strecke durch die Punkte $M$ und $N$ kann man darstellen durch

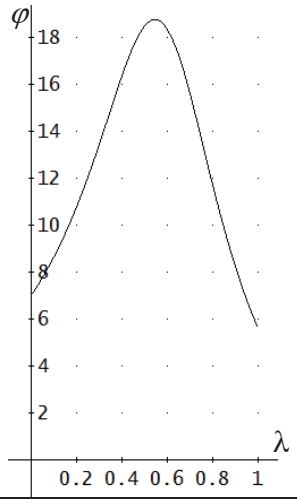
$$g_{MN} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -60 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda \in [0;1]$$

Jeder zulässige Schusspunkt $Q$ hat demnach Koordinaten der Form $Q\,(60 - 60\,\lambda \mid 30 - 15\,\lambda \mid 0)$ mit $\lambda \in [0;1]$. Betrachtet wird der Winkel $\varphi = \varphi(\lambda)$ zwischen den Vektoren

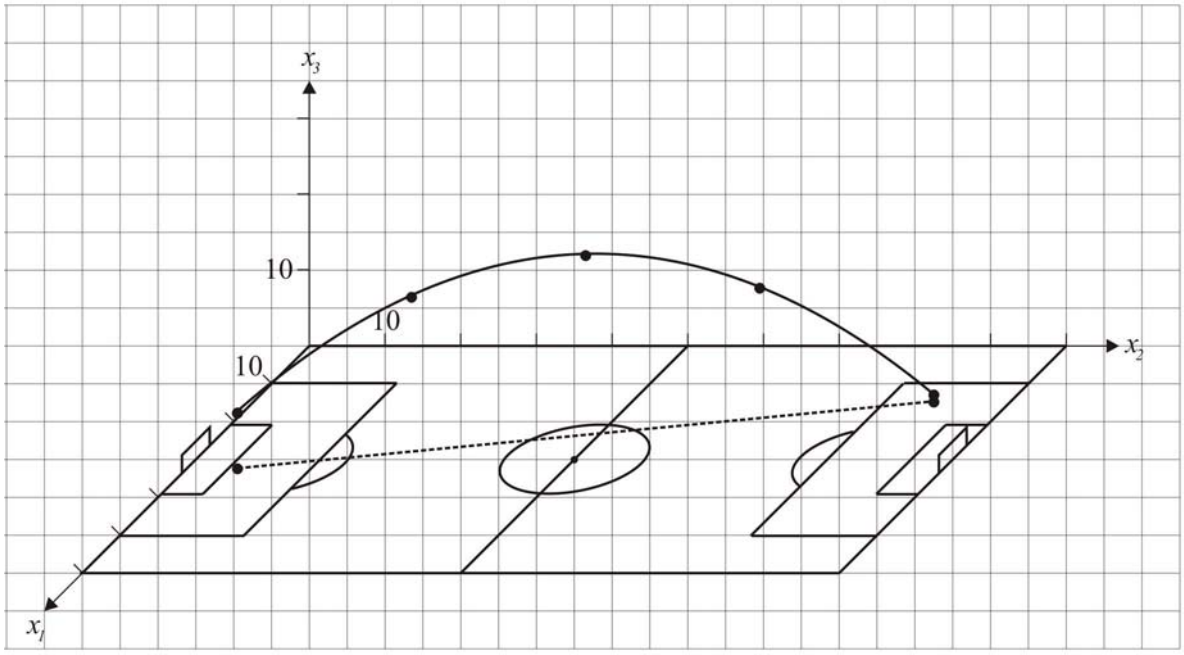
$$\overrightarrow{QF_1} = \begin{pmatrix} 26{,}34-(60-60\lambda) \\ 0-(30-15\lambda) \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33{,}66+60\lambda \\ -30+15\lambda \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\overrightarrow{QF_2} = \begin{pmatrix} 33{,}66-(60-60\lambda) \\ 0-(30-15\lambda) \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26{,}34+60\lambda \\ -30+15\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

In Analogie zum oben behandelten Spezialfall ergibt sich für den betrachteten Winkel:

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| | $$\varphi(\lambda) = \arccos \frac{\begin{pmatrix} -33{,}66+60\lambda \\ -30+15\lambda \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -26{,}34+60\lambda \\ -30+15\lambda \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\lvert \begin{pmatrix} -33{,}66+60\lambda \\ -30+15\lambda \\ 0 \end{pmatrix} \right\rvert \cdot \left\lvert \begin{pmatrix} -26{,}34+60\lambda \\ -30+15\lambda \\ 0 \end{pmatrix} \right\rvert}$$ Aus dieser Funktionsgleichung kann man mittels des Rechners einen Graphen erstellen und an diesem, etwa mit dem Spurmodus, den maximalen Winkel ablesen.   Denkbar ist auch der Weg über eine Tabellierung mit hinreichend kleiner Schrittweite. Für den maximalen Winkel $\varphi_{max}$ gilt dann: $\varphi_{max} \approx 18{,}8°$ | 5 | 10 | 10 |
| | Insgesamt 100 BWE | 25 | 55 | 20 |

## Teillösung zu Aufgabenteil e) Nur für die Lehrkraft bestimmt!



**LA/AG2**

## II.2 Bevölkerungsentwicklung in Deutschland

Gegen Ende des Jahres 2005 lebten ca. 82,5 Millionen Menschen (männliche und weibliche Personen) in Deutschland. Die Verteilung der Bevölkerung auf verschiedene Altersklassen ist der folgenden Tabelle zu entnehmen:

| | Altersklasse 1<br>0-19 Jahre | Altersklasse 2<br>20-39 Jahre | Altersklasse 3<br>40-59 Jahre | Altersklasse 4<br>60-79 Jahre | Altersklasse 5<br>ab 80 Jahre |
|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl in Mio. | 16,5 | 21,4 | 24,0 | 16,9 | 3,7 |

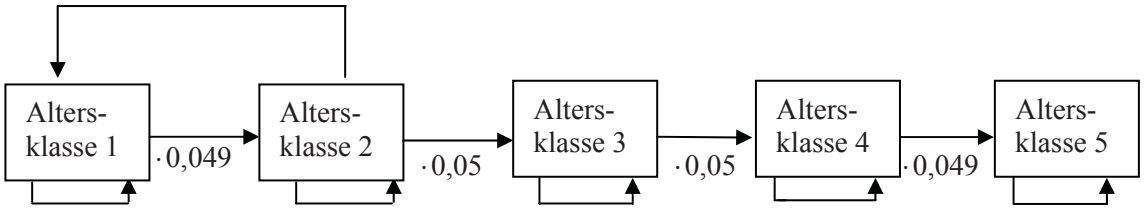
Liegt zu einem Zeitpunkt $n$ (in Jahren nach 2005) die Verteilung der Bevölkerung auf die oben angegebenen fünf Altersklassen in einem Populationsvektor $\vec{v}_n$ vor, so kann man die Bevölkerung nach einem Jahr mit $\vec{v}_{n+1} = L \cdot \vec{v}_n$ berechnen. Dabei ist $L$ die nachstehende Populationsmatrix:

$$L = \begin{pmatrix} 0{,}950 & 0{,}033 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}049 & 0{,}949 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}050 & 0{,}948 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}050 & 0{,}935 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}049 & 0{,}826 \end{pmatrix}.$$

In diesem Modell ist die Migration vom und ins Ausland nicht berücksichtigt.

a) Geben Sie die Bedeutung des Matrixelements $L_{1,2} = 0{,}033$ an. **10 P**

b) Vervollständigen Sie den Übergangsgraphen, der das Modell beschreibt: **5 P**



c) Aufgrund der Einteilung in nur fünf Altersklassen verbleibt von Jahr zu Jahr jeweils ein Teil der Menschen in der bisherigen Altersklasse. Beispielsweise wird ein 45-jähriger auch nach einem Jahr noch der Altersklasse 3 (40-59 Jahre) angehören.

- Geben Sie den Matrix-Eintrag an, der den Anteil der Altersklasse 3, welcher in dieser Altersklasse verbleibt, beschreibt.
- Bestätigen Sie, dass jährlich 0,2 % der 40-59-Jährigen sterben. **15 P**

d) Die Zusammensetzung der deutschen Bevölkerung zum Zeitpunkt $n = 0$ (für das Jahr 2005) ist der obigen Tabelle zu entnehmen. Bestimmen Sie unter Verwendung der Matrix $L$, wie sich die Bevölkerung gegen Ende des Jahres 2002 nach diesem Modell zusammengesetzt hätte. **10 P**

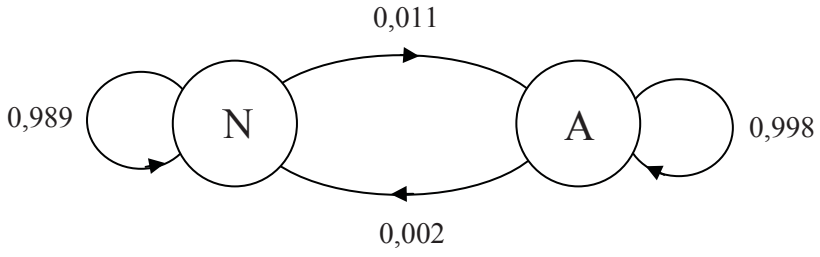
e) Berechnen Sie unter Verwendung des obigen Modells die Populationsvektoren und daraus die Größe der Gesamtbevölkerung für die Jahre 2006 bis 2009. Bestimmen Sie auch – sofern nicht bereits in der Tabelle in der Anlage vorgegeben – jeweils den sogenannten Jugend- bzw. Altenquotient: Der Jugendquotient gibt das Verhältnis der unter 20-Jährigen zu den 20 bis 59-Jährigen an. Der Altenquotient gibt das Verhältnis der über 59-Jährigen zu den 20 bis 59-Jährigen an. Dokumentieren Sie Ihre Ergebnisse in der beigefügten Tabelle. Runden Sie die Ergebnisse auf 3 Nachkommastellen.
Experten befürchten einen Rückgang der deutschen Bevölkerung unter gleichzeitiger "Veralterung der Gesellschaft". Beurteilen Sie anhand ihrer Ergebnisse, ob die Befürchtungen der Experten gerechtfertigt sind. **25 P**

f) Im obigen Modell wurde nicht berücksichtigt, dass auch Menschen der Altersklasse 3 (40-59 Jahre) Kinder zeugen. Bestimmen Sie, wie hoch die Geburtenrate in dieser Altersklasse im Jahr 2006 hätte sein müssen, damit die Gesamtbevölkerung gegen Endes des Jahres 2006 wieder 82,5 Millionen Menschen betragen hätte. **15 P**

In den letzten Jahren mehren sich die Befürchtungen, dass die Bevölkerung in den neuen Bundesländern durch Abwanderungen in die alten Bundesländer zu stark reduziert wird. Gegen Ende des Jahres 2005 lebten 65,7 Millionen Menschen in den westdeutschen Bundesländern. In den neuen Bundesländern (einschließlich Berlin) lebten 16,8 Millionen Menschen.

Im Laufe des Jahres 2006 zogen 1,1% (Abwanderungsrate) der Bevölkerung aus den neuen (N) in die alten (A) Bundesländer um. Umgekehrt siedelten nur 0,2% (Zuwanderungsrate) der westdeutschen Bevölkerung in die neuen Bundesländer um.

Der Prozess der Zu- und Abwanderung ist in dem folgenden Übergangsgraphen dargestellt:



Im Folgenden wird vereinfachend angenommen, dass die Gesamtbevölkerung in Deutschland konstant 82,5 Millionen Menschen beträgt. Die Bevölkerungsverteilung nach $n$ Jahren (seit 2005) auf die alten bzw. neuen Bundesländer werde durch einen Vektor $\vec{p}_n$ dargestellt:

$$\vec{p}_n = \begin{pmatrix} N_n \\ A_n \end{pmatrix}, \qquad \text{mit}$$

$N_n$: Bevölkerungszahl in den neuen Bundesländern nach $n$ Jahren

$A_n$: Bevölkerungszahl in den alten Bundesländern nach $n$ Jahren,

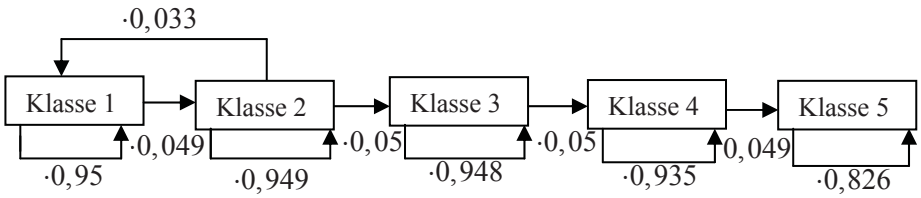
Mittels einer Übergangsmatrix $M$ kann die Bevölkerungsverteilung $\vec{p}_{n+1}$ aus der Verteilung $\vec{p}_n$ bestimmt werden: $\vec{p}_{n+1} = M \cdot \vec{p}_n$.

g)
- Bestimmen Sie eine geeignete Übergangsmatrix.
- Bestimmen Sie mithilfe des Modells, ob und in welchem Jahr die Bevölkerungszahl der neuen Bundesländer unter 16 Millionen sinken würde.
- Angenommen die Bevölkerungszahl in den neuen Bundesländern ist auf 16 Millionen gesunken und die Bevölkerungszahl in den alten Bundesländern dementsprechend auf 66,5 Millionen gestiegen.
  Ermitteln Sie einen Wert für die Abwanderungsrate aus den neuen Bundesländern, sodass (bei gleichbleibender Zuwanderungsrate aus den alten Bundesländern) die Bevölkerungsverteilung stabil bleibt. **20 P**

## Anlage zur Aufgabe „Bevölkerungsentwicklung“

| Jahr | Zeitschritt | Anzahl der 0- bis 19-Jährigen in Millionen | Anzahl der 20- bis 59-Jährigen in Millionen | Anzahl der über 59-Jährigen in Millionen | Gesamt-bevölkerung in Millionen | Jugendquotient | Altenquotient |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2005 | 0 | 16,5 | 45,4 | 20,6 | 82,5 | 0,363 | 0,454 |
| 2006 | 1 | | | | | | 0,465 |
| 2007 | 2 | | | | | 0,366 | |
| 2008 | 3 | | | | | | 0,485 |
| 2009 | 4 | | | | | | |

## Erwartungshorizont

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| a) | Der Matrix-Eintrag $L_{1,2}$ steht für die Geburtenrate der 2. Altersgruppe (20-39-Jährige): Pro Jahr bekommt jeder und jede (Mann und Frau) 20- bis 39-Jährige durchschnittlich 0,033 Kinder.<br>*Anmerkung: Die volle Punktzahl ist nur dann zu geben, wenn in der Antwort des Prüflings der Bezug zum Zeitraum (Jahr) und zu beiden Geschlechtern deutlich wird.* | 10 | | |
| b) |  | 5 | | |
| c) | Der Verbleib von Menschen der mittleren Altersklasse in dieser Altersklasse wird durch den Matrix-Eintrag $L_{3,3} = 0{,}948$ beschrieben: 94,8% der 40-59-Jährigen verbleiben in dieser Altersklasse.<br>Der Rest geht in die nächste Altersklasse über oder stirbt. Aus der Matrix ist zu entnehmen, dass ($L_{4,3} = 0{,}05$) 5% der 40-59-Jährigen im nächsten Zeitschritt zur Altersklasse der 60-79-Jährigen gehört.<br>Demnach sterben jährlich 100% – 94,8% – 5% = 0,2% der 40- bis 59-Jährigen. | 10 | 5 | |
| d) | Der Bestand zum Zeitpunkt $n = -3$ lässt sich mithilfe der Lösung eines linearen Gleichungssystems bestimmen:<br>$L^3 \cdot \vec{v}_{-3} = \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 16{,}5 \\ 21{,}4 \\ 24{,}0 \\ 16{,}9 \\ 3{,}7 \end{pmatrix}$. Als Lösung ergibt sich $\vec{v}_{-3} = L^{-3} \cdot \vec{v}_0 \approx \begin{pmatrix} 16{,}8 \\ 22{,}3 \\ 24{,}5 \\ 16{,}5 \\ 2{,}9 \end{pmatrix}$.<br>Angaben in Mio Einwohner auf eine Nachkommastelle gerundet. | | 10 | |

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung Bewertung I | II | III |
|---|---|---|---|---|
| e) | | | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 16,5 | 45,4 | 20,6 | 82,5 | 0,363 | 0,454 |
| 1 | 16,381 | 44,939 | 20,886 | 82,206 | 0,365 | 0,465 |
| 2 | 16,259 | 44,482 | 21,129 | 81,870 | 0,366 | 0,475 |
| 3 | 16,134 | 44,029 | 21,334 | 81,497 | 0,366 | 0,485 |
| 4 | 16,006 | 43,579 | 21,506 | 81,091 | 0,367 | 0,493 |

Die Berechnungen mit dem Modell zeigen, dass die Befürchtungen der Experten gerechtfertigt sind: Bei abnehmender Gesamtbevölkerung steigt die Zahl der über 59-Jährigen von Jahr zu Jahr. Die Zahl der unter 20-Jährigen sinkt dagegen von Jahr zu Jahr.

Die Befürchtungen werden auch durch den Jugend -und Altenquotienten verstärkt, der die insgesamt abnehmende Bevölkerung berücksichtigt: Beide Quotienten steigen zwar von Jahr zu Jahr, der Altenquotient jedoch im stärkeren Maße.

| I | II | III |
|---|---|---|
| 10 | 5 | 10 |

f) Sei $x$ die zu bestimmende Geburtenrate. Der Populationsvektor für 2006 berechnet sich wie folgt:

$$\begin{pmatrix} 0{,}950 & 0{,}033 & x & 0 & 0 \\ 0{,}049 & 0{,}949 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}050 & 0{,}948 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}050 & 0{,}935 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}049 & 0{,}826 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16{,}5 \\ 21{,}4 \\ 24 \\ 16{,}9 \\ 3{,}7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 24x + \frac{40953}{2500} \\ 21{,}1 \\ 23{,}8 \\ 17 \\ 3{,}9 \end{pmatrix}$$

Laut Aufgabenstellung soll die Gesamtbevölkerung 82,5 Mio. betragen. Dies führt auf die Gleichung $24 \cdot x + 82{,}206 = 82{,}5$ mit der Lösung $x \approx 0{,}0122$.

| I | II | III |
|---|---|---|
| | 15 | |

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| g) | • Die zugehörige Übergangsmatrix lautet: $M = \begin{pmatrix} 0{,}989 & 0{,}002 \\ 0{,}011 & 0{,}998 \end{pmatrix}$<br>Die „neue“ Bevölkerung in den neuen Bundesländern setzt sich zusammen aus dem Anteil der ostdeutschen Bevölkerung, welcher verbleibt (98,9%) und dem Anteil der westdeutschen Bevölkerung, welcher abwandert (0,02%): $N_n = 0{,}002 \cdot A_n + 0{,}989 \cdot N_n$.<br>Die „neue“ Bevölkerung in den westdeutschen Bundesländern setzt sich zusammen aus dem Anteil der ostdeutschen Bevölkerung, welcher abwandert (1,1%) und dem Anteil der westdeutschen Bevölkerung, welcher verbleibt (99,8%): $A_{n+1} = 0{,}998 \cdot A_n + 0{,}011 \cdot N_n$<br>• $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 16{,}8 \\ 65{,}7 \end{pmatrix}$<br>Es gilt: $M^{16} \cdot \begin{pmatrix} 16{,}8 \\ 65{,}7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 16{,}02 \\ 66{,}48 \end{pmatrix}$ und $M^{17} \cdot \begin{pmatrix} 16{,}8 \\ 65{,}7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 15{,}98 \\ 66{,}52 \end{pmatrix}$.<br>Laut Modell unterschreitet die Bevölkerung in den neuen Bundesländern die 16- Millionen-Grenze erstmalig im Jahr 2022.<br>• Sei $r$ die Abwanderungsrate aus den neuen Bundesländern.<br>Die Übergangsmatrix hat dann die Form $B(r) = \begin{pmatrix} 1-r & 0{,}002 \\ r & 0{,}998 \end{pmatrix}$.<br>Der Ansatz $B(r) \cdot \begin{pmatrix} 16{,}0 \\ 66{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16{,}0 \\ 66{,}5 \end{pmatrix}$ führt auf die Lösung $r \approx 0{,}0083$.<br>Die Abwanderungsrate aus den neuen Bundesländern müsste demnach bei ungefähr 0,8% liegen. | | 5 | 15 |
| | Insgesamt 100 BWE | 35 | 40 | 25 |

**Stochastik 1**

## III.1 Passierschein A38

An einem Mittwoch auf ihrem Weg zur Eroberung Roms müssen die beiden Gallier Asterix und Obelix in eine Behörde, um den Passierschein A 38 zu besorgen.

Die mathematisch angepasste Sichtweise auf den Verlauf der Geschichte sieht folgendermaßen aus: Der Portier gibt Asterix und Obelix einen Laufzettel und schickt sie in Zimmer 100, da er nicht einschätzen kann, welcher Sachbearbeiter zuständig ist. Niemand in dieser Behörde kann einschätzen, wer zuständig ist. In dem gesamten Verlauf hält sich kein Sachbearbeiter für zuständig.
Jeder Sachbearbeiter, auch der in Zimmer 100, macht einen Stempel auf den Laufzettel und schickt die beiden Gallier mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{3}$ nach rechts (eine Zimmernummer größer) und mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p = \frac{2}{3}$ nach links (eine Zimmernummer kleiner).

Ein solcher Vorgang des Prüfens und Weiterschickens dauert jedes Mal 10 Minuten. Das bedeutet zum Beispiel, dass die beiden Gallier das vierte Zimmer nach 30 Minuten betreten. Alle Zimmer liegen durchnummeriert nebeneinander in einem Gang.


links ⟵ ⟶ rechts

Wenn Asterix und Obelix ein Zimmer wiederholt betreten, so wird genauso geprüft und weitergeschickt, als ob sie noch nie in diesem Zimmer gewesen wären.

a) Ergänzen Sie das Baumdiagramm (siehe Anlage 1), das den Aufenthalt der beiden Gallier in den einzelnen Zimmern des Flures während der ersten Stunde nach dem Eintreffen in Zimmer 100 beschreibt,
   - um alle fehlenden Zimmernummern,
   - um Angaben die den Zeitablauf deutlich machen und
   - um Angaben zu den Wahrscheinlichkeiten an den Pfadstücken des Baumdiagramms. **15P**

b) Nach 10 Minuten betreten Asterix und Obelix mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ das Zimmer 101 und mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ das Zimmer 99. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Gallier nach 30 Minuten das Zimmer 99 betreten. **10 P**

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert für die Nummer des Zimmers, das die beiden Gallier nach 30 Minuten betreten. **10P**

d) Asterix und Obelix betreten nach 20 Minuten wieder das Zimmer 100. Zwischenzeitlich ist der Sachbearbeiter abgelöst worden; er weiß lediglich, dass die beiden Gallier zuvor entweder in Zimmer 99 oder in Zimmer 101 waren. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sie zuvor in Zimmer 101 waren. Zeigen Sie weiterhin, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Gallier zuvor in Zimmer 101 waren, unabhängig vom speziellen Wert für $p$ ist, also für jedes $0 < p < 1$ gleich ist. **20P**

e) Sei $p$ wieder die Wahrscheinlichkeit, mit der die beiden Gallier in ein Zimmer mit einer um eins höheren Nummer geschickt werden. Betrachten Sie $p$ für diesen Aufgabenteil zunächst als unbekannte Zahl. Die Wahrscheinlichkeit, dass Asterix und Obelix nach 4 Stunden das Zimmer mit der Nummer 76 betreten, sei 0,08. Ermitteln Sie, wie groß $p$ in diesem Fall sein müsste. **10P**

f) Angenommen, Asterix und Obelix wurden ausgehend vom Startzimmer mit der Nummer 100 fünfzigmal von einem Sachbearbeiter in ein benachbartes Zimmer geschickt. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sie beim fünfzigsten Weiterleiten in das ihm schon bekannte Startzimmer mit der Nummer 100 geschickt werden. Nehmen Sie für Ihre Rechnung hier wieder $p = \frac{1}{3}$ an.

**10P**

g) Wenn die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bürger in ein Zimmer mit einer kleineren Nummer geschickt wird, größer ist als die Wahrscheinlichkeit, dass er in ein Zimmer mit größerer Nummer geschickt wird, besteht die Gefahr eines Staus bei den Zimmern mit kleinen Nummern. Das Ziel der Behördenleitung ist, diese Gefahr zu verringern. Nehmen Sie im Folgenden an, dass bei einem bestimmten Sachbearbeiter pro Tag 40 Bürger anfragen.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der dieser Sachbearbeiter maximal die Hälfte der anfragenden Bürger in ein Zimmer mit niedrigerer Nummer schickt. Verwenden Sie die oben genannten Wahrscheinlichkeiten $p = \frac{1}{3}$ und $1 - p = \frac{2}{3}$ .

- Durch Fortbildung des Sachbearbeiters wurde erreicht, dass ein Teil der Bürgeranliegen tatsächlich bearbeitet wird. Der Fortbildungsstand kann durch die Wahrscheinlichkeit $x$, wie sie im Folgenden definiert wird, beschrieben werden.

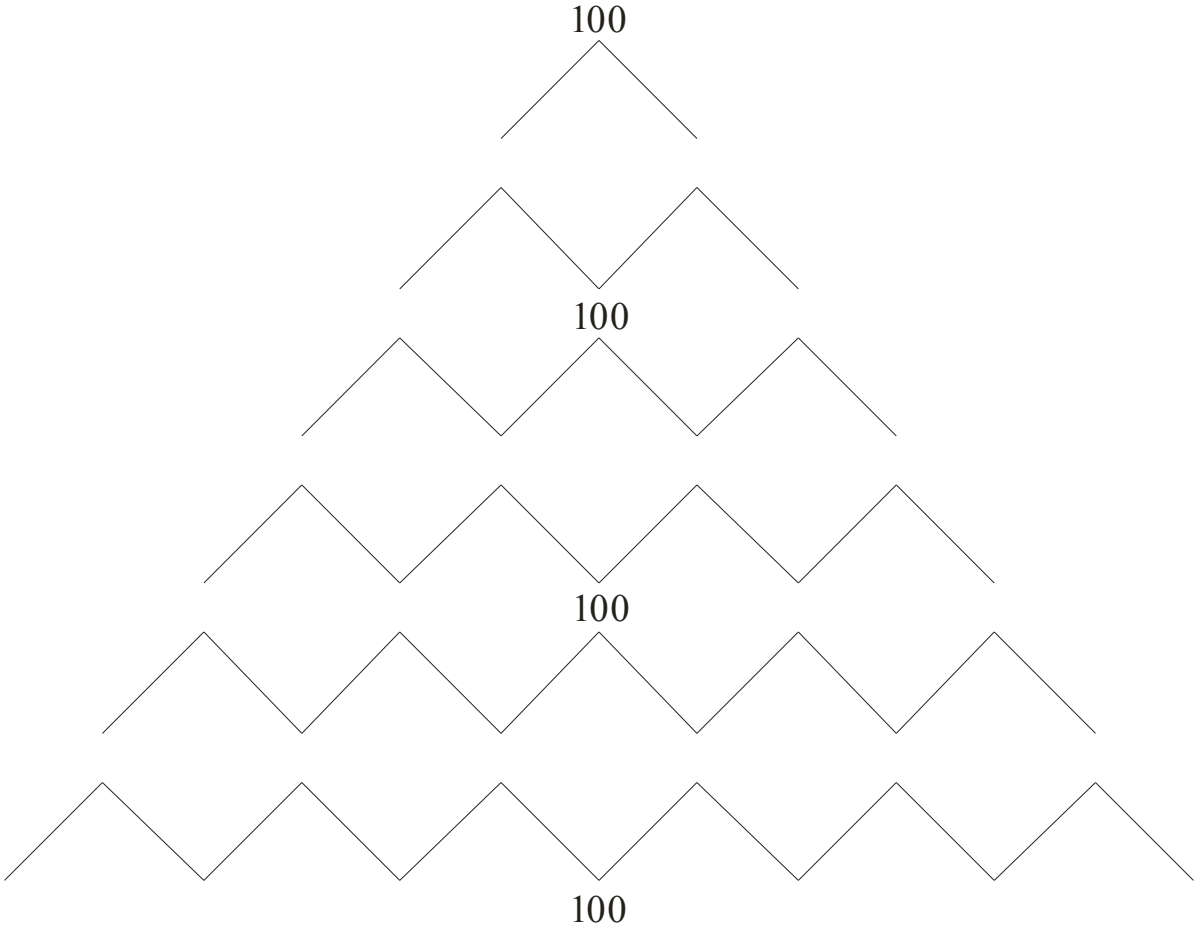
  $P(\text{Der Sachbearbeiter bearbeitet einen Vorgang.}) = x$

  $P(\text{Der Sachbearbeiter schickt in das Nachbarzimmer mit höherer Nummer.}) = \frac{1}{3}(1 - x)$

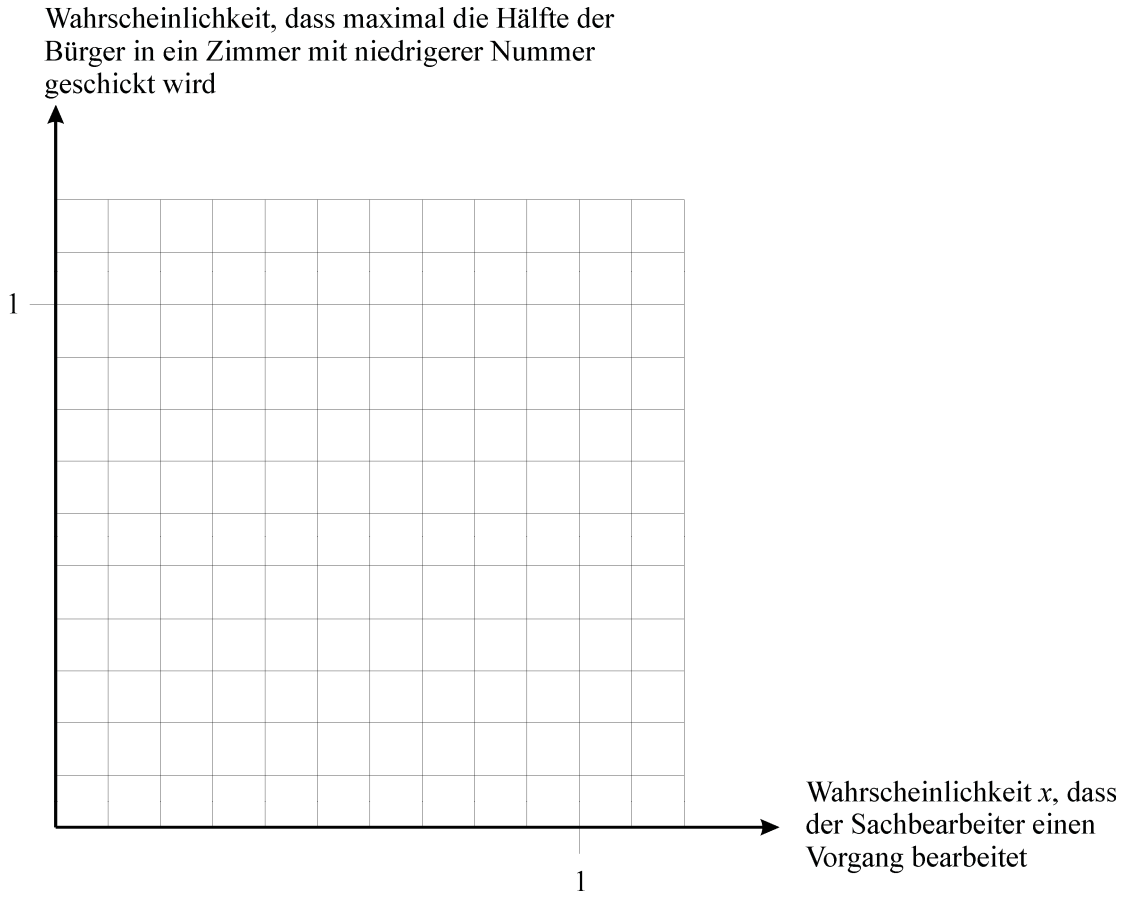
  $P(\text{Der Sachbearbeiter schickt in das Nachbarzimmer mit niedrigerer Nummer.}) = \frac{2}{3}(1 - x)$

Stellen Sie im Koordinatensystem in der Anlage 2 den Zusammenhang zwischen der Wahrscheinlichkeit $x$, dass der Sachbearbeiter den Vorgang bearbeitet und der Wahrscheinlichkeit, dass maximal die Hälfte der anfragenden Bürger von ihm in ein Zimmer mit niedrigerer Nummer geschickt werden, grafisch dar. Gehen Sie dabei wieder davon aus, dass bei dem Sachbearbeiter pro Tag 40 Bürger anfragen. Interpretieren Sie den Graphen, wobei Sie <u>auch</u> auf folgende Aspekte eingehen sollen: Wie groß müsste der Fortbildungsstand $x$ mindestens ungefähr sein, damit fast sicher davon ausgegangen werden kann, dass maximal die Hälfte der Bürger in ein Zimmer mit niedrigerer Nummer geschickt wird? Bei welchem Fortbildungsstand $x$ ist eine weitere Fortbildung mit den größten Effekten hinsichtlich des Zieles, dass maximal die Hälfte der Bürger in ein Zimmer mit niedrigerer Nummer geschickt wird, verbunden? **25 P**

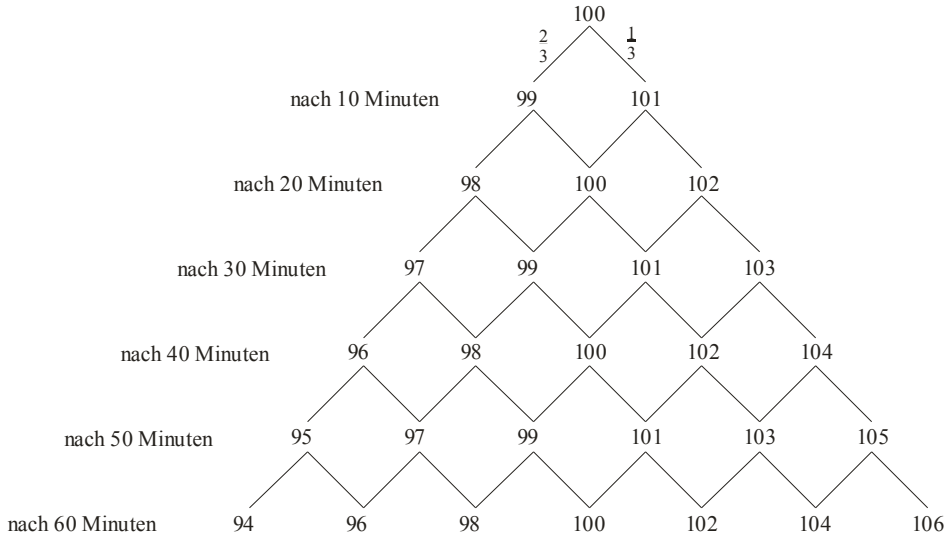
## Anlage 1 zur Aufgabe "Passierschein A38", zu Aufgabenteil a)



## Anlage 2 zur Aufgabe "Passierschein A38", Aufgabenteil g)

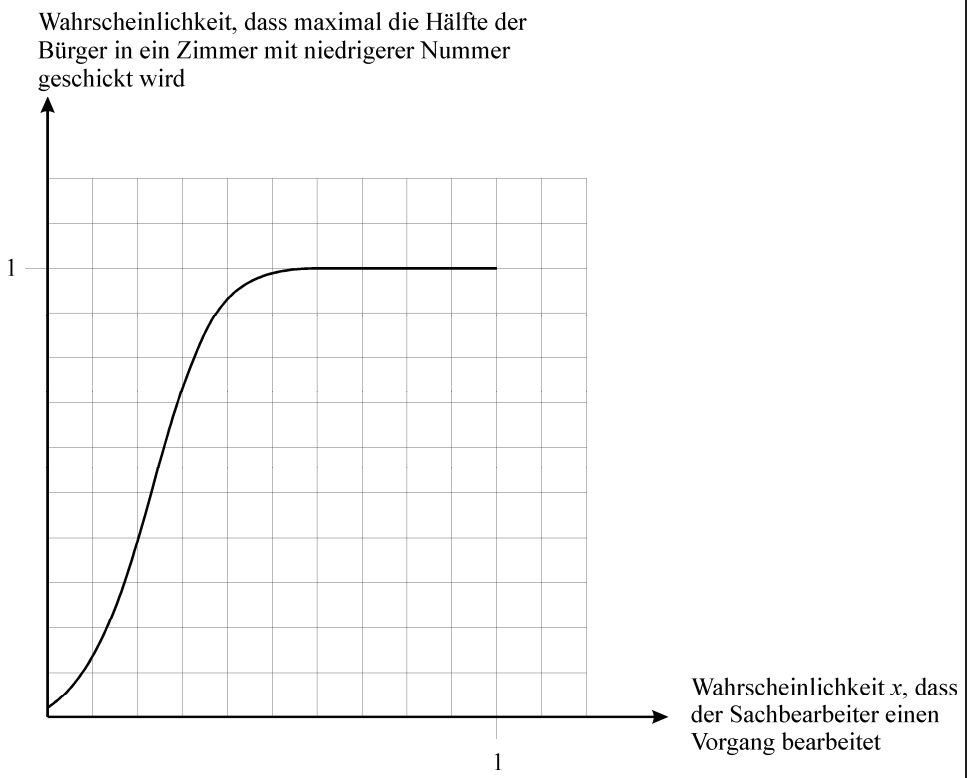


## Erwartungshorizont

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| a) |  <br>*Die volle Punktzahl soll auch vergeben werden, wenn nicht an jedem Pfadstück die entsprechende Wahrscheinlichkeit steht.* | 15 | | |
| b) | $P(\text{Die Gallier betreten nach 30 Minuten das Zimmer 99}) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$<br>*Bemerkung: Fehler, die auf einem falsch erstellten Baumdiagramm in Aufgabenteil a) beruhen, sind hier als Folgefehler und somit nicht zum Nachteil des Prüflings zu werten.* | 10 | | |
| c) | Sei $X$ die Zimmernummer.<br>$E(X) = \frac{1}{27} \cdot 103 + \frac{6}{27} \cdot 101 + \frac{12}{27} \cdot 99 + \frac{8}{27} \cdot 97 = \underline{\underline{99}}$<br>*Bemerkung: Fehler, die auf einem falsch erstellten Baumdiagramm in Aufgabenteil a) beruhen, sind hier als Folgefehler und somit nicht zum Nachteil des Prüflings zu werten.* | | 10 | |

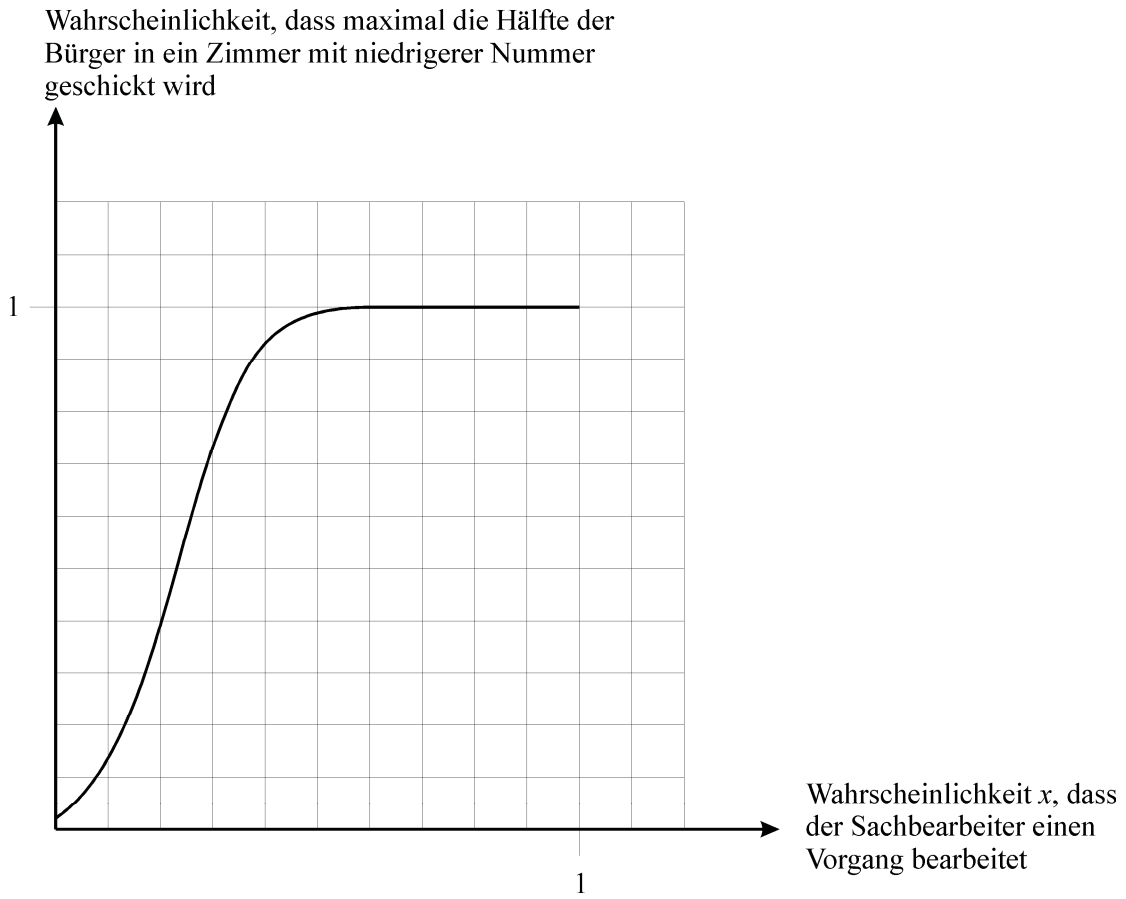
| | **Lösungsskizze** | Zuordnung Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| d) | Sei<br>$B_1$: Die beiden Gallier betreten nach 10 Minuten Zimmer 101. $P(B_1)=\frac{1}{3}$<br>$B_2$: Die beiden Gallier betreten nach 10 Minuten Zimmer 99. $P(B_2)=\frac{2}{3}$<br>$A$: Die beiden Gallier betreten nach 20 Minuten Zimmer 100.<br>Es gilt $P(A\mid B_1)=\frac{2}{3}$<br>$P(A\mid B_2)=\frac{1}{3}$<br>Nach dem Satz von Bayes gilt dann für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:<br>$P(B_1\mid A)=\frac{P(A\mid B_1)\cdot P(B_1)}{P(A\mid B_1)\cdot P(B_1)+P(A\mid B_2)\cdot P(B_2)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$<br>Sei $p$ variabel mit $0<p<1$. Dann gilt mit den obigen Bezeichnungen<br>$P(B_1)=p \qquad P(B_2)=1-p \qquad P(A\mid B_1)=1-p \qquad P(A\mid B_2)=p$<br>und mit dem Satz von Bayes<br>$P(B_1\mid A)=\frac{P(A\mid B_1)\cdot P(B_1)}{P(A\mid B_1)\cdot P(B_1)+P(A\mid B_2)\cdot P(B_2)}=\frac{(1-p)\cdot p}{(1-p)\cdot p+p\cdot(1-p)}$<br>$=\frac{(1-p)\cdot p}{2\cdot(1-p)\cdot p}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$<br>*Bemerkung: Auch ein weniger formales Vorgehen ist möglich.* | | 10 | 10 |

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| e) | Ein Vorgang des Prüfens und Weiterschickens dauert jedes Mal 10 Minuten. In vier Stunden werden die Gallier also 24-mal geschickt. Jedes Schicken *muss* in ein Zimmer mit einer um eins niedrigeren Nummer stattfinden, sonst ist das Zimmer 76 nicht in vier Stunden von Zimmer 100 aus zu erreichen. Jedes einzelne Schicken geschieht mit der Wahrscheinlichkeit $(1-p)$, das 24-malige Schicken also insgesamt mit der Wahrscheinlichkeit $(1-p)^{24}$. Zu lösen ist demnach die Gleichung $(1-p)^{24}=0{,}08$. Daraus ergibt sich $p \approx 0{,}100$.<br><br>*Bemerkung: Je nach rechnerischem Vorgehen bietet der Rechner möglicherweise eine zweite reelle Lösung ( $p \approx 1{,}900$ ) an. Wird diese kommentarlos anerkannt, ohne auf ihre stochastische Unzulässigkeit zu verweisen, kann nicht die volle Punktzahl gegeben werden.* | | 10 | |
| f) | Die Gallier landen genau dann im Startzimmer, wenn sie gleich oft zu einem Zimmer mit einer höheren Nummer wie zu einem Zimmer mit einer niedrigeren Nummer geschickt wurden.<br>Hier handelt es sich um ein 50-stufiges Bernoulliexperiment. Dabei beschreibe ein Schicken in ein Zimmer mit einer höheren Nummer einen Erfolg, die Erfolgswahrscheinlichkeit ist mithin $p=\frac{1}{3}$. Sei $Y$ die Anzahl der Erfolge. Dann gilt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(Y=25) \approx 0{,}0059$. | | 10 | |
| g) | Hier handelt es sich um ein 40-stufiges Bernoulliexperiment. Dabei beschreibe ein Schicken in ein Zimmer mit einer niedrigeren Nummer einen Erfolg, die Erfolgswahrscheinlichkeit ist mithin $\frac{2}{3}$. Sei $Z$ die Anzahl der Erfolge. Dann gilt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(Z \leq 20) \approx 0{,}0214$.<br>Hierbei handelt es sich um eine kumulierte Binomialverteilung mit $n = 40$, $k = 20$ und $p = \frac{2}{3}(1-x)$ | | | |

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| |  <br>Ab $x \approx 0,6$ ist fast mit Sicherheit davon auszugehen, dass maximal die Hälfte der Bürger in ein Zimmer mit niedrigerer Nummer geschickt wird.<br>Auch bei einem Fortbildungsstand von $x = 0$ ist noch eine positive Wahrscheinlichkeit, dass maximal die Hälfte der Bürger in ein Zimmer mit niedrigerer Nummer geschickt werden, festzustellen (siehe erster Abschnitt von Aufgabenteil f).<br>Der Graph verläuft flach für ca. $x \leq 0,05$, d.h. Fortbildungsmaßnahmen bei sehr wenig fortgebildeten Sachbearbeitern zeigen zunächst nur geringe Effekte.<br>Im Bereich der Wendestelle ( $x \approx 0,23$ ) ist die Steigung des Graphen maximal. Hier sind bei kleinen Zuwächsen im Fortbildungsstand die größten Wahrscheinlichkeitszuwächse hinsichtlich der Fragestellung festzustellen.<br>Der Graph verläuft ab ca. $x \geq 0,6$ fast horizontal, d.h. Fortbildungsmaßnahmen bei bereits relativ gut fortgebildeten Sachbearbeitern zeigen so gut wie keine Effekte mehr.<br>*Anmerkung: Der oben abgebildete Graph befindet sich aus Gründen der Korrekturfreundlichkeit in Originalgröße im Anschluss an diesen tabellarischen Erwartungshorizont.* | | 15 | 10 |
| | Insgesamt 100 BWE | 25 | 55 | 20 |

## Ergänzung zur Lösung zu Aufgabenteil g)

**Nur für die Hand der Lehrkraft bestimmt!**



**Stochastik 2**

## III.2 Biathlon

Die Wintersportart Biathlon besteht aus Skilanglauf mit eingeschobenen Schießaufgaben. Das Ziel ist, in möglichst kurzer Zeit eine bestimmte Distanz zurückzulegen und dabei in Laufpausen auf Zielscheiben zu schießen. Verfehlt man beim Schießen eine Scheibe, hat dies nachteilige Auswirkungen auf die Gesamtzeit. Die Anforderungen beim Biathlon sind also einerseits Schnelligkeit beim Langlauf und andererseits Genauigkeit beim Schießen.

Im Rahmen dieser Aufgabe werden zur Vereinfachung vom internationalen Regelwerk abweichende Regeln verwendet, und zwar:

- Man hat drei Schüsse, um drei Zielscheiben zu treffen. Hat man alle drei Zielscheiben getroffen, darf man auf der normalen Route weiterlaufen.
- Hat man nicht alle drei Scheiben getroffen, darf man *genau einmal* nachladen und diesen einen Schuss auf eine der noch nicht getroffenen Zielscheiben abgeben. Sind nun alle Scheiben getroffen, darf man auf der normalen Route weiterlaufen.
- Sind jetzt immer noch nicht alle Scheiben getroffen, muss man für jede nicht getroffene Scheibe eine Strafrunde laufen, bevor man auf der normalen Route weiterlaufen darf.

Erfahrungsgemäß benötigt Paula, die diesen Sport betreibt, für das Nachladen und erneute Schießen 10 Sekunden und für eine Strafrunde 30 Sekunden. Sie ist eine mittelmäßige, aber sehr nervenstarke Schützin, die bei jedem Schuss mit der Wahrscheinlichkeit 0,9 die Scheibe trifft.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Paula alle drei Scheiben ohne Nachladen trifft. **10 P**

b)
- Bestätigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Paula alle drei Scheiben mit dem einmaligen Nachladen trifft, den Wert 0,2187 hat.
- Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Paula genau eine Strafrunde laufen muss, den Wert 0,0486 hat. **20 P**

c) Wenn Paula die drei Scheiben bei den ersten drei Schüssen trifft, hat sie keinen Zeitverlust. Dieser würde erst durch Nachladen und erneutes Schießen sowie durch Strafrunden entstehen. Begründen Sie, warum die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung den Zeitverlust, den Paula beim Schießen erleidet, korrekt beschreibt. Die Wahrscheinlichkeiten für 70 s und 100 s brauchen Sie dabei *nicht* nachzuprüfen. Berechnen Sie den Erwartungswert für Paulas Zeitverlust. **15 P**

| Zeitverlust in s | 0 | 10 | 40 | 70 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|
| Wahrscheinlichkeit | 0,729 | 0,2187 | 0,0486 | 0,0036 | 0,0001 |

Beim Biathlon besteht wie in vielen anderen Sportarten das Problem des Dopings: Dabei werden verbotene Substanzen eingenommen, um die Leistungsfähigkeit zu steigern. Dopingtests helfen dabei, dieses kriminelle Vorgehen aufzudecken. Um dem Konsum dieses Mittels auf die Spur zu kommen, werden bei der in dieser Aufgabe betrachteten Dopingkontrolle Urinproben *aller* an einem Wettbewerb teilnehmenden Biathleten mit einem speziellen, sehr wirksamen Test untersucht.

Im Rahmen dieser Aufgabe sei angenommen, dass der Anteil der Biathleten, die ein bestimmtes illegales Dopingmittel verwenden, 0,02 (also 2%) beträgt. Wenn ein Sportler die verbotene Substanz genommen hat, zeigt der Test dies mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,97 an. Man sagt auch, die Sensitivität des Tests beträgt 0,97. Wenn ein Sportler gar kein Doping mit dieser Substanz vorgenommen hat, zeigt der Test mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,15 dennoch Doping an. Man sagt auch, die Spezifität des Testes beträgt 1 – 0,15 = 0,85

d) Erstellen Sie für diesen Test ein vollständiges Baumdiagramm.
*oder*
ergänzen Sie die Tabelle (sog. Vierfeldertafel) in der Anlage zu dieser Aufgabe. In den Feldern der Tabelle sollen ggf. auf ganze Zahlen gerundete Erwartungswerte bei einer betrachteten Anzahl von 1000 Biathleten stehen. **10P**

e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den beschriebenen Rahmenbedingungen ein Biathlet, der das Resultat "mit der Substanz gedopt" erhält, tatsächlich mit dieser Substanz gedopt hat. **10P**

Nehmen Sie im Folgenden an, dass der Anteil der dopenden Biathleten bezogen auf alle am Wettbewerb teilnehmenden Biathleten $x$ beträgt.

f) Es wird nun ein verbesserter Test mit einer Sensitivität von 0,98 und einer Spezifität von 0,91 verwendet. Zeigen Sie, dass unter den genannten Rahmenbedingungen für die Wahrscheinlichkeit $P(x)$, dass ein Biathlet, der das Resultat "mit der Substanz gedopt" erhält, tatsächlich mit dieser Substanz gedopt hat, gilt:

$$P(x) = \frac{98x}{89x + 9}$$

Zeichnen Sie den Graphen zu dieser Funktion auf ihrer maximalen Definitionsmenge in das Koordinatensystem in der Anlage. Interpretieren Sie den Verlauf des Graphen. Berücksichtigen Sie dabei möglicherweise auftretende Probleme, wenn durch die Dopingkontrollen erreicht wird, den Anteil der dopenden Sportler laufend zu verringern. **25P**

g) Da bei einer einzigen Testung Fehler auftreten können, werden alle Urinproben, die bei der ersten Testung das Resultat „mit der Substanz gedopt“ zeigen, ein weiteres Mal mit demselben Verfahren getestet. Dabei sei angenommen, dass die Ergebnisse beider Testungen sowohl bei gedopten als auch bei nicht gedopten Sportlern stochastisch unabhängig sind. Ermitteln Sie unter den Bedingungen von Aufgabenteil f) einen Term in $x$ für die Wahrscheinlichkeit, dass ein *zweimal* anhand der gleichen Urinprobe mit dem Resultat „mit der Substanz gedopt“ getesteter Athlet tatsächlich mit der Substanz gedopt ist. **10P**

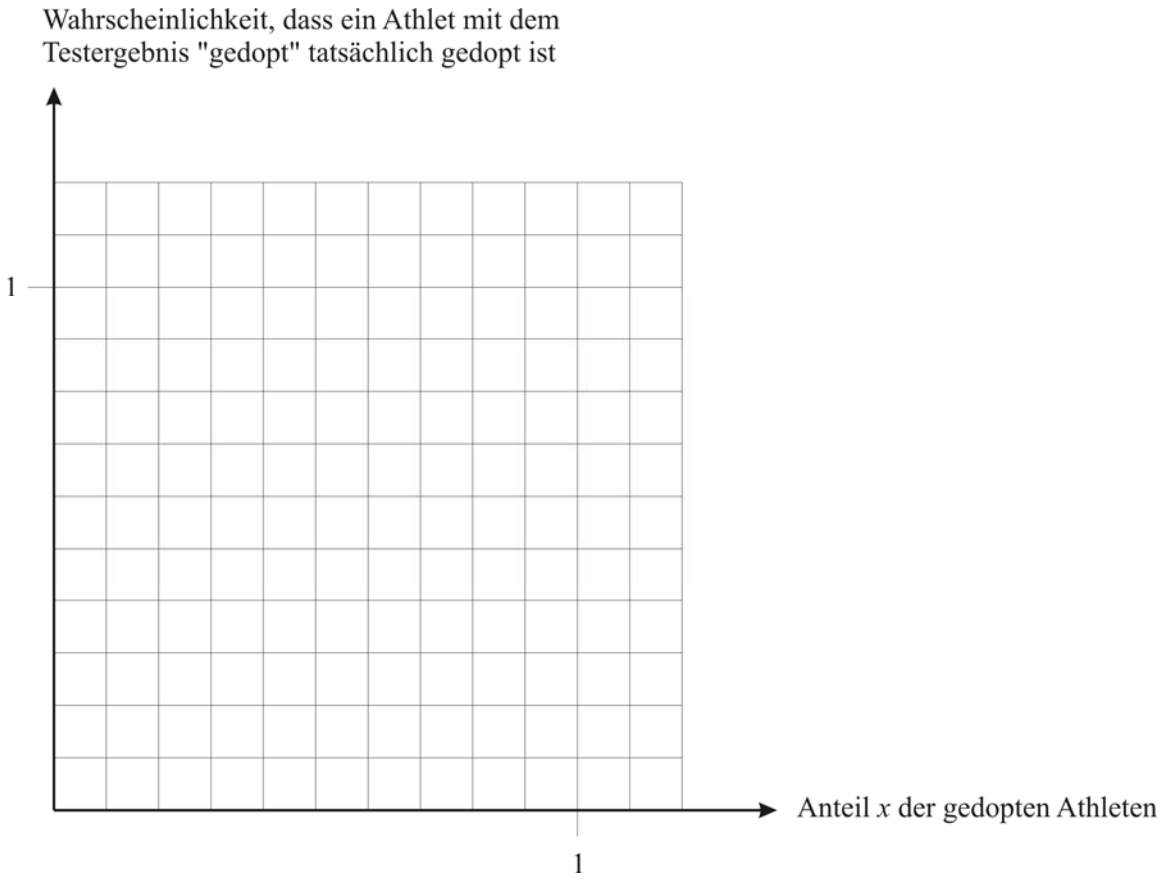
## Anlagen zur Aufgabe „Biathlon“

**zu Aufgabenteil d):**

Auf ganze Zahlen gerundete Erwartungswerte für 1000 Biathleten

| | Biathlet hat gedopt | Biathlet hat nicht gedopt | Summen |
|---|---|---|---|
| Test weist auf Doping hin | | | |
| Test weist nicht auf Doping hin | | | |
| Summen | | | 1000 |

**zu Aufgabenteil f):**

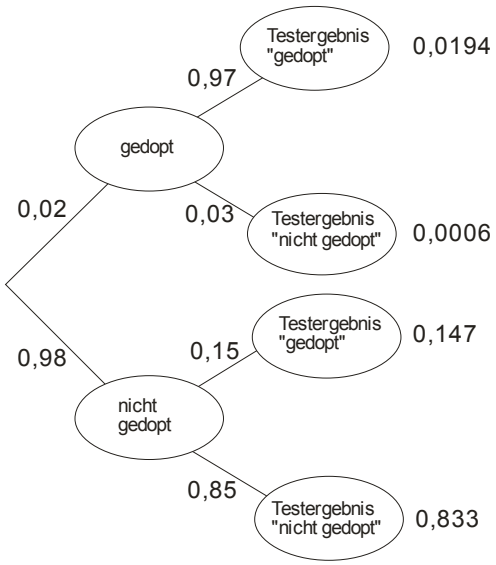


## Erwartungshorizont

| | Lösungsskizze | Zuordnung Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| a) | $0{,}9^3 = 0{,}729$ Mit dieser Wahrscheinlichkeit trifft Paula bei allen drei Schüssen. | 10 | | |
| b) | $3 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}2187$<br>Paula muss genau zwei der ersten drei Schüsse erfolgreich absolvieren, dafür gibt es drei Möglichkeiten. Dann muss sie mit dem nachgeladenen Schuss wiederum erfolgreich sein. Paula trifft also alle Scheiben mit einmaligem Nachladen mit der Wahrscheinlichkeit 0,2187.<br>$3 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 = 0{,}0486$<br>Hierbei muss Paula entweder genau zwei der ersten drei Schüsse erfolgreich absolvieren und dann mit dem nachgeladenen Schuss nicht treffen oder genau einen der ersten drei Schüsse erfolgreich absolvieren und dann mit dem nachgeladenen Schuss treffen. Paula muss also genau eine Strafrunde mit der Wahrscheinlichkeit 0,0486 laufen. | | 10 | 10 |
| c) | Aus den angegebenen Werten für die Dauer des Nachladens und der Strafrunden ergeben sich die genannten Zeiten wie folgt:<br>drei Treffer ohne Nachladen → 0 s (vgl. a)<br>einmal Nachladen → 10 s (vgl. b)<br>einmal Nachladen und eine Strafrunde → 10 s + 30 s = 40 s (vgl. b)<br>einmal Nachladen und zwei Strafrunden → 10 s + 2 · 30 s = 70 s<br>einmal Nachladen und drei Strafrunden → 10 s + 3 · 30 s = 100 s<br>Weitere Zeitverluste sind nach den genannten Regeln und Annahmen nicht möglich.<br>Die passenden Wahrscheinlichkeiten sind für die ersten drei Fälle in den Aufgabenteilen a bis c berechnet, bestätigt oder gezeigt bzw. für die letzten beiden Fälle im Aufgabentext gegeben worden.<br>$10 \cdot 0{,}2187 + 40 \cdot 0{,}0486 + 70 \cdot 0{,}0036 + 100 \cdot 0{,}0001 = 4{,}393$<br>Der Erwartungswert für Paulas Zeitverlust ist 4,393s. | 5 | 10 | |

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |

d)




*Anmerkung: Zulässig ist auch ein Baumdiagramm, in dem statt der Wahrscheinlichkeiten Erwartungswerte aufgeführt werden.*

*Alternative:*

| | Biathlet hat gedopt | Biathlet hat nicht gedopt | Summen |
|---|---|---|---|
| Test weist auf Doping hin | 19 | 147 | 166 |
| Test weist nicht auf Doping hin | 1 | 833 | 834 |
| Summen | 20 | 980 | 1000 |

10

e) Sei

$B_1$: Athlet ist mit der Substanz gedopt. $P(B_1) = 0{,}02$

$B_2$: Athlet ist nicht mit der Substanz gedopt. $P(B_2) = 0{,}98$

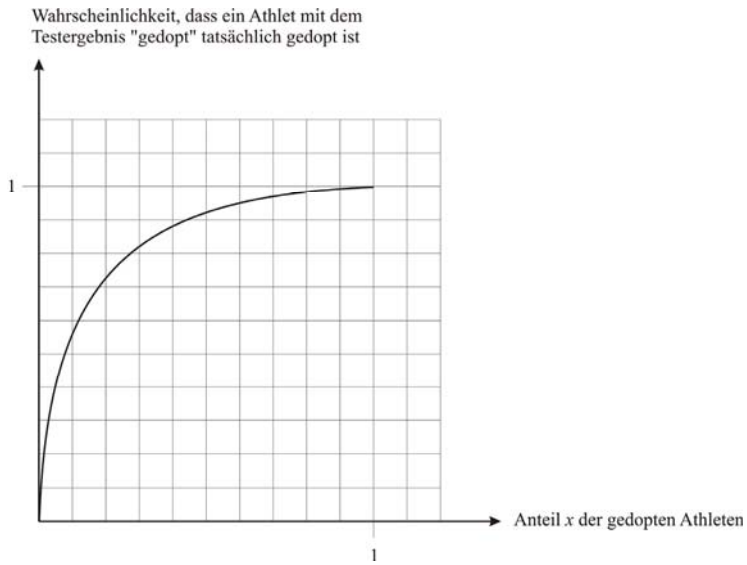
$A$: Athlet erhält Testergebnis „mit der Substanz gedopt“.

Es gilt $P(A \mid B_1) = 0{,}97$

$P(A \mid B_2) = 0{,}15$

Nach dem Satz von Bayes gilt dann für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1) \cdot P(B_1)}{P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2)} = \frac{0{,}97 \cdot 0{,}02}{0{,}97 \cdot 0{,}02 + 0{,}15 \cdot 0{,}98} \approx 0{,}117$$

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| e) | *Möglich ist auch eine Lösung mithilfe des Baumdiagramms.*<br>*Beim ebenfalls zulässigen direkten Ablesen in der Vierfeldertafel erscheint aufgrund der Rundung ein leicht abweichendes Resultat:* $\frac{19}{166} \approx 0{,}114$. | | 10 | |
| f) | Sei<br>$B_1$: Athlet ist mit der Substanz gedopt. $P(B_1) = x$<br>$B_2$: Athlet ist nicht mit der Substanz gedopt. $P(B_2) = 1 - x$<br>$A$: Athlet erhält Testergebnis "mit der Substanz gedopt".<br><br>Es gilt $P(A \mid B_1) = 0{,}98$<br>$P(A \mid B_2) = 1 - 0{,}91 = 0{,}09$<br><br>Nach dem Satz von Bayes gilt dann für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:<br>$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1) \cdot P(B_1)}{P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2)} = \frac{0{,}98 \cdot x}{0{,}98 \cdot x + 0{,}09 \cdot (1 - x)} = \frac{98x}{89x + 9}$<br>  <br><br>*Bemerkung: Zur Erleichterung der Korrektur befindet sich das Koordinatensystem mit dem Graphen in Originalgröße noch einmal unterhalb dieses tabellarischen Erwartungshorizontes.* | | | |

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| | Bei hohen Anteilen dopender Sportler hat der Test eine recht gute Aussagekraft. Fällt der Anteil jedoch unter ca. 40%, nimmt die Aussagekraft des Testes sehr stark ab, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass ein positiv getesteter Sportler tatsächlich gedopt ist, wird schnell sehr klein. Da die Abnahme des Anteils dopender Sportler letztlich das Ziel von Dopingtests ist, wird also die Aussagekraft (und damit der Nutzen) des Testes paradoxerweise umso geringer, je mehr Wirkung er zeigt. | 5 | 10 | 10 |
| g) | Die a-priori-Wahrscheinlichkeit bei der Durchführung des zweiten Testes ist die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit nach dem ersten Test, also die Wahrscheinlichkeit, dass ein beim ersten Test positiv getesteter Sportler tatsächlich gedopt hat. Der gesuchte Ausdruck ist mithin $P(P(x)) = \frac{9604x}{9523x+81}$. | | | 10 |
| | Insgesamt 100 BWE | 30 | 40 | 30 |

**Ergänzung zur Lösung zu Aufgabenteil f) – nur für die Lehrkraft bestimmt! –**