ANALYSIS 1

I.1 Tragfläche

Die Konstrukteure eines Flugzeuges haben das Profil (Querschnittsfläche) einer Tragfläche am Übergang zum Rumpf mithilfe mehrerer Funktionen im Intervall $[0;3]$ beschrieben. Das hintere Ende des Tragflächenprofils (in der Zeichnung links) wird zunächst als spitz zulaufend modelliert. Eine Längeneinheit entspricht dabei einem Meter in der Realität.
Die Oberseite der Tragfläche wird durch die Funktion f beschrieben mit $f(x) = 0{,}2 \cdot x \cdot \sqrt{3-x};\ x \in [0;3]$.
Im Intervall $[2{,}5;3]$ wird der untere Teil der Tragfläche durch die Funktion v beschrieben, dabei gilt:
$v(x) = -0{,}2 \cdot \sqrt{3-x}$.

a) • Berechnen Sie die in y-Richtung gemessene Dicke der Tragfläche an der Stelle $x = 2{,}5$.

• Berechnen Sie die Steigung des Tragflächenprofils am unteren Rand an der Stelle $x = 2{,}5$. **15 P**

Im Intervall [0 ; 2,5] wird das Tragflächenprofil unten durch eine Funktion g beschrieben.

b) Der Graph der Funktion g hat Nullstellen bei $x = 0$ und $x = 1$ und endet knickfrei bei $x = 2{,}5$ an dem Teil des Tragflächenprofils, der durch v beschrieben wird.

• Bestimmen Sie die Gleichung einer ganzrationalen Funktion g möglichst niedrigen Grades, die diese Eigenschaften erfüllt.
Hinweis: Wenn Sie die Funktion g nicht bestimmen konnten, dann verwenden Sie im Weiteren die Ersatzfunktion g mit $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{6125} \cdot x \cdot \left(370 \cdot x^2 - 1507 \cdot x + 1210\right)$.

• Zeichnen Sie die den Graphen der Funktion g im Bereich $[0;2{,}5]$ in das Koordinatensystem im Anhang ein. **20 P**

c) Bestimmen Sie mithilfe der Ableitungsfunktionen die maximale in y-Richtung gemessene Dicke der Tragfläche. **15 P**

d) • Für ein europäisches Projekt für Klimaforschung soll eine stangenförmige Messsonde an der Oberseite der Tragfläche an der Stelle $x = 2{,}25$ angebracht werden. Die Messsonde wird wegen der Strömungsverhältnisse der Luft tangential an der Profiloberseite montiert.
Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden t, auf der die Messsonde liegt.

• Für die Geschwindigkeitsmessung soll ein Staurohr tangential und parallel zur x-Achse an der oberen Seite der Tragfläche angebracht werden.
Bestimmen Sie den dafür geeigneten Punkt. **15 P**

e) In die Tragflächen sind Tanks einzubauen. Nur maximal 70 % der Querschnittsfläche des Tragflächenprofils stehen für den Einbau des Tanks zur Verfügung.
Untersuchen Sie, ob ein Tank mit der Querschnittsfläche 0,7 m^2 eingebaut werden kann. **15 P**

Der untere Rand des Tragflächenprofils wurde bislang im Intervall $[0;2,5]$ durch den Graphen der Funktion g beschrieben. Die Funktion g wird nun durch eine Funktion h_k ersetzt. Der untere Rand muss weiterhin folgende Eigenschaften erfüllen: Er geht durch den Ursprung und schließt sich bei $x = 2,5$ knickfrei an den Graphen von v an. Die ganzrationalen Funktionen h_k dritten Grades, die diese Eigenschaften erfüllen, lassen sich durch folgende Funktionsterme darstellen:

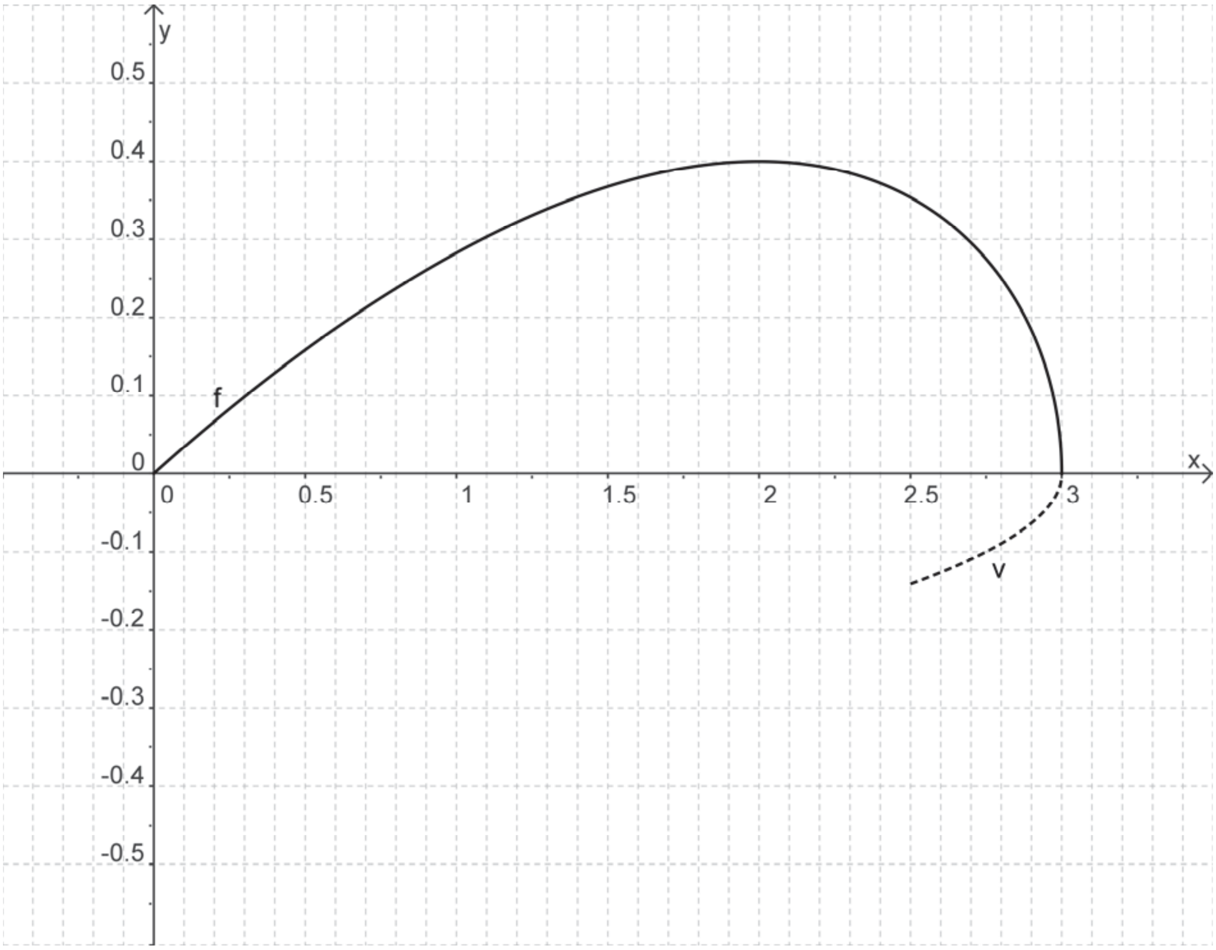
$$h_k(x) = \frac{7\cdot\sqrt{2}}{125}\cdot x^2 - \frac{9\cdot\sqrt{2}}{50}\cdot x + k\cdot x\cdot(2,5-x)^2, k\in\mathbb{R}\ .$$

f) • Zeigen Sie, dass bei jeder Wahl für den Parameter k der Graph der Funktion h_k die geforderten Eigenschaften erfüllt.

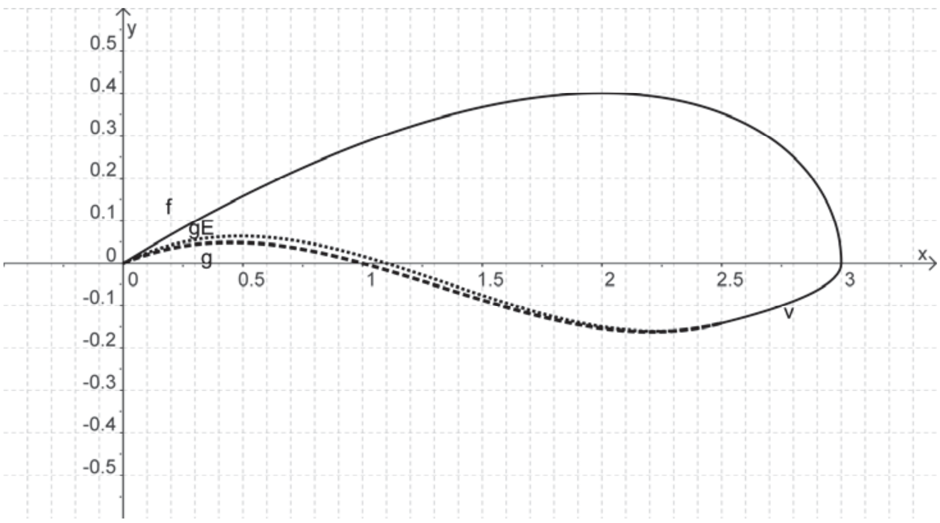
• Begründen Sie, warum sich für $k = 0,12$ ein Graph von h_k ergibt, der im Sachzusammenhang nicht sinnvoll ist.

• Bestimmen Sie rechnerisch den größten Wert für den Parameter k, sodass der Graph der Funktion h_k im Definitionsbereich nicht oberhalb der x-Achse verläuft. **20 P**

Anlage zur Aufgabe „Tragfläche“:



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	• Die Dicke der Tragfläche in Metern an der Stelle x = 2,5 berechnet sich zu $f(2{,}5)-v(2{,}5)=\frac{7\cdot\sqrt{2}}{20}\approx 0{,}495$. Die Tragfläche hat an der Stelle x = 2,5 ungefähr die Dicke von 0,50 m. • Die Steigung an der Stelle x = 2,5: $v'(x)=\frac{1}{10\cdot\sqrt{3-x}};v'(2{,}5)=\frac{\sqrt{2}}{10}\approx 0{,}141$. Die Steigung an der Stelle x = 2,5 beträgt etwa 0,14.	15		
b)	• Funktionsgleichung für *g*: Der Ansatz ist, weil vier Bedingungen vorliegen: $g(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d$. Die Bedingungen sind: $g(0)=0\wedge g(2{,}5)=v(2{,}5)\wedge g(1)=0\wedge g'(2{,}5)=v'(2{,}5)$. Die Lösung erhält man z. B. mithilfe des solve-Befehls: $g(x)=\frac{37\cdot\sqrt{2}}{225}\cdot x-\frac{247\cdot\sqrt{2}}{1125}\cdot x^2+\frac{62\cdot\sqrt{2}}{1125}\cdot x^3$ $\approx 0.233\cdot x-0.310\cdot x^2+0.0779\cdot x^3$ • Graph des Tragflächenprofils:  gE ist der Graph der Ersatzfunktion	5	15	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	Die Tragfläche hat die maximale Dicke im Intervall [0;2,5], denn f hat bei $x = 2{,}5$ eine negative und v eine positive Steigung. Also müssen nur die Funktionen f und g berücksichtigt werden. $(f-g)'(x) = \dfrac{1350 - 675\cdot x - \sqrt{2\cdot(3-x)}\cdot\left(370 - 988\cdot x + 372\cdot x^2\right)}{2250\cdot\sqrt{3-x}}$ $(f-g)'(x) = 0 \Rightarrow x = 2{,}1125. \quad (f-g)(2{,}1125) \approx 0{,}5576$ An der Stelle $x \approx 2{,}11$ liegt die maximale Dicke von ca. 0,56 m vor. Anhand der Graphen wird deutlich, dass an dieser Stelle ein Maximum vorliegt. Weiter gehende Untersuchungen sind deshalb nicht erforderlich. Die Lösung unter Verwendung der Ersatzfunktion lautet: $(f-g)'(x) = \dfrac{7350 - 3675\cdot x + \sqrt{2\cdot(3-x)}\cdot\left(-2420 + 6028\cdot x - 2220\cdot x^2\right)}{12250\cdot\sqrt{3-x}}$ $(f-g)'(x) = 0 \Rightarrow x = 2{,}1277. \quad (f-g)(2{,}1277) \approx 0{,}5553$		15	
d)	• Die Tangente t, die an der Stelle 2,25 an dem Graphen der Funktion f anliegt, ist gesucht. Die Funktionsgleichung lautet: $t(x) = m\cdot x + b$. Die Bedingungen an t sind: $t(2{,}25) = f(2{,}25) \wedge t'(2{,}25) = f'(2{,}25)$. Damit ergibt sich der Funktionsterm der Tangente: $t(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{80}\cdot\left(27 - 4x\right) \approx 0{,}5846 - 0{,}0866\cdot x$ • Die Ableitungsfunktion f' ist gleich null zu setzen. Die Lösung ist $x = 2$. Am Graphen ist deutlich zu erkennen, dass an der Stelle ein Hochpunkt vorliegt. Der Punkt hat die Koordinaten $(2 \mid f(2)) = (2 \mid 0{,}4)$.		15	
e)	Der Flächeninhalt des Querschnitts der Tragfläche ist zu bestimmen: $A = \int_0^{2,5}(f(x) - g(x))dx + \int_{2,5}^{3}(f(x) - v(x))dx = \dfrac{12\cdot\sqrt{3}}{25} + \dfrac{539\cdot\sqrt{2}}{4320} \approx 1{,}008$ Davon 70 % sind ca. 0,7054 m², damit ist der Einbau des Tanks in der gewünschten Größe möglich. Lösung für die Ersatzfunktion: $A = \int_0^{2,5}(f(x) - g(x))dx + \int_{2,5}^{3}(f(x) - v(x))dx = \dfrac{12\cdot\sqrt{3}}{25} + \dfrac{843\cdot\sqrt{2}}{7840} \approx 0{,}983.$ Davon 70 % sind weniger als 0,7 m², damit ist der Einbau des Tanks in der gewünschten Größe nicht möglich.		15	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
f)	Durch Einsetzen erhält man $h_k(0)=0$ sowie $h_k(2{,}5)=v(2{,}5)=-\frac{\sqrt{2}}{10}$ und $h_k'(2{,}5)=v'(2{,}5)=\frac{\sqrt{2}}{10}$ $h_0(x)=\frac{7\cdot\sqrt{2}}{125}\cdot x^2-\frac{9\cdot\sqrt{2}}{50}\cdot x$ hat die Nullstelle 0 und geht mit der richtigen Steigung durch den Punkt (2,5 | v(2,5)). Der Term $k\cdot x\cdot(2{,}5-x)^2$ nimmt den Wert null bei x = 0 und bei x = 2,5 an, zusätzlich ist die Steigung bei x = 2,5 gleich null, diese Werte werden durch den Faktor k nicht verändert. Für k = 0,12 schneidet der Graph von $h_{0,12}$ den Graphen von f an einer Stelle im Intervall [0; 2,5], die Tragfläche hätte an dieser Stelle die Dicke null. Die Steigung der Funktion h_k an der Nullstelle x = 0 ist $\frac{-9\cdot\sqrt{2}}{50}+\frac{25\cdot k}{40}$. Um die Bedingung zu erfüllen, darf die Steigung nicht positiv sein, sondern darf maximal den Wert null annehmen. Dies ist für $k=\frac{18\cdot\sqrt{2}}{625}\approx 0{,}0407$ der Fall. Damit liegt bei x = 0 ein Hochpunkt, der Tiefpunkt liegt aufgrund der Steigung an der Stelle x = 2,5 innerhalb des Intervalls]0 ; 2,5[, also bleibt der Graph der Funktion im negativen Bereich. Eine mögliche alternative Argumentation wäre: Eine zweite Nullstelle liegt erst bei 55/18 und somit außerhalb des Intervalls [0; 2,5] vor. Damit verbleibt der Graph im Intervall unterhalb der x-Achse.		5	15
	Insgesamt 100 BWE	20	65	15

Analysis 2

I.2 Glaskugeln

Ein Unternehmen stellt Glaskugeln für Großabnehmer her. Die Gesamtkosten K_g der Produktion (in Geldeinheiten – GE) können in Abhängigkeit von den produzierten Mengeneinheiten x mit folgender Funktion beschrieben werden:

$$K_g(x) = \frac{1}{10}x^3 - 5x^2 + 125x + 900\,.$$

a) Bestätigen Sie, dass die Funktion K_g monoton wachsend ist und interpretieren Sie dies im Sachkontext. **10 P**

b) Das Unternehmen will die Glaskugeln zum Preis von 200 GE pro Mengeneinheit anbieten.
Der Erlös, der als Produkt aus Menge und Preis definiert ist, ergibt sich dann als $E_1(x) = 200x$.

- Geben Sie die Gewinnfunktion an
- Bestimmen Sie die Gewinnzone (d.h. Anzahl der Mengeneinheiten, die das Unternehmen mindestens bzw. höchstens produzieren und verkaufen muss, damit die Kosten geringer als der Erlös sind).
- Berechnen Sie mit Hilfe der Ableitungsfunktion den maximalen Gewinn. **20 P**

c) Den Wert $K_g(0)$ nennt man Fixkosten. Aufgrund der Verteuerung von Miete und Heizung steigen die Fixkosten beträchtlich. Begründen Sie, dass diese Kostensteigerung keinen Einfluss auf die bei c) berechneten Mengeneinheiten für den maximalen Gewinn hat. **5 P**

Marktbeobachtungen haben folgende Informationen ergeben:

Wenn folgende Anzahlen von Mengeneinheiten verkauft werden sollen,	10	30	50	70	90
dann darf der Preis (in GE) nicht höher sein als	320	280	220	160	120

d) Der dargestellte Sachverhalt zwischen der Anzahl der Mengeneinheiten x und dem Preis p soll näherungsweise durch Funktionen beschrieben werden:

i) Geben Sie die Gleichung der Regressionsgeraden an.

Da man davon ausgehen kann, dass man unterhalb eines gewissen geringen Preises die gesamte Produktion absetzen und ab einer gewissen Preishöhe keinen Absatz mehr erzielen kann, ist auch eine Modellierung denkbar, bei der der Funktionsverlauf für $x < 10$ und $x > 90$ konstant ist.

ii) Wählen Sie eine (Stütz-) Stelle aus dem Intervall $]10;90[$ und bestimmen Sie als Näherung für $10 \le x \le 90$ eine Funktion möglichst geringen Grades, deren Graph durch den Stützpunkt verläuft und an den Stellen $x = 10$ und $x = 90$ eine waagerechte Tangente besitzt.

iii) Mit einer solchen Näherung ergeben sich andere Erlösfunktionen als E_1.
Bestimmen Sie für eine der obigen Funktionen (i oder ii) die neue Erlösfunktion E_2. **15 P**

Da verschiedene Wege zur Bestimmung einer Näherungsfunktion möglich sind, rechnen Sie im Folgenden weiter mit der neuen linearen Funktion $p(x) = -2{,}5x + 350$ für den Zusammenhang zwischen Preis und zu verkaufenden Mengeneinheiten.

e) Bestimmen Sie analog zu b) die Gewinnzone und den maximalen Gewinn. **15 P**

Für das Unternehmen sind auch die so genannten Stückkosten (Kosten pro Mengeneinheit) $K_{St}(x) = \frac{K_g(x)}{x}$ von Interesse.

f) Geben Sie die Stückkostenfunktion an und bestimmen Sie die Anzahl der Einheiten, bei der die Stückkosten minimal sind. **15 P**

Der Preis, zu dem das Produkt auf den Markt gebracht werden soll, wird nach (unerlaubten) Absprachen mit der Konkurrenz festgelegt. Das Unternehmen produziert genau so viele Mengeneinheiten, wie sie nach obigen Marktbeobachtungen zu dem Preis auch verkaufen kann.

g) Ermitteln Sie den Gewinn, den das Unternehmen aus der Glaskugelproduktion erwarten kann, wenn der Preis pro Mengeneinheit bei 250 GE festgelegt wird. **5 P**

h) Der Preis pro Einheit soll zwischen 230 GE und 270 GE festgelegt werden.
Bestimmen Sie den zu erwartenden durchschnittlichen Gewinn pro Einheit. **15 P**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Untersuchung der Ableitung zeigt, dass $K_g'(x) \neq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$ und damit die Funktion streng monoton ist. Aus z.B. $K_g{}'(0) = 125 > 0$ folgt, dass die Funktion streng monoton steigend ist. Der Sachkontext macht unmittelbar deutlich: Wenn mehr Einheiten produziert werden, müssen die Gesamtkosten steigen.	5	5	
	Berechnung der Gewinnzone: Zu lösen ist die Gleichung $E_1(x) = K_g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{10}x^3 - 5x^2 + 125x + 900 = 200x$ Es ergeben sich die Lösungen $x_1 = -5 + \sqrt{175},\; x_2 = -5 - \sqrt{175}$ und $x_3 = 60$ $x_1 \approx 8{,}229,\; x_2 \approx -18{,}229$ und $x_3 = 60$ Da x_2 im Sachkontext nicht relevant ist und der Graph der Erlösfunktion zwischen $x \approx 8{,}23$ und $x = 60$ oberhalb des Graphen der Kostenfunktion verläuft, ergibt sich als Gewinnzone der Produktionsbereich $\approx 8{,}23 \le x \le 60$. Die Gewinnfunktion ergibt sich als Differenz aus Erlös und Kosten. $G(x) = 200x - \left(\frac{1}{10}x^3 - 5x^2 + 125x + 900\right) = -\frac{1}{10}x^3 + 5x^2 + 75x - 900$ Zur Berechnung des Gewinnmaximums ist die erste Ableitung zu betrachten. $G'(x) = -\frac{3}{10}x^2 + 10x + 75$. Die Lösung der Gleichung $G'(x) = 0$ liefert $x_1 = 39{,}640...$ und $x_2 = -6{,}306...$ (im Sachkontext nicht relevant). Aus dem Vorzeichenwechsel (+/–) der Ableitungsfunktion an der Stelle $x_1 = 39{,}640...$ schließt man auf einen Hochpunkt. Es ergibt sich also ein maximaler Gewinn, wenn ca. 40 Mengeneinheiten produziert und verkauft werden. G(40) = 3700. Der maximale Gewinn beträgt 3700 GE.	10	10	
	Der maximale Gewinn wird mit Hilfe der Ableitungsfunktion bestimmt. Da die Fixkosten aber das absolute Glied bestimmen, (das beim Differenzieren wegfällt), sind die bei c) bestimmten Mengeneinheiten für das Gewinnmaximum unabhängig von den Fixkosten. (Auch eine Argumentation im Sachkontext ist möglich.)		5	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
d)	i) Die Werte werden in ein Datenblatt eingegeben und dann wird durch lineare Regression die gesuchte Funktion bestimmt: $p: x \to -2{,}6 \cdot x + 350$. ii) Es ist für eine allgemeine Funktion 4. Grades: $p: x \to a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ das Gleichungssystem $p(10) = 320 \wedge p'(10) = 0 \wedge p(90) = 120 \wedge p'(90) = 0 \wedge p(50) = 220$ zu lösen. Dabei können die Funktionswerte an den Stellen x =30 oder x = 70 gleichwertig (statt x = 50) verwendet werden. Ergebnisse für x = 50 $p: x \to \frac{1}{1280} \cdot x^3 - \frac{15}{128} \cdot x^2 + \frac{135}{64} \cdot x + \frac{9915}{32}$. für x = 30: $p: x \to -\frac{7}{1152000} \cdot x^4 + \frac{23}{11520} \cdot x^3 - \frac{17}{90} \cdot x^2 + \frac{205}{64} \cdot x + \frac{19515}{64}$ für x = 70: . $p: x \to -\frac{7}{1152000} \cdot x^4 - \frac{1}{2304} \cdot x^3 - \frac{131}{2880} \cdot x^2 + \frac{65}{64} \cdot x + \frac{20145}{64}$. Die Erlösfunktion lautet dann: $E_2(x) = -2{,}6 \cdot x^2 + 350 \cdot x$ oder $E_2(x) = \frac{1}{1280} \cdot x^4 - \frac{15}{128} \cdot x^3 + \frac{135}{64} \cdot x^2 + \frac{9915}{32} \cdot x$ (für x = 50)	5	5	5
e)	Zur Berechnung des Gewinnbereichs: $E_2(x) = K_g(x)$ $\Leftrightarrow \frac{1}{10}x^3 - 5x^2 + 125x + 900 = -2{,}5x^2 + 350x \Leftrightarrow \frac{1}{10}x^3 - 2{,}5x^2 - 225x + 900 = 0$ Es ergeben sich die Lösungen $x_1 \approx 3{,}86$, $x_2 \approx -38{,}86$ und $x_3 = 60$ Da x_2 im Sachkontext nicht relevant ist, ergibt sich als Gewinnzone $\approx 3{,}86 \le x \le 60$. Zur Berechnung der gewinnmaximalen Menge ist wieder die erste Ableitung der Gewinnfunktion zu betrachten. $G_1(x) = -2{,}5x^2 + 350x - \frac{1}{10}x^3 + 5x^2 - 125x - 900$ $G_1'(x) = 5x + 225 - \frac{3}{10}x^2 = 0$ hat die Lösungen: $x = 36{,}95 \vee x \approx -20{,}29$ im Sachkontext nicht relevant. Damit ergibt sich eine gewinnmaximale Menge von $x = 37$ Mengeneinheiten. Der maximale Gewinn beträgt 5782,20 GE.		15	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
f)	Stückkosten: $K_{St}(x)=\frac{K_g(x)}{x}=\frac{1}{10}x^2-5x+125+\frac{900}{x}$. Zu untersuchen ist die Ableitungsfunktion $K_{St}{}'$. Die Gleichung $K'_{St}(x)=\frac{x^3-25\cdot x^2-4500}{5\cdot x^2}=0$ hat die einzige Lösung x = 30. Vorzeichenwechsel $(-/+)$ von K'_{St} (oder $K''_{St}(30)>0$) bedeutet, dass ein Tiefpunkt vorliegt. Bei 30 Mengeneinheiten sind die Stückkosten minimal.	5	10	
g)	Wird der Preis bei 250 GE festgelegt, dann sind nach der Funktion p 40 Einheiten zu produzieren und zu verkaufen. Der Gewinn pro Einheit ergibt sich aus der Differenz $p(40)-K_{St}(40)$. Pro Einheit beträgt der Gewinn 142,50 GE.		5	
h)	Da $p(48)=230$ und $p(32)=270$, folgt der Ansatz $d=\frac{1}{48-32}\cdot\int_{32}^{48}\left(p(x)-K_{St}(x)\right)dx \approx 140{,}06.$ (Oder der diskrete Ansatz $d=\frac{1}{17}\cdot\sum_{32}^{48}\left[p(x)-K_s(x)\right]\approx 139{,}75$) Der zu erwartende durchschnittliche Gewinn pro Einheit beträgt ca. 140 GE.			15
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

LA/AG 1

II.1 Kirchturm

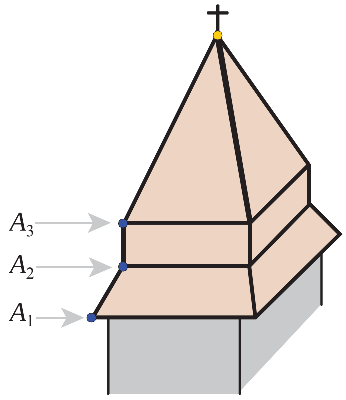
Das Kupferdach des Kirchturms einer kleinen Kirche besteht aus einem Pyramidenstumpf, einem aufgesetzten Quader und einer auf den Quader aufgesetzten Pyramide (siehe Abbildung).

In den Kirchenbüchern befinden sich folgende Angaben:

<ins>Pyramidenstumpf</ins>:
Grundfläche: Quadrat mit der Seitenlänge 8 m
Deckfläche: Quadrat mit der Seitenlänge 6 m.
Höhe: 2 m

<ins>Quader</ins>:
Grund- und Deckfläche: Quadrat mit der Seitenlänge 6 m.
Höhe: 2 m

<ins>Pyramide</ins>:
Grundfläche: Quadrat mit der Seitenlänge 6 m.
Höhe: 6 m



a) Berechnen Sie den Inhalt der gesamten Dachfläche, zu der auch die vier Seiten des Quaders gehören. **15 P**

b) Untersuchen Sie, ob die unteren Dachflächen des Pyramidenstumpfes und die zugehörigen oberen Dachflächen der Pyramide parallel sind.
Geben Sie die jeweiligen Neigungswinkel auch in Grad an. **15 P**

c) Nun soll ein Schrägbild des Kirchturms im Koordinatensystem der Anlage angefertigt werden. Die Spitze des Turmdaches liege dabei auf der x_3-Achse, heiße S und hat die Koordinaten $(0|0|10)$. Die, die Kanten der Grundfläche liegen in der x_1-x_2-Ebene und die Kanten der Deckflächen verlaufen parallel zur x_1- bzw. x_2-Achse. Auf allen Achsen gilt: 1 LE $\hat{=}$ 1 m.
In der unteren Ebene sollen die Eckpunkte A_1, B_1, C_1, D_1 heißen (von oben gesehen gegen den Uhrzeigersinn), entsprechend in der mittleren Ebene A_2, B_2, C_2, D_2 und in der oberen Ebene A_3, B_3, C_3, D_3.
Dabei liegen dann A_1, A_2 und A_3 so auf einer Dachkante, wie oben in der nicht maßstabsgetreuen Abbildung dargestellt.
Geben Sie in der Anlage die fehlenden Koordinaten der acht Punkte an und zeichnen Sie das Dach in das Koordinatensystem ein. **15 P**

d) Es soll ein Stützbalken eingezogen werden, der von der Mitte M_3 der Dachkante $\overline{C_3D_3}$ die gegenüberliegende Dachfläche A_3B_3S in einem Punkt P senkrecht abstützt.
- Zeigen Sie, dass der Punkt P (1,8 | 0 | 6,4) die angegebenen Eigenschaften hat.
- Berechnen Sie die Länge des Balkens (ohne Berücksichtigung seiner Dicke).
- Begründen Sie: Nicht bei jedem Dachstuhl in Form einer quadratischen Pyramide ist es möglich, vom Mittelpunkt M einer Kante der Grundfläche aus die gegenüberliegende dreieckige Dachfläche F senkrecht abzustützen. **25 P**

e) Ein weiterer Stützbalken soll von A_3 aus die diagonal gegenüberliegende Kante von C_3 nach S im Punkt $Q\,(-1 \mid 1 \mid 8)$ abstützen.

- Zeigen Sie, dass dieser Balken mit jenem aus Teilaufgabe d) nicht kollidiert, wenn man die Dicke der Balken nicht berücksichtigt.
- Zeigen Sie die Richtigkeit der folgenden drei Aussagen:
  1. Der Punkt O_1 mit $O_1\left(\frac{6}{7} \mid 0 \mid \frac{83}{14}\right)$ liegt auf dem Balken von M_3 nach P (Teilaufgabe d)).
  2. Der Punkt O_2 mit $O_2\left(\frac{9}{14} \mid -\frac{9}{14} \mid \frac{89}{14}\right)$ liegt auf dem Balken von A_3 nach Q.
  3. Die Strecke $\overline{O_1O_2}$ verläuft senkrecht zu beiden Balken.

  Hinweis: Die Rechnung wird übersichtlicher, wenn Sie geeignet ausklammern:
  O_1: $\left(\frac{6}{7} \mid 0 \mid \frac{83}{14}\right) = \frac{1}{14} \cdot (12 \mid 0 \mid 83)$ bzw. O_2: $\left(\frac{9}{14} \mid -\frac{9}{14} \mid \frac{89}{14}\right) = \frac{1}{14} \cdot (9 \mid -9 \mid 89)$.
- Bestimmen Sie nun begründet, bis zu welcher „Dicke“ beide Balken problemlos eingebaut werden können. **20 P**

f) Stellen Sie sich vor. dass oben auf der Kirchturmspitze eine Kugel mit dem Radius 2 m aufgesetzt ist. Der Mittelpunkt befindet sich auf der x_3-Achse.
Nachts wird die Kugel vom Punkt $B(20 \mid 20 \mid -30)$ mit einem Scheinwerfer beleuchtet. Der (als mathematischer Strahl idealisierter) Lichtstrahl hat den Richtungsvektor $\vec{l} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie den Auftreffpunkt des Lichtstrahles auf der Kugel. **10 P**

Anlage zur Aufgabe „Kirchturm“

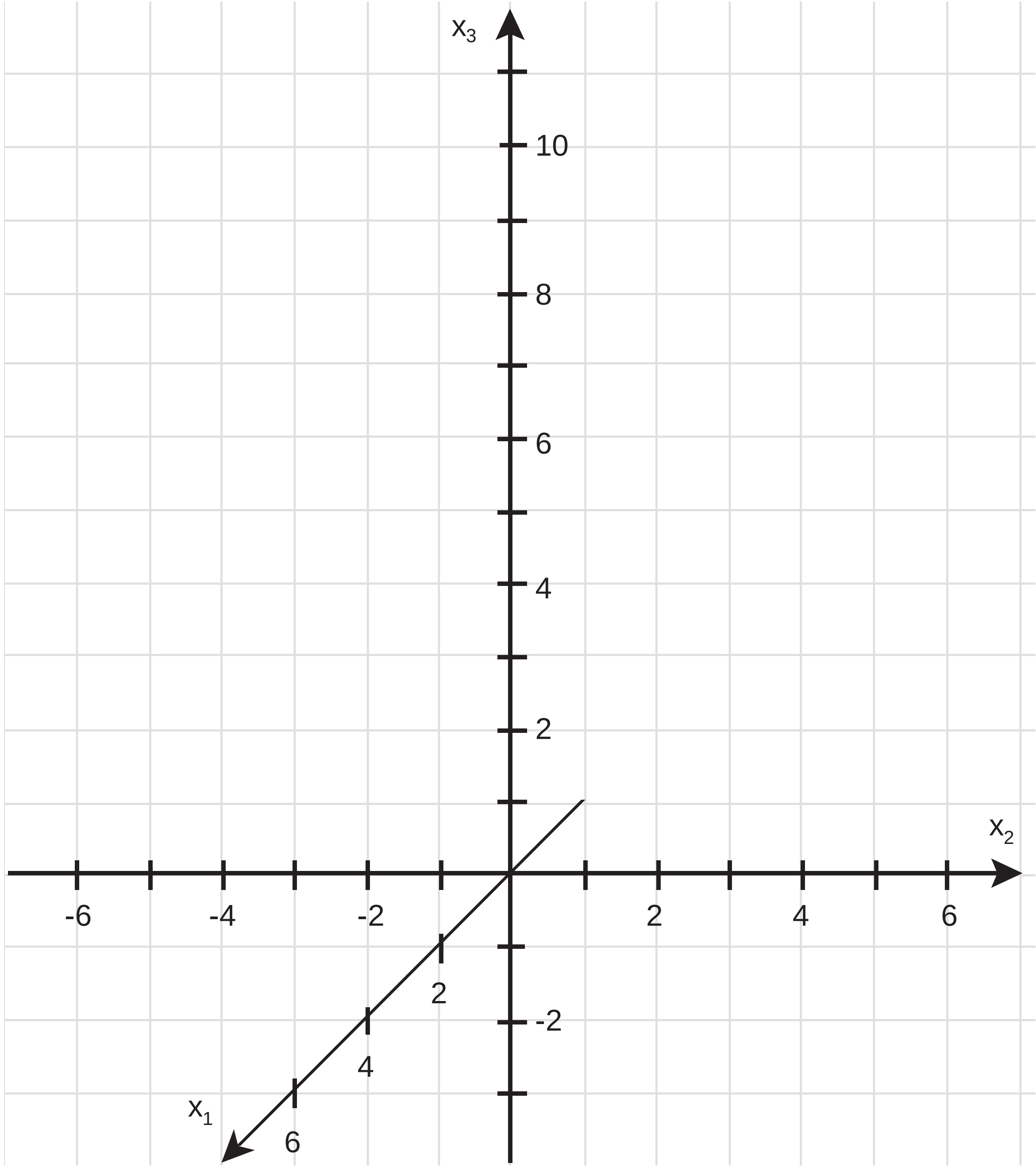
Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten.

$A_1(\ \ |\ \ |\ \ )$, $B_1(\ \ |\ \ |\ \ )$, $C_1(\ \ |\ \ |\ \ )$, $D_1(\ \ |\ \ |\ \ )$,

$A_2(\ \ |\ \ |\ \ )$, $B_2(\ \ |\ \ |\ \ )$, $C_2(\ \ |\ \ |\ \ )$, $D_2(\ \ |\ \ |\ \ )$,

$A_3(3 \mid -3 \mid 4)$, $B_3(3 \mid 3 \mid 4)$, $C_3(-3 \mid 3 \mid 4)$, $D_3(-3 \mid -3 \mid 4)$,

$S(0 \mid 0 \mid 10)$.

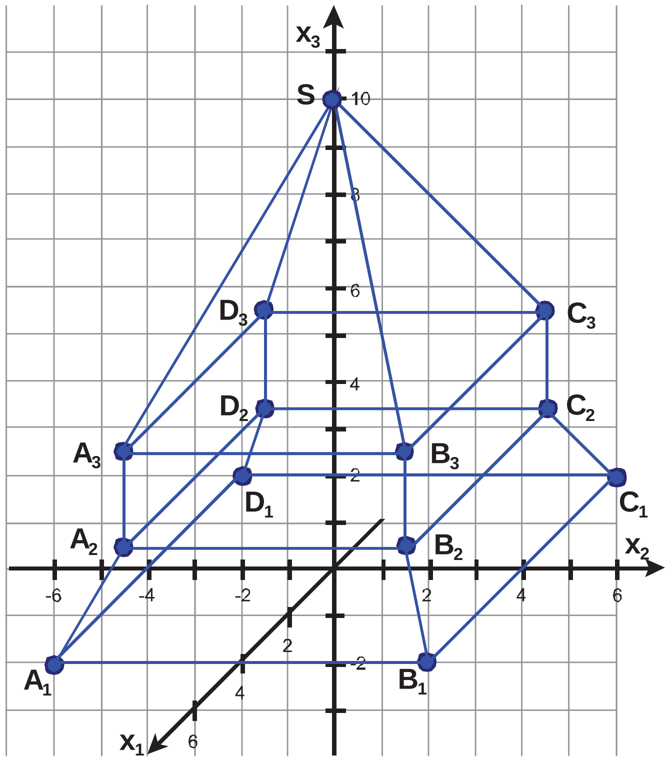


Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Die gesamte Dachfläche besteht aus jeweils vier kongruenten – Trapezflächen – Rechtecksflächen – Dreiecksflächen. <u>Berechnung einer Trapezfläche:</u> Grundseite unten: 8 m; Grundseite oben: 6 m. Die Trapezhöhe kann man auffassen als Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Kathetenlängen 2 m (Höhe des Pyramidenstumpfes) und 1 m (halbe Differenz der Seitenlängen von Grundquadrat und Deckquadrat). Mit dem Satz des Pythagoras erhält man die Trapezhöhe: $h_T = \sqrt{5}$ m. Der Inhalt einer Trapezfläche beträgt also: $\frac{8+6}{2}\cdot\sqrt{5}\ \text{m}^2 = 7\cdot\sqrt{5}\ \text{m}^2 \approx 15{,}65\ \text{m}^2$. <u>Berechnung einer Rechtecksfläche:</u> Seitenlänge: 6 m, Höhe: 2 m. Flächeninhalt: 12 m^2. <u>Berechnung einer Dreiecksfläche :</u> Länge der Grundseite: 6 m. Die Dreieckshöhe kann man auffassen als Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Kathetenlängen 6 m (Höhe der Pyramide) und 3 m (halbe Seitenlänge des Grundquadrats). Mit dem Satz des Pythagoras erhält man die Dreieckshöhe: $h_\Delta = \sqrt{45}\ \text{m} = 3\cdot\sqrt{5}$ m. Der Inhalt einer Dreiecksfläche beträgt also: $3\cdot 3\cdot\sqrt{5}\ \text{m}^2 \approx 20{,}12\ \text{m}^2$. <u>Das gesamte Kirchturmdach</u> hat also folgenden Flächeninhalt: $A_D = 4\cdot\left(7\sqrt{5}+12+9\sqrt{5}\right)\ \text{m}^2 = 4\cdot\left(16\sqrt{5}+12\right)\ \text{m}^2 \approx 191\ \text{m}^2$.	15		
b)	In den in a) betrachteten rechtwinkligen Dreiecken tauchen die Neigungswinkel der betreffenden Dachfläche auf: Trapezfläche (am Kegelstumpf): $\tan(\alpha) = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow \alpha \approx 63{,}4°$. Dreiecksfläche (an der Pyramide): $\tan(\beta) = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow \beta \approx 63{,}4°$. Die Neigungswinkel sind gleich, die betrachteten Flächen sind also parallel. Wegen der Symmetrie der Figur gilt die Aussage auch für die anderen Seiten. *Nachweis kann auch mit Methoden der Analytischen Geometrie geführt werden.*	5	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

c)



Gesuchte Koordinaten:

$A_1(4 \mid -4 \mid 0)$, $B_1(4 \mid 4 \mid 0)$, $C_1(-4 \mid 4 \mid 0)$, $D_1(-4 \mid -4 \mid 0)$,

$A_2(3 \mid -3 \mid 2)$, $B_2(3 \mid 3 \mid 2)$, $C_2(-3 \mid 3 \mid 2)$, $D_2(-3 \mid -3 \mid 2)$.

Gegebene Koordinaten (Eckpunkte Quaderdeckfläche, Kirchturmspitze):

$A_3(3 \mid -3 \mid 4)$, $B_3(3 \mid 3 \mid 4)$, $C_3(-3 \mid 3 \mid 4)$, $D_3(-3 \mid -3 \mid 4)$, $S(0 \mid 0 \mid 10)$. — I: 5, II: 10

d) Nachweis der Behauptung:

Für den Mittelpunkt M_3 der Dachkante von C_3 nach D_3 gilt $M_3\,(-3 \mid 0 \mid 4)$.

Mit dem gegebenen Punkt $P\,(1{,}8 \mid 0 \mid 6{,}4)$ folgt $\overrightarrow{M_3P} = \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ 0 \\ 2{,}4 \end{pmatrix}$.

Die Ebene E, in der die Dachfläche A_3B_3S liegt, hat z. B. folgende Gleichung:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Es gilt: $\begin{pmatrix} 4{,}8 \\ 0 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = 0 \wedge \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ 0 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 0$.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

Daraus folgt: $\overrightarrow{M_3P} = \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ 0 \\ 2{,}4 \end{pmatrix}$ ist ein **Normalenvektor** der Ebene E,

da er auf deren beiden Richtungsvektoren senkrecht steht:

P ist zudem ein **Punkt der Ebene** E, weil aus $\begin{pmatrix} 1{,}8 \\ 0 \\ 6{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

folgt:
- I $\quad 3r + 3s = 1{,}8$
- II $\quad -3r + 3s = 0$
- III $\quad 10 - 6r - 6s = 6{,}4$

Aus II folgt $r = s$, woraus eingesetzt in I $6s = 1{,}8$ folgt, also $r = s = 0{,}3$.
Probe mit III: $10 - 6 \cdot 0{,}3 - 6 \cdot 0{,}3 = 10 - 1{,}8 - 1{,}8 = 6{,}4$.

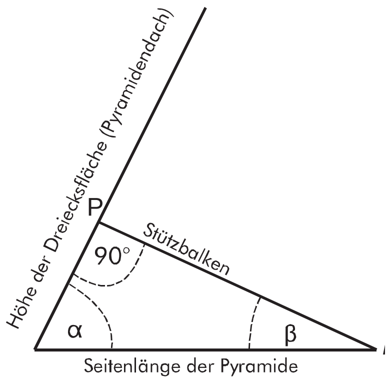
P ist ein **Punkt der Dachfläche** $A_3\, B_3\, S$, denn für die x_1-Koordinate 1,8 gilt: $0 < 1{,}8 < 3$ und für die x_3-Koordinate 6,4 gilt: $4 < 6{,}4 < 10$.

Es kann auch elementargeometrisch argumentiert werden: da P in der x_1-x_3-Ebene liegt, genügt es zu zeigen, dass P Punkt der Höhe des Dreiecks $A_3\, B_3\, S$ mit den Endpunkten S und $(3 \mid 0 \mid 4)$ ist.

<u>Berechnung der Länge des Balkens:</u>

$\left|\overrightarrow{M_3P}\right| = \sqrt{4{,}8^2 + 0 + 2{,}4^2} = 5{,}3665\ldots$. Damit ist der Balken ca. 5,40 m lang.

<u>Lösung ist nicht immer möglich:</u>



Die Winkel α und β ergänzen sich zu 90°: je kleiner α wird, desto größer wird β.

In Abhängigkeit von der Höhe des Dreiecks und der Seitenlänge der Pyramide kann bei großem Winkel β die Situation eintreten, dass das Lot die Seitenfläche nicht mehr trifft.

Auch die Angabe eines konkreten Beispiels ist als Begründung natürlich korrekt.

I	II	III
5	10	10

e) Um die Aussage zu beweisen, muss man zeigen, dass die Geraden durch M_3 und P einerseits und die Gerade durch A_3 und Q andererseits keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Die Gerade durch M_3 und P heiße g, die Gerade durch A_3 und Q heiße h. Dann gilt:

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ 0 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	I $\quad -3 + 4{,}8r = 3 - 4s$ II $\quad 0 = -3 + 4s$ III $\quad 4 + 2{,}4r = 4 + 4s$ Aus II folgt: $\quad 0 = -3 + 4s$ und daher $s = \frac{3}{4}$. Setzt man diesen Wert in I ein, so folgt $-3 + 4{,}8\,r = 3 - 3$, also $r = \frac{3}{4{,}8} = \frac{5}{8}$. Setzt man beide Werte in III ein, so folgt auf der linken Seite: $\quad 4 + 1{,}5 = 5{,}5$ und auf der rechten Seite: $\quad 4 + 3 = 7$. Da die beiden Seiten von III verschieden sind, gibt es keinen Schnittpunkt der beiden Geraden. <u>Begründungen:</u> 1. $\quad O_1: \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ 0 \\ \frac{83}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{45}{56} \cdot \begin{pmatrix} \frac{24}{5} \\ 0 \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}$. Da $0 < \frac{45}{56} < 1$, liegt O_1 zwischen M_3 und P. 2. $\quad O_2: \begin{pmatrix} \frac{9}{14} \\ -\frac{9}{14} \\ \frac{89}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{33}{56} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. Da $0 < \frac{33}{56} < 1$, liegt O_2 zwischen A_3 und Q. 3. $\quad \overrightarrow{O_1O_2} = \frac{3}{14} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ verläuft senkrecht zu $\overrightarrow{M_3P}$, denn $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$. $\overrightarrow{O_1O_2} = \frac{3}{14} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ verläuft senkrecht zu $\overrightarrow{A_3Q}$, denn $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$. <u>Abstand:</u> Die kürzeste Verbindungsstrecke zwischen den beiden Balken muss senkrecht zu jedem der Balken stehen. Das trifft zu für $\overrightarrow{O_1O_2}$, also ist die Länge der Strecke von O_1 nach O_2 der „Abstand" zwischen den beiden Geraden g und h. $\left\|O_1O_2\right\| = \frac{3}{14} \cdot \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{3 \cdot \sqrt{14}}{14} \approx 0{,}8$. Solange die halbe Summe der beiden Durchmesser (jeweils vom Umkreis der Schnittfläche) kleiner als 80 cm ausfällt, ist der Einbau der beiden Stützen ohne Probleme möglich.		10	10

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Die Kugel hat die Gleichung $k=(x_1-0)^2+(x_2-0)^2+(x_3-12)^2=2^2$. Der Lichtstrahl verläuft entlang der Geraden $g=\begin{pmatrix}20\\20\\-30\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-10\\-10\\21\end{pmatrix}$. Durch komponentenweises Einsetzen der entsprechenden Koordinaten der Geradendefinition in die Kugelgleichung erhält man $((20-10s)-0)^2+((20-10s)-0)^2+((-30+21s)-10)^2=4$. Der solve-Befehls liefert die beiden Lösungen $s_1=2-\frac{2\sqrt{641}}{641}\approx 1{,}92$ und $s_1=2-\frac{2\sqrt{641}}{641}\approx 2{,}08$. Der Auftreffpunkt kann nur auf der B zugewandten Seite der Kugel liegen, also ist s_1 die einzig sinnvolle Lösung. Durch Einsetzen in die Geradengleichung erhält man die Koordinaten des Auftreffpunktes $\left(20-\frac{2\sqrt{641}}{641}10 \mid 20-\frac{2\sqrt{641}}{641}10 \mid -30+\frac{2\sqrt{641}}{641}21\right)\approx(0{,}8\mid 0{,}8\mid 10{,}3)$. Der Auftreffpunkt des Scheinwerferstrahles auf der Kugeloberfläche hat also die ungefähren Koordinaten $(0{,}8\mid 0{,}8\mid 10{,}3)$		10	
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

LA /AG 2

II.2 Heuschrecken

Berichte über Heuschreckenplagen liegen seit vorchristlichen Zeiten z.B. aus dem alten Ägypten vor. Wanderheuschrecken haben die Fähigkeit ihr Verhalten zu ändern, sich zu Schwärmen zusammenzuschließen und in diesen Schwärmen große Entfernungen zurückzulegen. In „ruhigen“ Jahren ist der Lebensraum der Wanderheuschrecke auf die trockenen und halbtrockenen Zonen Afrikas, des Nahen Ostens und Südwestasiens beschränkt, auf ein Gebiet von ca. 16 Millionen Quadratkilometern. Während einer Plage können sich Wanderheuschrecken hingegen über ein Gebiet von ca. 29 Millionen Quadratkilometern verbreiten. In Abhängigkeit von Umwelteinflüssen und davon, ob Wanderheuschrecken vereinzelt oder in Schwärmen leben, entwickeln sich diese Populationen sehr unterschiedlich.

Die Lebensstadien einer Heuschrecke werden im Folgenden vereinfachend durch Eier, junge Larven, alte Larven und Adulte (Ausgewachsene) beschrieben. Diese Stadien werden der Reihe nach durchlaufen. Vereinfachend wird angenommen, dass jedes Stadium eine Länge von 10 Tagen hat.

Nur adulte weibliche Heuschrecken legen Eier. Die Population besteht zur Hälfte aus weiblichen Tieren.

Im Folgenden sei:

E_n: Anzahl der Eier zum Zeitpunkt n

J_n: Anzahl der jungen Larven zum Zeitpunkt n

L_n: Anzahl der alten Larven zum Zeitpunkt n

A_n: Anzahl der adulten Heuschrecken zum Zeitpunkt n

n: Zeit gemessen in Abschnitten zu jeweils 10 Tagen

Eine Heuschreckenpopulation zum Zeitpunkt n wird durch den Vektor $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} E_n \\ J_n \\ L_n \\ A_n \end{pmatrix}$ beschrieben.

a) Für eine Population von Heuschrecken gilt: Aus 8 % der Eier eines Geleges entwickeln sich junge Larven. Die Überlebenswahrscheinlichkeit für diese jungen Larven beträgt 72 %. Aus 89 % der alten Larven werden adulte Heuschrecken, 70 % der adulten Heuschrecken verbleiben im folgenden Zeittakt in der letzten Altersklasse. Jede weibliche adulte Heuschrecke legt pro Zeitabschnitt (10 Tage) 120 Eier.
Übertragen Sie den folgenden noch unvollständigen Übergangsgraphen auf Ihr Bearbeitungsblatt und ergänzen Sie ihn so, dass die Entwicklung der Population dargestellt wird.

Eier | junge Larven | alte Larven | Adulte

5 P

Seien $\vec{v}_n$ und $\overrightarrow{v_{n+1}}$ die Populationsvektoren zu den Zeitpunkten *n* bzw. *n* + 1. Mittels einer Übergangsmatrix A kann der folgende Modellzusammenhang formuliert werden: $\overrightarrow{v_{n+1}} = A \cdot \vec{v}_n$.

b) Entscheiden Sie, ob die Matrix M_1 mit

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 60 \\ 0{,}08 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}72 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}7 & 0{,}89 \end{pmatrix}$$

in diesem Sinne zur Modellierung des in a) dargestellten Sachverhalts geeignet ist. Erstellen Sie gegebenenfalls eine Übergangsmatrix, die im Rahmen des genannten Modells den Sachverhalt aus Aufgabenteil a) richtig wiedergibt. **10 P**

Durch gezielte Schädlingsbekämpfung kann man erreichen, dass die adulten Heuschrecken nicht mehr die nächsten 10 Tage überleben, sondern vollständig sterben. Als Nebeneffekt ändern sich auch die anderen Populationsdaten. Eine Übergangsmatrix M_2 , die dies berücksichtigt, ist im Folgenden dargestellt. Verwenden Sie die Matrix M_2 für die nächsten drei Aufgabenteile.

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 70 \\ 0{,}06 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}68 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}65 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Zum Zeitpunkt *n* = 0 setzt sich eine Heuschreckenpopulation aus ca. 15000 Eiern, 1300 jungen Larven, 600 alten Larven und 400 adulten Heuschrecken zusammen. Bestimmen Sie, wie viele Eier, junge Larven, alte Larven und adulte Heuschrecken unter den Bedingungen der Matrix M_2 zwei Zeitschritte *zuvor* vorhanden waren. **10 P**

d) Stellen Sie die Entwicklung der adulten Heuschrecken unter den Bedingungen der Matrix M_2 über einen Zeitraum von 15 Zeitschritten in einem Koordinatensystem (siehe Anlage 1) grafisch dar. Ergänzen Sie in dem Koordinatensystem die Skalierung der senkrechten Achse. Beschreiben Sie die dargestellte Entwicklung. **20 P**

e) Mittels Modellrechnungen unter den Bedingungen der Matrix M_2 sollen nun zwei weitere, regelmäßig anzuwendende Bekämpfungsmaßnahmen, die ausschließlich auf adulte Heuschrecken wirken, verglichen werden:

Maßnahme 1: Durch die Aufstellung von Fallen reduziert man die Anzahl der adulten Heuschrecken um 220.

Maßnahme 2: Durch das Ausbringen von Gift reduziert man die Anzahl der adulten Heuschrecken um 87,5%.

Gehen Sie zur Vereinfachung davon aus, dass die Maßnahmen jeweils *nach jedem* Übergang (d.h. im Modell: *nach* der Multiplikation mit der Matrix M_2) durchgeführt werden.

- Bestimmen Sie für jede der beiden Bekämpfungsmaßnahmen die zeitliche Entwicklung der Anzahl der adulten Heuschrecken, bis in dieser Altersklasse weniger als ein Individuum vorhanden ist. Betrachten Sie dabei stets die Werte *nach* Anwendung der jeweiligen Maßnahme. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen. Stellen Sie beide Entwicklungen sowohl tabellarisch als auch graphisch in einem Koordinatensystem dar (siehe Anlage 2). Beginnen Sie mit dem Startvektor $\overrightarrow{v_0}$ aus Aufgabenteil c).
- Vergleichen Sie mittels Interpretation ihrer Modellrechnungsergebnisse beide Maßnahmen zur Schädlingsbekämpfung. Berücksichtigen Sie dabei, dass adulte Heuschrecken pro Tag erhebliche Mengen einer Ernte vernichten können. Zur Vereinfachung der Überlegungen vernachlässigen Sie die Schädigungen durch Larven. **35 P**

f) Es seien

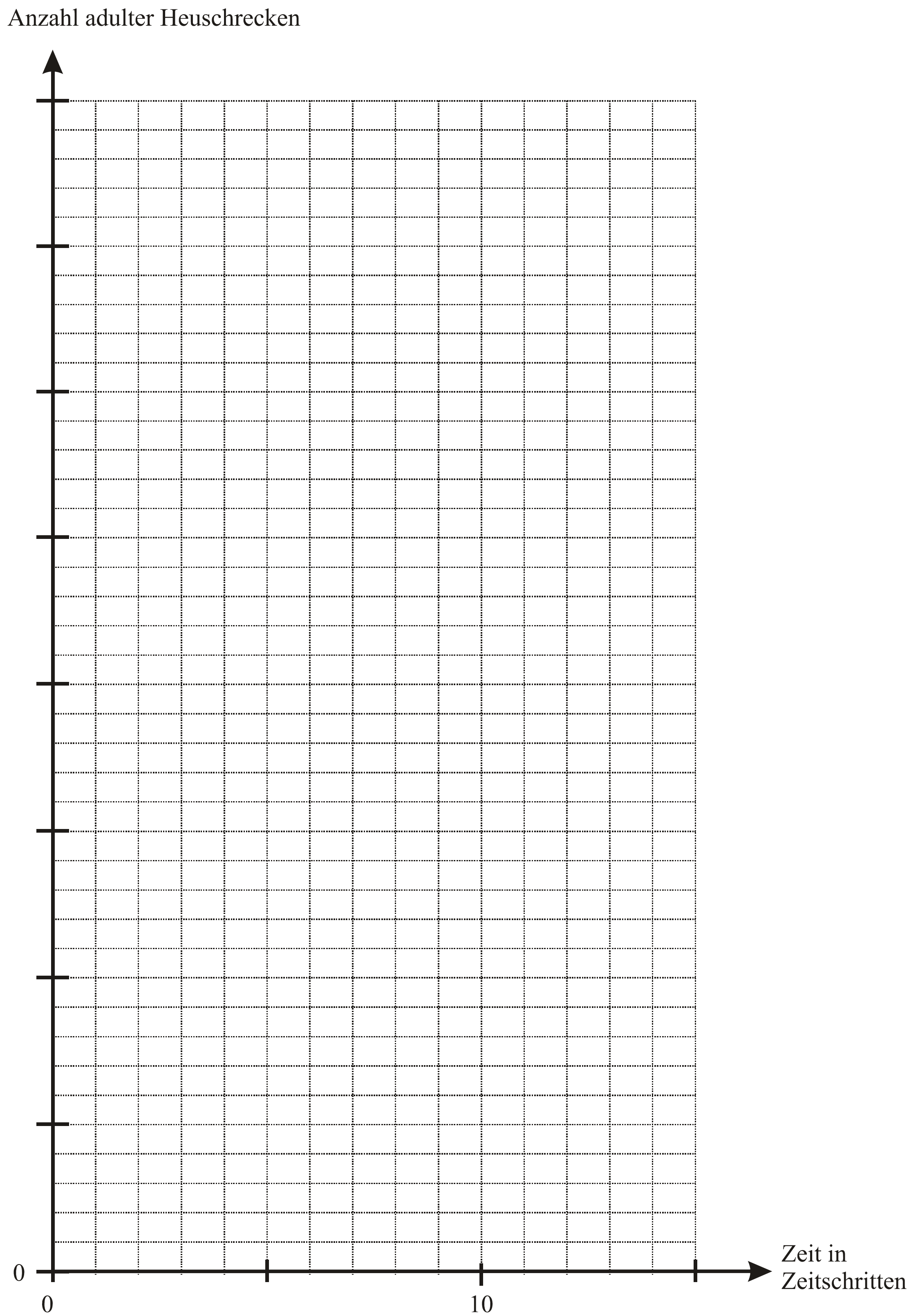
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 70 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,68 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,65 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 70 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,68 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,65 & \mu \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$$

- Bestimmen Sie λ, sodass gilt: $N^4 = E$.
- Begründen Sie, dass die Gleichung $P^4 = E$ für $\mu \neq 0$ unlösbar ist.
- Begründen Sie für eine beliebige Matrix L mit $L \neq E$ den folgenden Zusammenhang:

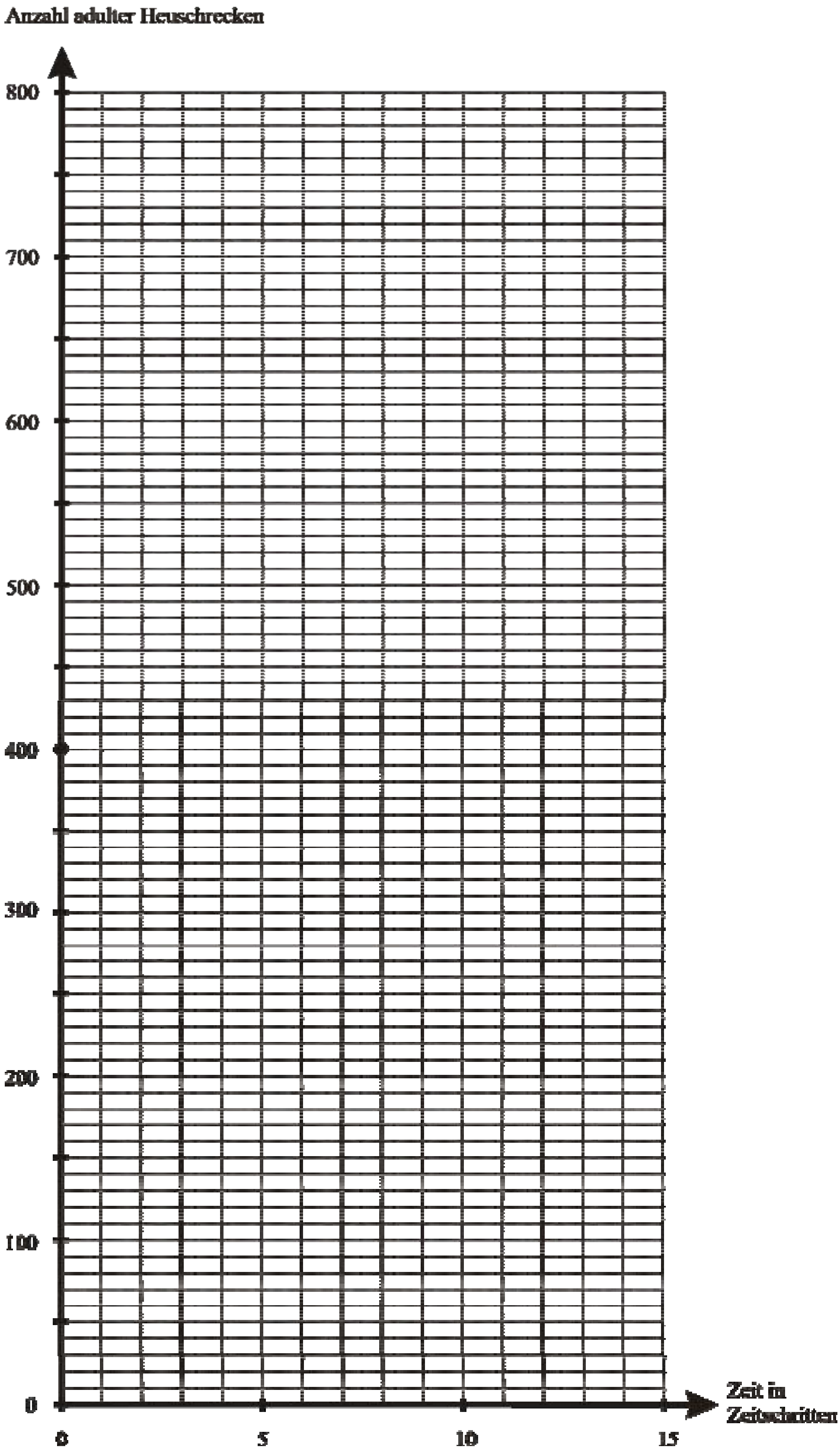
  Wenn gilt: $L^4 = E$, dann gilt für jede positive ganze Zahl n auch: $L^{4n} = E$.

- Für eine Populationsentwicklung gelte für jeden beliebigen Vektor der Zusammenhang $\overrightarrow{v_{n+1}} = L \cdot \overrightarrow{v_n}$ mit $L^4 = E$. Diese Populationsentwicklung weist ein Merkmal auf, das sie von denen in den Aufgabenteilen a) bis e) behandelten unterscheidet. Beschreiben Sie dieses Merkmal. **20 P**

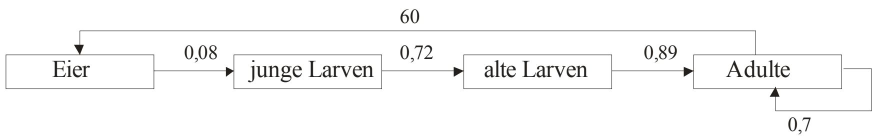
Anlage 1 zur Aufgabe „Heuschrecken“:



Anlage 2 zur Aufgabe „Heuschrecken“:



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	 *Zu beachten ist, dass am Pfeil von "Adulte" zu "Eier" der Wert 60 erscheint (nur die Weibchen legen Eier).*	5		
b)	Falsch sind die Matrixelemente a_{43} und a_{44}. Diese sind vertauscht. Die richtige Matrix lautet daher: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 60 \\ 0,08 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,72 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,89 & 0,7 \end{pmatrix}$	5	5	
c)	Gesucht ist $\overrightarrow{v_{-2}}$. Dazu ist das lineare Gleichungssystem $M_2{}^2 \cdot \overrightarrow{v_{-2}} = \overrightarrow{v_0}$ zu lösen. Alternativ kann man nacheinander die Gleichungssysteme $M_2 \cdot \overrightarrow{v_{-1}} = \overrightarrow{v_0}$ und $M_2 \cdot \overrightarrow{v_{-2}} = \overrightarrow{v_{-1}}$ lösen. Möglich ist auch der direkte Ansatz $\overrightarrow{v_{-2}} = M_2{}^{-2} \cdot \overrightarrow{v_0}$. Es ergibt sich $\overrightarrow{v_{-2}} \approx \begin{pmatrix} 14706 \\ 905 \\ 330 \\ 310 \end{pmatrix}$. Zwei Zeitschritte zuvor waren ca. 14706 Eier, 905 junge Larven, 330 alte Larven und 310 adulte Heuschrecken vorhanden. *Werden die Ergebnisse im Antwortsatz ungerundet angegeben, kann nicht die volle Punktzahl gegeben werden.*		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
d)	*Die Angabe der folgenden Tabelle wird von den Prüflingen nicht erwartet:*			

Zeit-schritt	*Anzahl Adulte (gerundet auf Ganze)*
0	*400*
1	*390*
2	*575*
3	*398*
4	*743*
5	*724*
6	*1067*
7	*738*
8	*1378*
9	*1344*
10	*1980*
11	*1371*
12	*2559*
13	*2495*
14	*3676*
15	*2545*

Die graphische Darstellung befindet sich im Anhang des Erwartungshorizontes.

Zur Beschreibung bieten sich verschiedene Aspekte an, z.B.

Die Entwicklung ist zwar nicht monoton steigend, jedoch zeigt sich global eine steigende Tendenz.

Nach jeweils vier Zeitschritten wiederholt sich das Verhalten qualitativ, aber nicht quantitativ.

Teilt man die Entwicklung in Zyklen von je vier Zeitschritten und betrachtet man jeweils nur den ersten Wert pro Zyklus, ist ein exponentielles Verhalten erkennbar. Analoges gilt bei Betrachtung des jeweils zweiten, dritten oder vierten Wertes in den Zyklen.

Zur Erlangung der vollen Punktzahl sind mindestens zwei Aspekte aufzuführen.

I	II	III
10	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
e)	Maßnahme 1:			

Maßnahme 1:

Jeweils nach der Multiplikation eines Populationsvektors mit der Matrix M_2 ist die Anzahl der Adulten um 220 zu reduzieren.
Dies kann etwa durch die folgende Rekursion erreicht werden:

$$\overrightarrow{v_{n+1}} = M_2 \cdot \overrightarrow{v_n} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 220 \end{pmatrix} \text{ mit } \overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 15000 \\ 1300 \\ 600 \\ 400 \end{pmatrix}$$

Betrachtet wird lediglich die letzte Komponente des Populationsvektors.

Maßnahme 2:

Jeweils nach der Multiplikation eines Populationsvektors mit der Matrix M_2 soll die Anzahl der Adulten um 87,5 % reduziert werden. Dies kann beispielsweise wie folgt umgesetzt werden:

$$\overrightarrow{v_{n+1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}125 \end{pmatrix} \cdot M_2 \cdot \overrightarrow{v_n} \text{ mit } \overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 15000 \\ 1300 \\ 600 \\ 400 \end{pmatrix}$$

Betrachtet wird auch hier nur die letzte Komponente des Populationsvektors.

Auch weniger formale Beschreibungen sind zu akzeptieren.

Zeit-schritt	Anzahl Adulte bei Maßnahme 1	Anzahl Adulte bei Maßnahme 2
0	400,00	400,00
1	170,00	48,75
2	354,60	71,83
3	177,80	49,73
4	522,56	92,82
5	95,59	11,31
6	438,28	16,67
7	110,07	11,54
8	750,08	21,54
9	–42,55	2,63
10		3,87
11		2,68
12		5,00
13		0,61

Bewertung: II: 30, III: 5

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III

Bei Maßnahme 1 ist die Anzahl der Adulten nach 9 Zeitschritten negativ, es sind also keine Individuen mehr zu erwarten.

Bei Maßnahme 2 ist die Anzahl der Adulten nach 13 Zeitschritten kleiner als 1, aus diesem Grund sind zu diesem Zeitpunkt hier keine Individuen mehr zu erwarten.

Die graphische Darstellung befindet sich im Anhang des Erwartungshorizontes.

Da es sich bei den obigen Werten nicht um Endergebnisse handelt, wird keine spezielle Rundung erwartet. Die Werte in der Tabelle sind lediglich aus Gründen der Übersichtlichkeit auf zwei Nachkommastellen angegeben.

Eine Diskussion, ob sich die Werte im weiteren Verlauf wieder ins Positive bzw. in den Bereich von Zahlen größer als 1 entwickeln, wird hier nicht erwartet.

Für Maßnahme 1 spricht, dass sie schneller zum Verschwinden der adulten Heuschrecken führt. Andererseits wird die Anzahl der adulten Heuschrecken bei Maßnahme 2 schon zu Beginn stark gesenkt, sodass die Anzahl der Überlebenden im Vergleich zu Maßnahme 1 viel kleiner ist. Dadurch sind die Ernteschädigungen bei Maßnahme 2 deutlich geringer. Diese Maßnahme ist also zu bevorzugen.

f)

- Es gilt

$$N^4 = \begin{pmatrix} 30{,}94\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30{,}94\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30{,}94\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30{,}94\lambda \end{pmatrix}$$

Zu fordern ist also $30{,}94\lambda = 1$, was zur Lösung $\lambda = \frac{1}{30{,}94} = \frac{50}{1547}$ führt.

- Es gilt

$$P^4 = \begin{pmatrix} 30{,}94\lambda & 30{,}94\mu & 45{,}5\mu^2 & 70\mu^3 \\ 0 & 30{,}94\lambda & 45{,}5\lambda\mu & 70\lambda\mu^2 \\ 0 & 0 & 30{,}94\lambda & 47{,}6\lambda\mu \\ 0{,}442\lambda\mu & 0{,}442\mu^2 & 0{,}65\mu^3 & 30{,}94\lambda+\mu^4 \end{pmatrix}$$

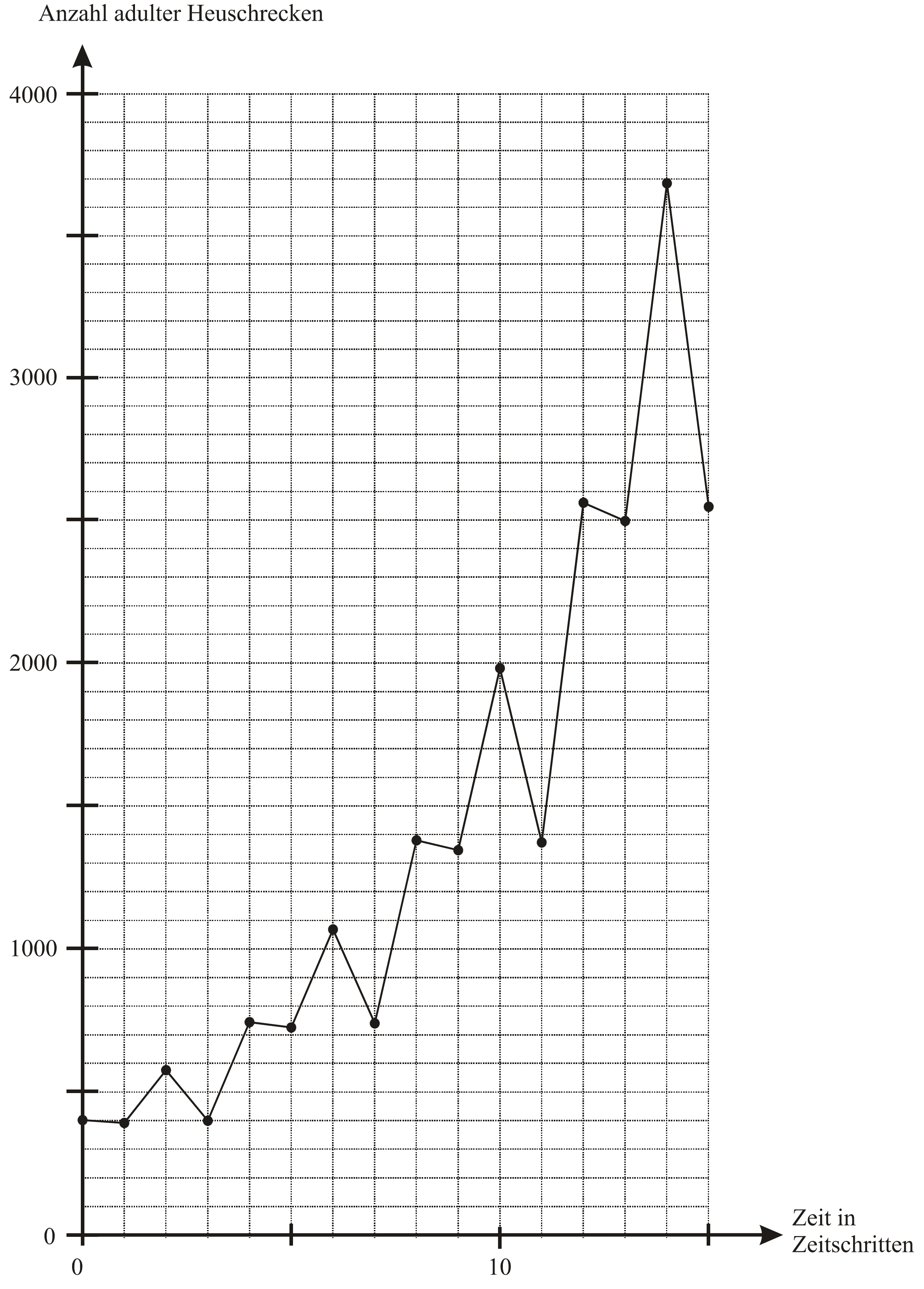
Um $P^4 = E$ zu erhalten, müssten diverse Matrixkomponenten den Wert 0 haben. Dies ist beispielsweise für $30{,}94\mu$ nicht möglich, wenn gilt $\mu \neq 0$.

- Es gilt: $L^{4n} = \underbrace{L^4 \cdot L^4 \cdot \ldots \cdot L^4}_{n\text{-mal}} \overset{\text{n.V.}}{=} \underbrace{E \cdot E \cdot \ldots \cdot E}_{n\text{-mal}} = E$

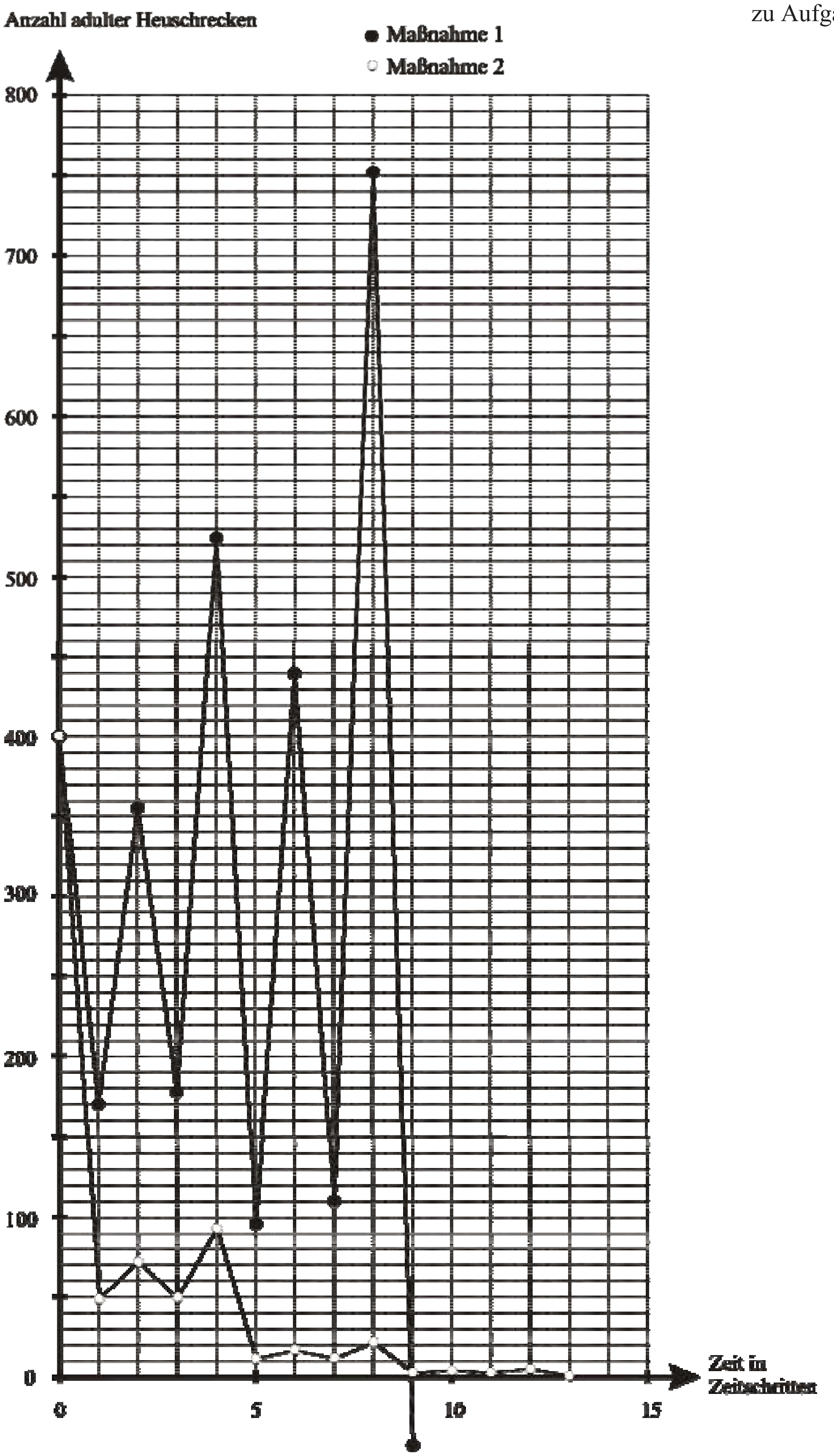
I	II	III
	5	15

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Auch eine weniger formale Begründung ist zu akzeptieren. • Nach jeweils 4 Zeitschritten zeigen sich dieselben Vektoren; die Population entwickelt sich also periodisch. *Anmerkung: Aus der Bedingung $L^4 = E$ lässt sich ohne weitere Überlegungen noch nicht auf die Periodenlänge 4 schließen. Zunächst denkbar und erst durch weitere Argumentationen auszuschließen ist auch eine kleinere Periodenlänge. Die Angabe einer Periodenlänge 4 ohne diese weiteren Argumentationen ist jedoch nicht punktmindernd zu werten.*			
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

zu Aufgabenteil d)

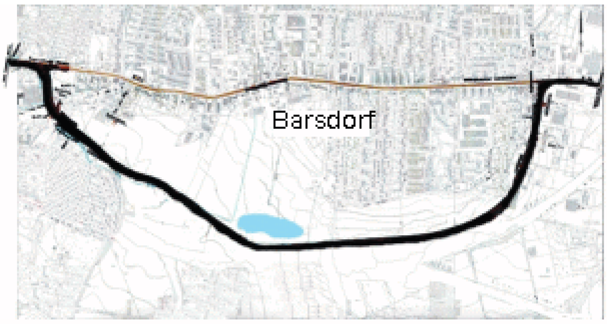


zu Aufgabenteil e)



STOCHASTIK 1

III.1 Umgehungsstraße



Die Gemeinde Barsdorf plant eine Umgehungsstraße. Dieses Projekt ist bei den Barsdorfer Bürgern und Kommunalpolitikern gleichermaßen umstritten.
Bei der letzten Gemeinderatswahl erhielten die Parteien in Barsdorf folgende Stimmenanteile: DCU 44,1 %, DPS 35,4 %, AFB 12,5 %, Sonstige 8 %.
Die Wahlbeteiligung betrug trotz des kontroversen Themas nur 75,5 %.
Eine Bürgerinitiative legt eine Umfrage vor, nach der in Barsdorf 47,5 % der DCU-Wähler, 75,3 % der DPS-Wähler und 94,5 % der AFB-Wähler gegen den Bau der Umgehungsstraße sind. Von den Wählern der restlichen Parteien und den Nichtwählern haben sich in der Umfrage jeweils 43,6 % gegen die Umgehungsstraße ausgesprochen.

a) Bestätigen Sie aus den Ergebnissen der Wahl und der Umfrage, dass ungefähr $p = 40$ % der wahlberechtigten Bürger von Barsdorf die Umgehungsstraße befürworten. **20 P**

b) Stellen Sie die genannten Ergebnisse aus der Wahl und der Umfrage grafisch so dar, dass möglichst viele Informationen ablesbar sind. **15 P**

In den folgenden Aufgabenteilen sollen Sie mit $p = 60$ % Gegnern der Umgehungsstraße und 40 % Befürwortern rechnen.

c) Aufgrund des Umfrageergebnisses fordert die Bürgerinitiative einen Volksentscheid über den Bau der Umgehungsstraße.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 50 zufällig ausgewählten Wahlberechtigten in Barsdorf mehr als die Hälfte gegen den Bau der Umgehungsstraße stimmen würden, falls die Umfrageergebnisse der Bürgerinitiative richtig sind.. **15 P**

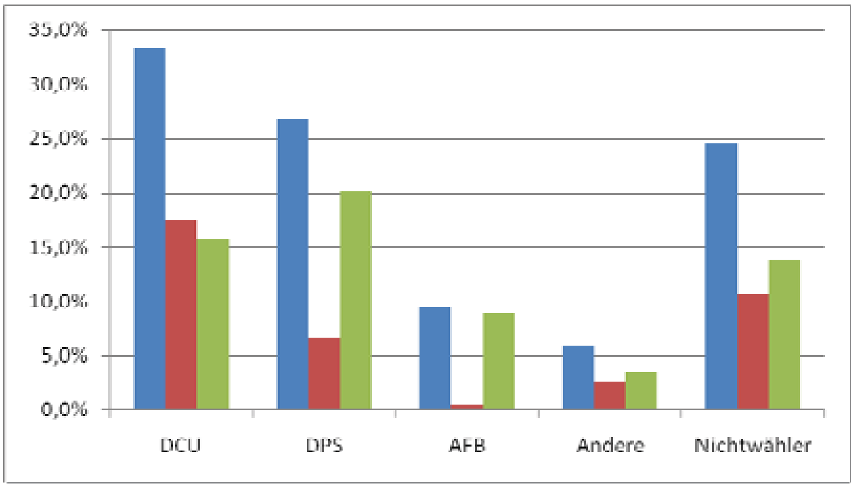
d) Die Bürgerinitiative führt eine Unterschriftensammlung gegen die Umgehungsstraße durch. Dabei gibt ein Bürger an, gegen die Umgehungsstraße zu sein. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei diesem Bürger um einen DCU-Wähler handelt. **15 P**

e) Auf einer Mitgliederversammlung der DCU haben sich 855 von 1298 Anwesenden gegen den Bau der Umgehungsstraße ausgesprochen.
In der nächsten Ausgabe des Wochenblatts wird von einem deutlichen Meinungswandel innerhalb der DCU gesprochen.
Ermitteln Sie, ob sich diese Behauptung der Zeitung statistisch rechtfertigen lässt. **20 P**

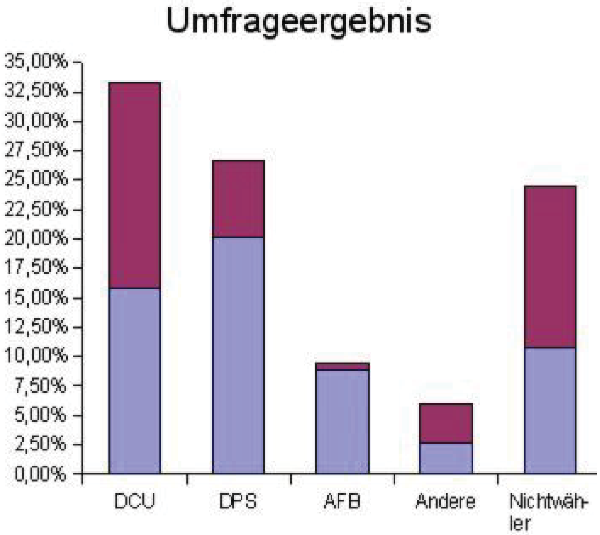
f) Trotz des Ergebnisses in e) hält der Bürgermeister von Barsdorf an der Umgehungsstraße fest. Er will mit Hilfe einer erneuten zufälligen Befragung von Barsdorfer Bürgern argumentieren, dass die Umgehungsstraße mehrheitsfähig ist. Er hofft, dass dann eine Mehrheit der Befragten für die Umgehungsstraße stimmt. Er kennt sich mit den Manipulationsmöglichkeiten statistischer Verfahren gut aus und überlegt, ob er bei einem Hypothesentest als Nullhypothese $p \leq 50\%$ oder $p \geq 50\%$ wählen sollte, und ob er eher eine größere ($n = 100$) oder eine kleinere ($n = 50$) Stichprobengröße wählen sollte, um sein Ziel zu erreichen.

Beurteilen Sie dieses Problemfeld, indem Sie einen möglichen Plan des Bürgermeisters bestimmen. **15 P**

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Der Anteil der Gegner beträgt:
$G = 0,755 \cdot (0,441 \cdot 0,475 + 0,354 \cdot 0,753 + 0,125 \cdot 0,945 + 0,436 \cdot 0,080)$
$+ 0,436 \cdot 0,245$
$\approx 0,582 \approx 60\,\%$.
$B = 100\,\% - G = 40\,\%$ ist der Anteil der Befürworter der Umgehungsstraße.</td><td>20</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Es gibt mehrere Möglichkeiten der grafischen Darstellung:


Die Säulen, die jeweils links stehen, beziehen sich auf die erwähnte Gemeinderatswahl und geben den Anteil aller Wahlberechtigten von Barsdorf an, die mittleren Säulen stehen jeweils für die Befürworter, die Säulen rechts stehen jeweils für die Gegner der Umgehungsstraße.
Alternative: gestapeltes Säulendiagramm:</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	 Unten sind die Gegner der Umgehungsstraße dargestellt, oben stehen die Befürworter. *Anmerkung:* *Eine Darstellung, bei der die Verbindung des Wahlergebnisses mit der Umfrage nicht deutlich wird, führt nicht zur vollen Punktzahl.*	5	10	
c)	Da die Einwohnerzahl von Barsdorf groß ist im Verhältnis zur Stichprobe, kann hier vereinfachend die Binomialverteilung für die Anzahl G der Gegner verwendet werden. Mehr als die Hälfte der Befragten sind mindestens 26 Personen. Gesucht ist: $P(G \geq 26) = 1 - \sum_{i=0}^{25} B(50\,;0{,}6\,;i) = \sum_{i=0}^{24} B(50\,;0{,}4\,;i) \approx 0{,}90 = 90\,\%$. Bei einigen Rechnertypen lässt sich die obige Wahrscheinlichkeit auch direkt eingeben.		15	
d)	Es ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit zu bestimmen. Man kann ein Baumdiagramm verwenden oder direkt den Satz von Bayes. Es gilt: $p_{Gegner}(DCU - Wähler) = \frac{0{,}755 \cdot 0{,}441 \cdot 0{,}475}{0{,}6} \approx \frac{0{,}158}{0{,}6} \approx 0{,}26$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Unterzeichner DCU-Wähler ist, beträgt 26 %.		15	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>

<u>Bemerkung:</u> je nach Unterrichtsverlauf sind hier mehr oder weniger scharfe Argumentationen zu erwarten, z.B.

In der Versammlung haben sich $\frac{855}{1298} \approx 0{,}66 = 66\%$. der Anwesenden gegen die Umgehungsstraße ausgesprochen. Das sind deutlich mehr als die 47,5 %, die vorher diese Meinung hatten.

Zu untersuchen ist, ob es sich dabei um eine zufällige Schwankung aufgrund der Stichprobe handelt.

Wenn kein Meinungswandel eingetreten wäre, hätte die obige Stichprobe folgenden Erwartungswert und folgende Standardabweichung:

$E = n \cdot p = 1298 \cdot 0{,}475 = 616{,}6 \approx 617$,
$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{1298 \cdot 0{,}475 \cdot 0{,}525} \approx 17{,}99 \approx 18$,
$2 \cdot \sigma \approx 36$.

Wenn die Anzahl der Gegner unter $E + 2 \cdot \sigma \approx 653$ bleibt, kann man noch von einer zufälligen Abweichung ausgehen. Die Wahrscheinlichkeit für Umfrageergebnisse mit <u>mehr</u> als 653 Gegnern unter den 1298 befragten DCU-Mitgliedern ist unter der Annahme, dass kein Meinungswandel eingetreten ist, dann nur ca. 2%. Die Behauptung der Zeitung ist also glaubhaft.

Hinter dieser- nicht ganz ausgeschärften - Argumentation steckt entweder eine Betrachtung über ein Vertrauensintervall oder ein Hypothesentest mit der Nullhypothese H_0 : $p \leq 0{,}475$, die auf dem 5%-Niveau verworfen werden kann, wenn mehr als ca. 653 der 1298 anwesenden DCU-Wähler gegen die Umgehungsstraße votieren. Die Unschärfe liegt darin, dass nicht deutlich gemacht wird, ob hier über Abweichungen von 47,5 % <u>nach oben</u> oder <u>überhaupt</u> argumentiert wird. Statt von 2 % könnte also auch von 5 % gesprochen werden.

</td><td></td><td>5</td><td>15</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	Wenn sich die Situation nicht grundlegend geändert hat, dürfte es dem Bürgermeister kaum gelingen, Umfragedaten so zu erhalten, dass statistisch solide argumentiert werden kann, dass eine Mehrheit für die Umgehungsstraße ist. Aber folgende „windige“ in den Medien nicht unübliche Manipulationsmöglichkeiten wären denkbar: • Er hofft auf eine Mehrheit für die Umgehungsstraße innerhalb seiner Stichprobe (das kann vor allem bei geringer Stichprobengröße leicht passieren) und argumentiert danach unsolide mit dieser „Mehrheit“, • oder noch raffinierter: er wählt einen Hypothesentest mit der Nullhypothese, dass die Bürger mehrheitlich für den Bau der Umgehungsstraße seien. Wenn er z. B. als Stichprobengröße $n = 50$ ($n = 100$) wählt, dann kann die Hypothese auf dem 5%-Niveau erst verworfen werden, wenn mehr als 31 (58) Bürger gegen den Bau stimmen. Diese beiden Tests hätten bei unverändert angenommenem $p = 0{,}6$ *ß*-Fehler-Wahrscheinlichkeiten von 66 % (bzw. 38 %). Vor allem bei einer kleinen Stichprobe ist diese also sehr hoch. Die unsolide Argumentation läge dann darin, dass behauptet werden würde, dass die Nullhypothese gilt, obwohl im Falle, dass keine Signifikanz vorliegt, gar kein Schluss aus den Umfragedaten gezogen werden kann.		10	5
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

STOCHASTIK 2

III.2 Würfelprobleme

Der Würfel ist Bestandteil vieler Glücks- und Gesellschaftsspiele. Dabei hat das Ergebnis „6“ häufig eine besondere Bedeutung.
Für das **Werfen mit drei Würfeln** (gleichzeitig oder hintereinander) lassen sich unterschiedliche Fragestellungen betrachten, z.B. die nach der Anzahl ***X*** der gewürfelten Sechsen oder die nach der Augensumme ***S***.
Beim Spiel „chuck-a-luck“ entscheidet die Anzahl der Sechsen über die Gewinnhöhe.
Beim „Mensch-ärgere-dich-nicht“-Spiel darf der Spieler seine Spielfigur nur in das Spiel bringen, wenn er mit einem Würfel eine Sechs wirft – dies darf er zu Beginn dreimal nacheinander versuchen.
In den Aufgabenteilen a) bis e) handelt es sich um faire Würfeln, d.h. jede Augenzahl (1,…,6) hat die gleiche Wahrscheinlichkeit.

a) Berechnen Sie für das Spiel „chuck-a-luck“ die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse
A:„Es fällt keine Sechs” und
B:„Es fallen drei Sechsen“. **10 P**

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, beim Spiel „Mensch-ärgere-dich-nicht“ zu Beginn eine Spielfigur in das Spiel zu bringen. **10 P**

Der Fürst der Toskana wandte sich zu Beginn des 17. Jahrhunderts in einem Brief an Galileo Galilei (1564-1642) mit folgendem Problem: „Beim gleichzeitigen Wurf von drei gleich aussehenden Würfeln konnte ich beobachten, dass die Summe 11 häufiger erschien als die Summe 12 und die Summe 10 häufiger als die Summe 9. Jedoch können meiner Meinung nach alle diese Summen auf genau gleich viele Arten entstehen, nämlich auf sechs Arten und sind demzufolge gleich wahrscheinlich.“

c) Untersuchen Sie die Aussagen des Fürsten zur Wahrscheinlichkeit und begründen Sie Ihre Einschätzung.
Sie können dabei voraussetzen, dass das gleichzeitige Werfen von drei (gleich aussehenden) Würfeln und das Hintereinanderwerfen dieser Würfel in Bezug auf die Augensumme äquivalente Zufallsexperimente sind. Argumentieren Sie deshalb mit einem gedachten Baumdiagramm. **20 P**

d) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Augensumme von drei Würfeln ist symmetrisch.
Beschreiben Sie diese Symmetrieeigenschaft. **15 P**

e) Betrachten Sie nun das 15-malige Werfen eines Würfels (oder das gleichzeitige Werfen von 15 Würfeln). Es sei Z die binomialverteilte Anzahl der Sechsen und $W = Z + 3$.
(W zählt also zur Anzahl der Sechsen 3 dazu).
Ebenso wie die Augensumme S von 3 Würfeln kann auch W genau die Werte 3, 4, …17, 18 annehmen.

Vergleichen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von S und W in Bezug auf

- das Ereignis, einen Wert größer als 16 zu erhalten,
- das Ereignis, einen Wert kleiner als 5 zu erhalten,

- Symmetrie (vgl. d))
- den Erwartungswert. **25 P**

f) Auf einen Würfel fällt der Verdacht der Manipulation: Ein Spielleiter behauptet, dass die „Sechs" zu häufig fällt. Deswegen soll der Würfel 100-mal geworfen werden, um eventuell die Nullhypothese $p \leq \frac{1}{6}$ auf dem Signifikanzniveau 5 % zu verwerfen.

Bestimmen Sie mithilfe Ihres Rechners oder mithilfe der der Tabelle in der Anlage den Verwerfungsbereich V und schätzen
Sie die tatsächliche Größe des Fehlers 1. Art ab. **20 P**

Anlage: Tabelle akkumulierter Binomialverteilungen $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{(n-k)}$

			n =	100				
p:		0,1	1/6	0,2	0,25	0,3	0,4	
	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
	1	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
	2	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
	3	0,0078	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
	4	0,0237	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
	5	0,0576	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
	6	0,1172	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	
	7	0,2061	0,0038	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	
	8	0,3209	0,0095	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	
k	9	0,4513	0,0213	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	
	10	0,5832	0,0427	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	
	11	0,7030	0,0777	0,0126	0,0004	0,0000	0,0000	
	12	0,8018	0,1297	0,0253	0,0010	0,0000	0,0000	
	13	0,8761	0,2000	0,0469	0,0025	0,0000	0,0000	
	14	0,9274	0,2874	0,0804	0,0054	0,0001	0,0000	
	15	0,9601	0,3877	0,1285	0,0111	0,0002	0,0000	
	16	0,9794	0,4942	0,1923	0,0211	0,0006	0,0000	
	17	0,9900	0,5994	0,2712	0,0376	0,0012	0,0000	
	18	0,9954	0,6965	0,3621	0,0630	0,0024	0,0000	
	19	0,9980	0,7803	0,4602	0,0995	0,0044	0,0000	
	20	0,9992	0,8481	0,5595	0,1488	0,0076	0,0000	
	21	0,9997	0,8998	0,6540	0,2114	0,0124	0,0000	
	22	0,9999	0,9369	0,7389	0,2864	0,0190	0,0001	
	23	1,0000	0,9621	0,8109	0,3711	0,0277	0,0001	
	24	1,0000	0,9783	0,8686	0,4617	0,0380	0,0003	
	25	1,0000	0,9881	0,9125	0,5535	0,0496	0,0006	
	26	1,0000	0,9938	0,9442	0,6417	0,1108	0,0018	
	27	1,0000	0,9969	0,9658	0,7224	0,1828	0,0040	
	28	1,0000	0,9985	0,9800	0,7925	0,2632	0,0079	
	29	1,0000	0,9993	0,9888	0,8505	0,3488	0,0142	

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses *A* lässt sich berechnen aus der Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel keine Sechs zu würfeln: $P(A) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{125}{216} \approx 58\,\%$. Analog lässt sich für das Ereignis *B* berechnen: $P(B) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{216} \approx 0{,}5\%$.	10		
b)	Eine Spielfigur kann nach dem ersten, zweiten oder dritten Wurf in das Spiel gebracht werden, jedoch nur im Falle einer Sechs. Eine einfache Lösung ergibt sich aus der Überlegung, dass das Ereignis, „eine Spielfigur in das Spiel bringen“ (als Ereignis $\overline{A}$ bezeichnet) das Gegenereignis zum Ereignis *A* aus a) ist. $P(\overline{A}) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$. Die Wahrscheinlichkeit, zu Beginn eine Spielfigur in das Spiel zu bringen, beträgt $\frac{91}{216} \approx 42\,\%$. *Eine alternative Lösung ist die Betrachtung aller drei Stufen:* *Die Wahrscheinlichkeit einer Sechs im ersten Wurf ist* $p_1 = \frac{1}{6}$. *Der zweite Wurf ist nur möglich, wenn im ersten Wurf keine Sechs geworfen worden ist. Die Wahrscheinlichkeit einer Sechs im zweiten Wurf ist* $p_2 = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{36}$. *Der dritte Wurf ist nur möglich, wenn in den ersten beiden Würfen keine Sechs geworfen worden ist. Die Wahrscheinlichkeit einer Sechs im dritten Wurf ist* $p_3 = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{25}{216}$. *Dann ist* $p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{216} = \frac{36+30+25}{216} = \frac{91}{216}$.	10		
c)	Wenn man sich das Würfeln mit 3 Würfeln als Stufenexperiment vorstellt und dazu ein dreistufiges Baumdiagramm mit je 6 Verzweigungen auf jeder Stufe, dann haben alle 216 Wege die gleiche Wahrscheinlichkeit, nämlich $\frac{1}{216}$. Der Fürst hat zwar Recht, dass alle Augensummen auf sechs „Arten“ gebildet werden können: Summe 9: (1,2,6), (1,3,5), (1,4,4), (2,2,5), (2,3,4) und (3,3,3), Summe 10: (1,3,6), (1,4,5), (2,2,6), (2,3,5), (2,4,4) und (3,3,4), Summe 11: (1,4,6), (1,5,5), (3,4,4), (2,4,5), (2,3,6) und (3,3,5), Summe 12: (1,5,6), (2,4,6), (2,5,5), (3,3,6), (3,4,5) und (4,4,4).			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Diese „Arten“ (Tripel) sind aber nicht gleichwahrscheinlich, denn für die Bestimmung ihrer Wahrscheinlichkeiten sind jeweils die Wege im Baumdiagramm auszuzählen, die sie realisieren: Jedes Tripel mit drei verschiedenen Augenzahlen lässt sich durch sechs Wege realisieren z.B. 126, 162, 216, 261, 612, 621. Jedes Tripel mit zwei gleichen Augenzahlen lässt sich durch drei Wege realisieren, z.B. 144, 414, 441 und jedes Tripel mit 3 gleichen Augenzahlen lässt sich durch genau einen Weg realisieren. Damit ergibt sich $P(S = 12) = \frac{6+6+3+3+6+1}{216} = \frac{25}{216} = P(S = 9)$ und $P(S = 11) = \frac{6+6+3+6+3+3}{216} = \frac{27}{216} = P(S = 10)$. Also sind die Wahrscheinlichkeiten nicht gleich.		15	5
d)	<u>Beschreibung der Symmetrieeigenschaft:</u> In Aufgabenteil c) ist bereits gezeigt worden, dass gilt: $P(S = 10) = P(S = 11)$ und $P(S = 9) = P(S = 12)$. Leicht zu sehen ist auch, dass $P(S=3) = P(S=18)$, denn einzig möglich für diese Augensummen sind die Tripel (1,1,1) bzw. (6,6,6). Eine mögliche Überlegung geht zusätzlich von der Symmetrie des Würfels aus: Wenn bei einem Würfel die „1“ oben liegt, liegt die „6“ unten; wenn die „2“ oben liegt, liegt die „5“ unten; usw. Dies bedeutet für drei Würfel: Wenn die Augensumme 4 oben liegt, liegt die Augensumme 17 unten; wenn die Augensumme 5 oben liegt, liegt die Augensumme 16 unten; usw. Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sind gleich, was zur Symmetrie der W-Verteilung führt. *Alternativ kann man auch mit Hilfe der möglichen Tripel – wie in c) – argumentieren, ohne dass dabei jede Wahrscheinlichkeit berechnet werden muss.*	5	10	
e)	• $P\{S>16\} = P\{S=17\} + P\{S=18\} = \frac{3}{216} + \frac{1}{216} = \frac{1}{54} \approx 2\%$ Die Zufallsvariable Z ist $15 - \frac{1}{6}$-binomialverteilt. $P\{W>16\} = P\{W>13\} = P\{W=14\} + P\{W=15\} = 15 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{14} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{1} + \left(\frac{1}{6}\right)^{15}$ $= \frac{5}{6^{15}} \approx 1 \cdot 10^{-11}$ $P\{W>16\}$ ist also <u>wesentlich</u> kleiner als $P\{S>16\}$ • $P\{S<5\} = P\{S>16\} \approx 2\%$ wegen der Symmetrie (vgl. d). $P\{W<5\} = P\{W<2\} = P\{W=0\} + P\{W=1\} = \left(\frac{5}{6}\right)^{15} + 15 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{14} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$ $= \frac{15 \cdot 5^{14}}{6^{15}} \approx 19\%$. $P\{W<5\}$ ist also <u>größer</u> als $P\{S<5\}$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	• Symmetrie: Die Symmetrie der Verteilung von S wurde schon in d) begründet. Für $p \neq \frac{1}{2}$ ist jede Binomialverteilung nicht symmetrisch, das kann vorausgesetzt werden, kann aber auch hier für $n = 15$ und $p = \frac{1}{6}$ leicht begründet werden, denn offensichtlich ist es wahrscheinlicher „keine Sechs" zu werfen ($\left(\frac{5}{6}\right)^{15}$) als „15 Sechsen" zu werfen ($\left(\frac{1}{6}\right)^{15}$). Dann ist aber auch die Verteilung von W nicht symmetrisch. • Bestimmung des Erwartungswerte von S und W: Aufgrund der Symmetrie der Verteilung von S haben jeweils die Werte S und $21–S$ die gleiche Wahrscheinlichkeit, können also in der Produktsumme zusammengefasst werden. Klammert man danach 21 aus, ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{2}$. Also $E(S) = \frac{21}{2} = 10{,}5$. *Einfacher ist es, die (wahrscheinlich im Unterricht nicht behandelte) Additivität des Erwartungswertes auszunutzen.* $E(S) = 3 \cdot 3{,}5 = 10{,}5$. Der Erwartungswert einer Binomialverteilung beträgt $n \cdot p$, hier also $E(Z) = 15 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{2}$. Also $E(W) = E(Z) + 3 = \frac{11}{2} = 5{,}5$. $E(W)$ ist also nur etwa halb so groß wie $E(S)$.		15	10
f)	Viele Sechsen sprechen gegen die Nullhypothese. X bezeichne die Anzahl der Sechsen. Aus der Tabelle ergibt sich: falls $p = \frac{1}{6}$, gilt $P(\{X < 23\}) \approx 0{,}0631$ und $P(\{X < 24\}) \approx 0{,}0379$ Also ist für $K = 23$: $P\left(\{X < K\}\right) \leq 5\%$. Falls also 23 oder mehr 23 Sechsen fallen, sollte die Nullhypothese abgelehnt werden. Die tatsächliche Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art ist kleiner oder gleich 3,3 %.		10	10
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25