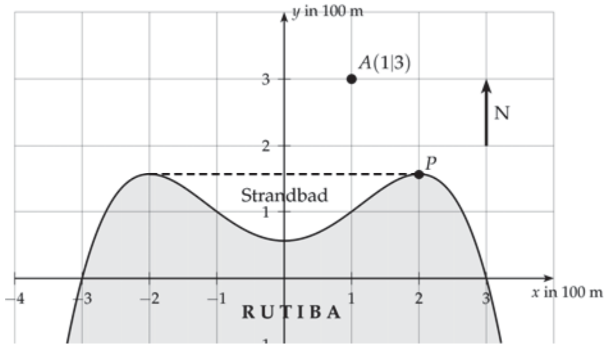
Analysis

I.1 Seebad Rutiba



Die nebenstehende Abbildung zeigt den Nordteil der künstlich angelegten Insel Rutiba.
Rutiba hat ein Strandbad, das durch eine Absperrkette von der offenen See getrennt ist (gestrichelte Linie).

Das Nordufer ist durch die Funktion

$$f : x \to -\frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{2} + \frac{9}{16}$$

gegeben.

(Eine Einheit entspricht 100 m in der Realität.)

Der Insel nördlich vorgelagert ist ein Felsen bei $A\,(1 \mid 3)$, der als Anlegestelle für Ausflugsdampfer dient. Diese Anlegestelle ist bisher nur durch eine Bootsverbindung vom nördlichsten Punkt P auf der Ostseite von Rutiba zu erreichen.

a) Bestätigen Sie rechnerisch, dass „östlich“ (also rechts) von der y-Achse der „nördlichste“ Punkt auf dem Graphen von f die Koordinaten $P\left(2 \mid \frac{25}{16}\right)$ hat. **15 P**

b) Berechnen Sie die größte (in y-Richtung gemessene) Entfernung der Kette vom Ufer und bestimmen Sie die Fläche des bestehenden Strandbades auf ganze m² gerundet. **15 P**

c) Die Anlegestelle liegt im obigen Koordinatensystem bei $A\,(1 \mid 3)$. Ein Boot, das von P zur Anlegestelle fährt, muss einen bestimmten Kurs (= Winkel der Fahrtrichtung zur Nordrichtung) fahren.
Ergänzen Sie die obige Abbildung durch das Einzeichnen dieses Sachverhalts und bestimmen Sie den Kurs und die Weglänge für die Fahrt. **15 P**

Da das Strandbad aufgrund gefährlicher Strömungen häufig für den Badebetrieb gesperrt werden muss, soll es nun zu einem neuen, vor der rauen See geschützten Seebad umgebaut werden. Dazu liegen der Planungskommission zwei Entwürfe vor (siehe Anlage). Bei beiden Entwürfen wird ein Damm angelegt. Dadurch entsteht ein großer Badesee.
Die Breite des Dammes soll im Weiteren vernachlässigt werden.

d) Im ersten Entwurf (Plan 1) kann der Damm im Intervall $-2 \le x \le 2$ durch eine trigonometrische Funktion g beschrieben werden, die zwei Tiefpunkte genau an den Hochpunkten der Funktion f hat.
Weisen Sie nach, dass jede Funktion der Form

$$g_a : x \to a \cdot cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) + a + \frac{25}{16} \quad \text{mit } a > 0$$

die geforderte Eigenschaft besitzt. **15 P**

e) Ermitteln Sie den Parameter a, so dass die Fläche des neu entstandenen Badesees genau 80 000 m² beträgt. **10 P**

Im zweiten Entwurf (Plan 2) hat der Damm die Form einer Parabel. Für sie gilt:

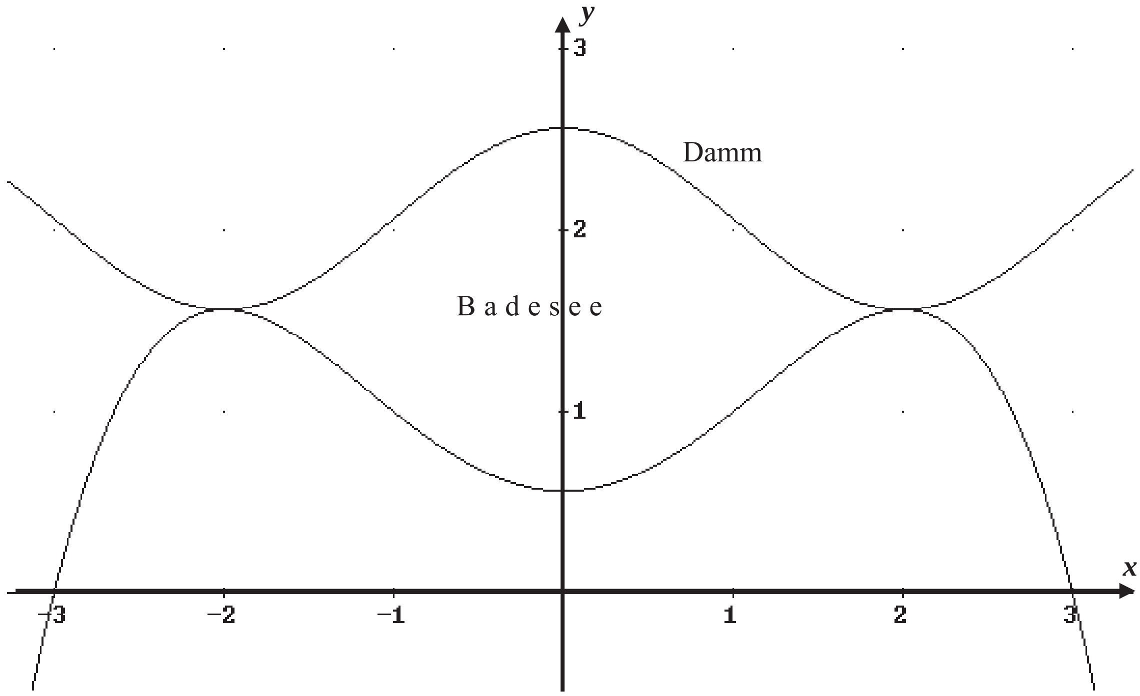
$$h : x \to -\frac{1}{4}x^2 + \frac{45}{16}.$$

f) Berechnen Sie die Übergangsstellen zum alten Ufer (beschrieben durch die Funktion f) und weisen Sie nach, dass der Übergang knickfrei ist. **15 P**

g) In dem zweiten (parabelförmigen) Entwurf soll eine Seebrücke von der Anlegestelle $A\ (1 \mid 3)$ zum neuen Damm gebaut werden. Aus Kostengründen soll die Seebrücke möglichst kurz sein.
Skizzieren Sie die Anlegestelle und die zu bauende Seebrücke in Plan 2 der Anlage und bestimmen Sie die Länge der Seebrücke. **15 P**

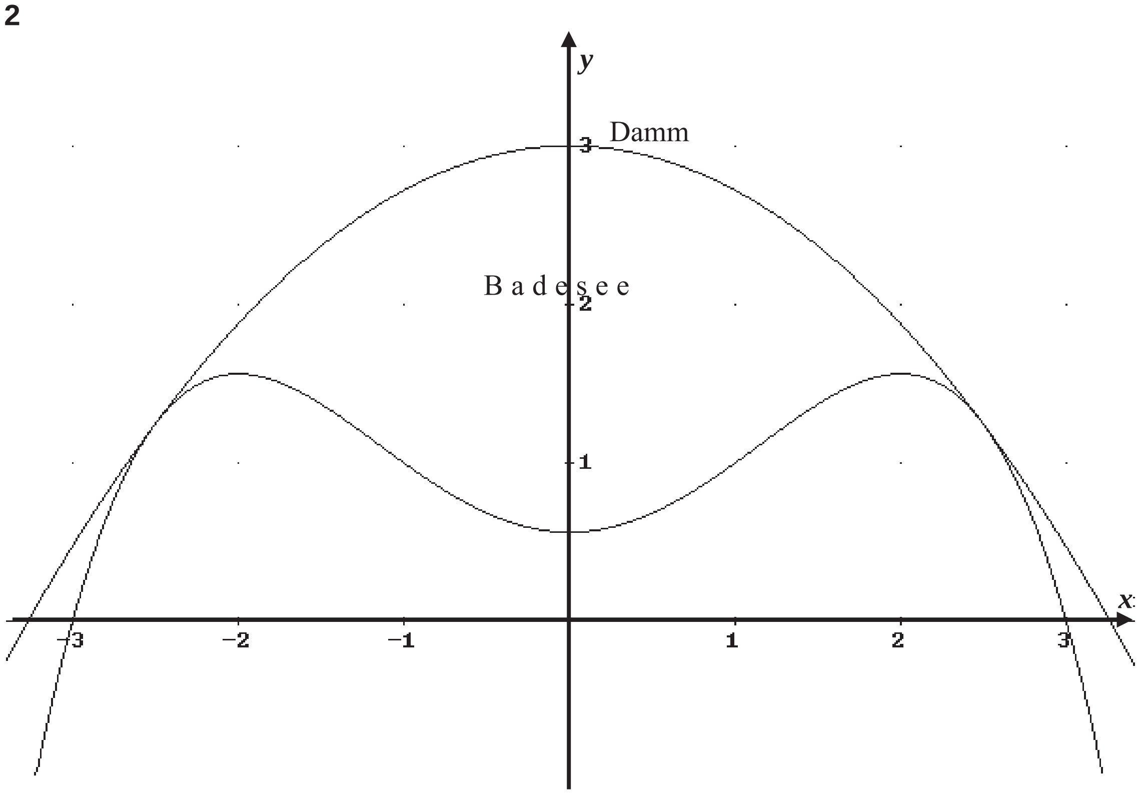
Anlage zur Aufgabe „Seebad Rutiba“

Plan 1



Einheit auf den Achsen für beide Entwürfe 100 m

Plan 2



Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

Gesucht ist zunächst die x-Koordinate des rechten Hochpunktes.

$f'(x) = -\frac{1}{4}x^3 + x$ und $f''(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 1$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2)$

Da gilt $f''(2) = -2 < 0$ liegt für $x = 2$ ein Maximum vor. Zusammen mit $f(2) = \frac{25}{16}$ ist somit gezeigt, dass der Punkt die angegebenen Koordinaten hat.

</td><td>10</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

Die größte Entfernung von Kette und Uferstraße entspricht dem Betrag der Differenz des lokalen Maximums und des lokalen Minimums von f.

Das Maximum wurde bereits in a) bestimmt. In Anschluss an die Lösung von a) und mit $f''(0) = 1 > 0$ folgt, dass bei $x = 0$ ein Tiefpunkt vorliegt.

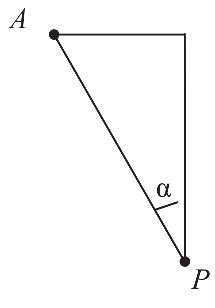
$\left|f(2) - f(0)\right| = 1$, das entspricht einer Entfernung von 100 m.

Die Flächenmaß lässt sich als Integral zwischen Kettenfunktion k und f im Intervall der Hochpunktstellen berechnen, wobei $k(x) = f(2) = \frac{25}{16} \quad (= 1{,}5625)$ ist.

$\int_{-2}^{2} \left(k(x) - f(x)\right) dx = \frac{32}{15} \quad (= 2{,}1\overline{3})$ damit ist die Badefläche etwa 21333 m^2 groß.

</td><td>5</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

Aus der angefertigten Skizze erkennt man:



Setzt man als Spitze $P(2 \mid f(2))$ und als Anlegestelle $A(1 \mid 3)$, dann lässt sich der Abstand dieser Punkte mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen:

$d(\text{P,A}) = \sqrt{(1-2)^2 + (3 - 1{,}5625)^2} \approx 1{,}75$ also etwa 175 m lang.

Für den Winkel α gilt z.B.: $\tan(\alpha) = \frac{(x_P - x_A)}{(y_A - y_P)} \Rightarrow \alpha \approx 34{,}82°$.

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Der Kurs als Winkel zur Nordrichtung – mathematisch positiv – beträgt dann $360° - 34{,}82° = 325{,}18°$. (*Die Lösung* $\alpha \approx 34{,}82°$ *ist ebenfalls als richtig zu werten.*)	2	13	
d)	Versucht man die Hoch- und Tiefpunkte zu berechnen, zeigt sich, dass die Nullstellen der ersten Ableitung g' von a unabhängig sind. $g_a'(x) = -a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \cdot \frac{\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \cdot z$ mit $z \in \mathbb{Z}$ Hier speziell bei $x = 0 \ \vee \ x = -2 \ \vee \ x = 2$. Verfügt der/die Schüler/in über die entsprechende Grundvorstellung einer Kosinusfunktion, kann durch eine entsprechende Bemerkung der Test mit der zweiten Ableitung entfallen. Ansonsten: $g_a''(x) = -a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ zeigt: $g_a''(0) = -a \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 < 0 \ \Rightarrow$ Hochpunkt bei $\left(0 \middle\vert g_a(0)\right)$ $g_a''(2) = g_a''(-2) = a \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 > 0 \ \Rightarrow$ Tiefpunkt bei $\left(2 \middle\vert g_a(2)\right)$ bzw. $\left(-2 \middle\vert g_a(-2)\right)$ Setzt man diese Werte in die Ausgangsfunktion ein, zeigt sich $g_a(2) = g_a(-2) = f(2) = \frac{25}{16}$ für jedes a.		5	10
e)	80 000 m² muss zunächst in 8 FE ungewandelt werden. Dann muss die Gleichung $\int_{-2}^{2} \left(g_a(x) - f(x)\right) dx = 8$ nach a gelöst werden. Als Lösung ergibt sich: $a = \frac{22}{15} \approx 1{,}467$.		10	
f)	Man berechnet zunächst die Berührungsstellen: $h(x) = f(x) \Leftrightarrow x = -\sqrt{6} \ \vee \ x = \sqrt{6}$. Der Übergang ist knickfrei, wenn die Ableitungen der Funktionen an den berechneten Stellen übereinstimmen: Aus Symmetriegründen ist nur eine Stelle zu überprüfen..			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	$h'(\sqrt{6}) = -\frac{\sqrt{6}}{2} = f'(\sqrt{6})$. Es liegt also ein knickfreier Übergang vor.	5	10	
g)	*Das richtige Skizzieren der Anlegestelle und der Brücke sollte mit max. 2 Punkten bewertet werden. Es soll der Schülerin bzw. dem Schüler den Lösungsweg näher bringen.* *Verschiedene Wege können zur Bestimmung der Länge der Seebrücke führen:* 1. Weg: Man überlegt, dass $d(\mathrm{A,S})$ bzw. $(d(\mathrm{A,S}))^2$ minimal werden muss. $d(\mathrm{A,S}) = \sqrt{(1-x)^2 + (3-h(x))^2} = k(x)$ $(d(\mathrm{A,S}))^2 = (1-x)^2 + (3-h(x))^2 = q(x)$ Als mögliche Stellen für den Seebrückenbeginn kommen nur die Nullstellen der ersten Ableitungsfunktion in Frage: $k'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 0{,}8453$ bzw. $q'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 0{,}8453$ Eingesetzt in die 2. Ableitung ergibt sich: $k''(0{,}8453) \approx 3{,}4 > 0$ bzw. $q''(0{,}8453) \approx 2{,}7 > 0$, Es liegt also ein Minimum für $x \approx 0{,}8453$ vor. $k(0{,}8453) \approx 0{,}3975$. Damit ist die Seebrücke etwa 40 m lang. 2. Weg: Die Seebrücke beginnt am Damm normal zu diesem: Für $x \neq 1$ und $x \neq 0$ erhält man: $\frac{3-h(x)}{1-x} = -\frac{1}{h'(x)} \Leftrightarrow \frac{4x^2+3}{16(1-x)} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow 4x^3 + 35x - 32 = 0$ Es ergibt sich $x \approx 0{,}8453$. Mittels der im 1. Weg definierten Funktion k erhält man $k(0{,}8453) \approx 0{,}3975$. Damit ist die Seebrücke etwa 40 m lang.	2		13
	Insgesamt 100 BWE	24	53	23

Analysis

I.2 Getränkeautomat

Das Abfüllen und Zapfen von kohlensäurehaltigen Getränken kann häufig nicht kontinuierlich erfolgen, da sich, je nach Getränk, eine mehr oder weniger große Schaumkrone bildet. Durch das zeitweise Zurückdrehen des Zapfhahnes während des Abfüllvorganges kann sich die Schaumkrone jedoch verringern. Besonders prägnant wirkt sich dies beim Abfüllen von Bier aus.

a) Die folgende (unvollständige) Tabelle zeigt eine eingefüllte Getränkemenge [in Milliliter] in Abhängigkeit von der Zeit t [in Sekunden]

t in s	0	10	15	20	25	30	35
Menge in ml	0	200	210	300		450	500

Geben Sie durch eine Regression eine ganzrationale Funktion vierten Grades an, welche die Getränkemenge während des Abfüllvorganges entsprechend der Tabelle näherungsweise beschreibt. Geben Sie mithilfe der ermittelten Funktion den fehlenden Wert in der Tabelle an. **10 P**

In Getränkeautomaten wird der Füllvorgang elektronisch gesteuert, indem die Zapföffnung und damit die Durchflussrate zeitlich variiert wird. Die Funktion f beschreibt diese Durchflussrate [in Millilitern pro Sekunde] beim Abfüllvorgang für ein Getränk in Abhängigkeit von der Zeit t [in Sekunden]. Es gilt:

$$f(t) = -0,0019 \cdot t^4 + 0,1281 \cdot t^3 - 2,8 \cdot t^2 + 20 \cdot t \qquad t \geq 0$$

b) Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $0 \leq t \leq 30$ im beigefügten Koordinatensystem (siehe Anlage). Interpretieren Sie den Verlauf des Graphen im Sachkontext und gehen Sie dabei auf das Problem der Schaumbildung ein. **15 P**

c) Der Abfüllvorgang bricht zu dem Zeitpunkt ab, wo die steuernde Funktion f negativ würde. Ermitteln Sie, wie lange ein vollständiger Abfüllvorgang dauert.
Bestimmen Sie die Getränkemenge pro Abfüllvorgang, für die der Automat eingestellt wurde. **15 P**

d) Je größer die Durchflussrate ist, desto stärker ist die Schaumbildung des Getränks.
Bestimmen Sie auf eine Nachkommastelle genau den Zeitpunkt der größten Schaumbildung.
Anmerkung: An dieser Stelle ist nicht gefordert, dass Sie Ableitungen verwenden müssen. Wichtig jedoch ist, dass Sie Ihr Vorgehen nachvollziehbar dokumentieren. **10 P**

e) Der Automat soll umgestellt werden auf die Getränkemenge 0,33 l. Dazu muss die Abfüllfunktion verändert werden. Um den charakteristischen Verlauf des Graphen weitgehend zu erhalten, wird nun mithilfe des Steuerungsfunktionstermes

$$0{,}7 \cdot f(x)$$

abgefüllt.

Dann muss der Abfüllvorgang aber etwas verkürzt werden, sonst läuft zu viel vom Getränk über.
Deshalb kann die Abfüllzeit t_3 – gerundet auf ganze Sekunden – ebenfalls eingestellt werden.
Bestimmen Sie den Wert für die Abfüllzeit t_3, damit der Automat wie gewünscht funktioniert.
Interpretieren Sie Ihre Antwort. **20 P**

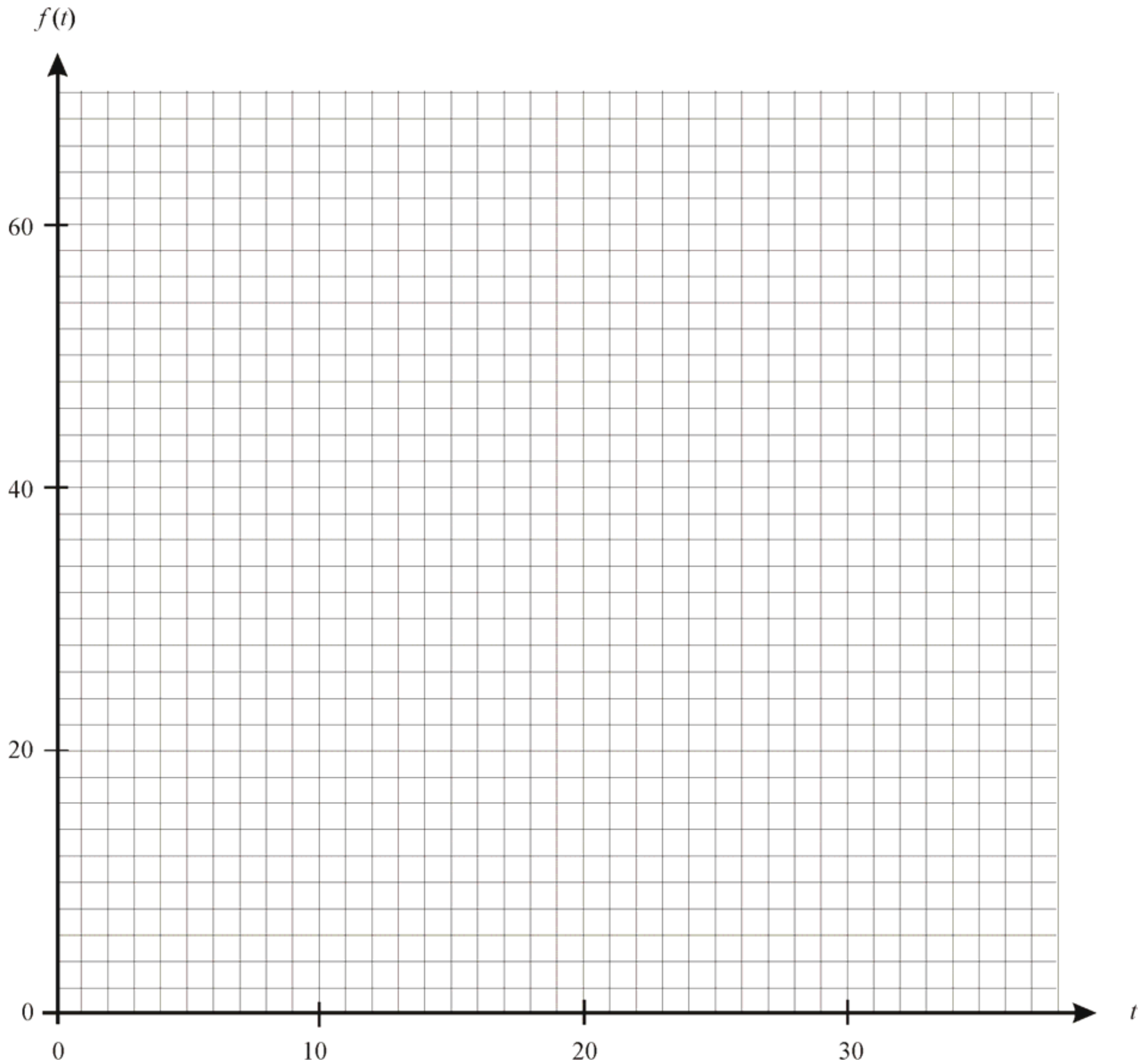
f) Ein verbesserter Automat soll verschiedene Getränke abfüllen. Da verschiedene Getränke eine unterschiedliche Schaumbildung hervorrufen, muss die Steuerungsfunktion in ihrer Charakteristik den Getränken angepasst werden. Dies wird durch einen einstellbaren Parameter a beschrieben, sodass die Funktionsgleichung der Durchflussrate folgendes verallgemeinertes Aussehen bekommt:

$$f_a(t) = -0{,}0019 \cdot a \cdot t^4 + 0{,}1281 \cdot t^3 - 2{,}8 \cdot t^2 + 20 \cdot t \quad t \geq 0\,.$$

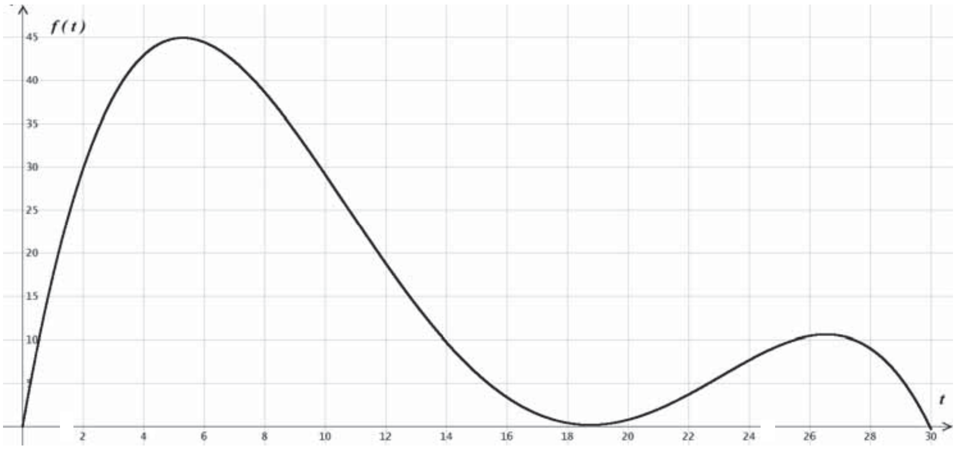
Skizzieren Sie die Graphen von f_a für die Werte $a = 0{,}98$, $a = 0{,}99$, $a = 1{,}01$ und $a = 1{,}02$ auf einem jeweils sinnvollen Intervall in das Koordinatensystem in der Anlage.
Interpretieren Sie die Graphen im Hinblick auf den Sachkontext.
Beurteilen Sie jeweils, ob hier eine realitätsnahe Darstellung eines Zapfvorganges modelliert wird. **20 P**

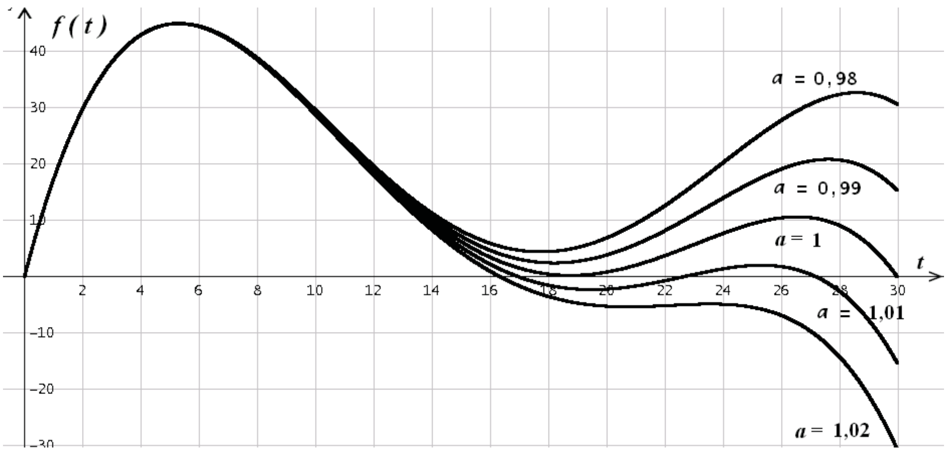
g) In der Entwicklungsabteilung des Getränkeherstellers wird die entstehende Schaummenge eines Getränks untersucht. Interessant war für die Chemiker der Abteilung auch die Abnahme der Schaumdicke, nachdem der Abfüllvorgang beendet ist. Mit Hilfe einer mathematischen Modellierung wurde folgende "Schaumdickefunktion" entwickelt:
$h(t) = 5 \cdot e^{-0{,}022 \cdot t}$, mit t in s und h in cm (Schaumdicke).
Hierbei wird angenommen, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ s der Abfüllvorgang gerade beendet wurde.
Berechnen Sie den Zeitpunkt, bei dem die Schaumdicke auf 1 cm gesunken ist. **10 P**

Anlage zur Aufgabe „Getränkeautomat“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Regression ergibt (Koeffizienten gerundet auf 4 Nachkommastellen): $g(t) \approx -0,0019t^4 + 0,1409t^3 - 3,3979t^2 + 40,8295t - 0,6877$ Mit <u>dieser</u> Näherung ergibt sich $g(25) \approx 356$. *Bemerkung: Abweichende Ergebnisse aufgrund anderer Rundungen sind möglich.*	10		
b)	 Die Zapfautomatik wird anfangs schnell aufgezogen und dann nach knapp 6 s langsam wieder zugeregelt, damit das Gefäß wegen der Schaumbildung nicht überläuft. Nach ca. 18,5 s wird erneut aufgezogen, jedoch etwas weniger als am Anfang. Ab der 27. Sekunde wird der die Zapfanlage innerhalb von ca. 3 Sekunden endgültig zugedreht.	5	10	
c)	$f(t) = 0$ ergibt sich für $t_1 = 0$ und $t_2 \approx 29,96$. Der Zapfvorgang dauert knapp 30 s. $\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt \approx 506$. Die Getränkemenge pro Abfüllvorgang, für die der Automat eingestellt wurde, beträgt ca. 0,5 Liter.		15	
d)	$f'(t) = 0$ für $t_1 \approx 5,29$ $t_2 \approx 18,74$ $t_3 \approx 26,53$ $f''(t_1) \approx -2,2 < 0 \rightarrow HP; f''(t_2) \approx 0,8 > 0 \rightarrow TP; f''(t_3) \approx -1,3 < 0 \rightarrow HP$ Da gilt: $f(t_1) \approx 45 > f(t_3) \approx 11$ liegt der Zeitpunkt der größten Schaumbildung bei $t_1 \approx 5,3$ Sekunden.			

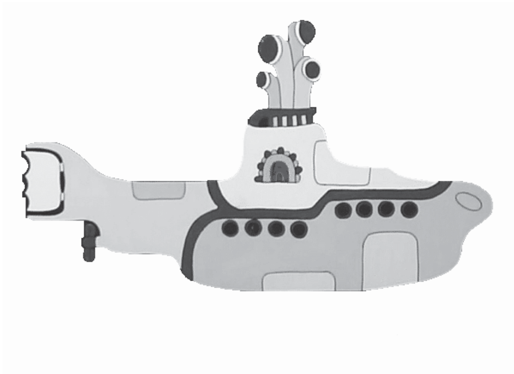
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Auch andere Bearbeitungsweisen sind alternativ möglich. So sind etwa auch die Verwendung des Spurmodus, ein Vorgehen über eine Tabellierung oder die direkte Benutzung der Maximumsberechnungsfunktion des Rechners/der Software zulässige Bearbeitungsarten. Es muss dabei jedoch deutlich werden, wie der Prüfling vorgegangen ist.		10	
e)	Es ist die Gleichung $\int_0^{t_3} 0{,}7 \cdot f(t)dt = 330$ zu lösen. Man erhält als einzig sinnvolle Lösung $t_3 \approx 25{,}6$, denn für die anderen beiden sich ergebenden Lösungen wäre die Durchflussrate negativ. Natürlich muss (in jedem Falle) aufgerundet werden, da sonst zu wenig abgefüllt würde. Der Automat muss also auf 26 Sekunden eingestellt werden. Dieser Wert liegt noch vor dem zweiten Maximum der „Abfüllkurve“. Es findet hier also kein langsames, sondern ein abruptes Schließen des Hahnes statt.		10	10
f)	 *Der Graph aus Aufgabenteil b) (d.h. für a = 1) ist hier zum Vergleich ebenfalls dargestellt. Das wird in diesem Aufgabenteil jedoch nicht verlangt.* Wenn a kleiner wird, erhöht sich die Gesamteinfüllmenge sowie die maximale Zapfgeschwindigkeit beim zweiten Aufdrehen des Zapfhahns. Für a = 1,01 ist $f_a(t)$ zwischenzeitlich negativ, bevor es wieder positiv wird. Der Zapfvorgang ist also vorzeitig beendet, ein zweites Öffnen des Hahnes findet nicht mehr statt (vgl. Aufgabentext zu c). Da im Einleitungstext lediglich von einem zeitweisen Zurückdrehen des Zapfhahnes ausgegangen wird, ist hier eine gewisse Distanz zur beschriebenen Realität festzustellen.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Anmerkung: Auch die Interpretation, dass ein Teil des Getränks während des Zapfvorganges aus der Dose "herausgesaugt" wird, bevor wieder etwas Flüssigkeit hinzugefügt wird, ist – trotz der Diskrepanz zum Aufgabentext in Teil c) – zu akzeptieren. Auch mit dieser Deutung wäre die Realitätsnähe der modellierenden Funktion gering. Für a = 1,02 verbleiben die Funktionswerte nach der ersten Nullstelle gänzlich im Negativen. Der Zapfvorgang ist dann ebenfalls vorzeitig beendet, ein zweites Öffnen des Hahnes findet nicht mehr statt. Mit der oben genannten Begründung ist auch dieser Fall unrealistisch.		10	10
g)	Aus $h(t) = 1$ ergibt sich: $t \approx 73{,}2\ s$.	10		
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

LA / AG 1

II.1 Unterwasserortung

Bei der Unterwasserforschung werden oft unbemannte Mini-U-Boote eingesetzt. Verliert man aus irgendwelchen Gründen den Kontakt zu einem solchen U-Boot, entsteht ein hoher – nicht nur materieller – Schaden. Um ein U-Boot jederzeit orten zu können, wird daher ein sogenannter Transponder eingebaut, der auf Sonarbasis (Ultraschall) arbeitet. Ein Transponder nimmt ein eingehendes Sonarsignal auf und beantwortet es automatisch durch Aussendung eines eigenen, sich (unter Wasser) gleichförmig in alle Richtungen ausbreitenden Signals.



Zum Testen dieses Systems wird ein Mini-U-Boot, das mit einem Transponder versehen ist, am Meeresboden verankert. Seine Position soll bestimmt werden. Von drei verschieden positionierten Schiffen wird dazu jeweils ein Sonarsignal ausgesendet und die Zeit bis zum Eintreffen der Antwort gemessen. Aus der Laufzeit des Signals wird die Entfernung zwischen Schiff und Mini-U-Boot berechnet. Über die Richtung, aus der das Signal kommt, ist keine Aussage möglich.

Zum leichteren Verständnis werden die folgenden Vereinfachungen vorgenommen:

- Sämtliche Entfernungen sind in der Einheit km angegeben.
- Die Wasseroberfläche ist die x-y-Ebene.
- Der Meeresboden ist eine (zur Wasseroberfläche nicht parallele) Ebene.
- Die Erdkrümmung wird nicht beachtet.

Jedes Schiff funkt die eigene Position, die Meerestiefe senkrecht unter dem Schiff und die ermittelte Entfernung zum Mini-U-Boot zu einem Rechenzentrum. Dort wird dann die genaue Position des Mini-U-Bootes ermittelt.

Im Rechenzentrum gehen folgende Meldungen ein:

Schiff	Position $(x \mid y \mid z)$	Meerestiefe (z-Koordinate)	Entfernung Schiff – Transponder
Albatros	(2,70 | 5,10 | 0)	– 0,90	19,10
Beluga	(4,20 | 1,80 | 0)	– 0,70	17,38
Conger	(1,80 | 3,50 | 0)	– 0,60	19,80

a) Geben Sie für die Ebene des Meeresbodens eine Parameterdarstellung an und ermitteln Sie eine Koordinatendarstellung. **20 P**

Zur Kontrolle:
Eine mögliche Ebenendarstellung (Ergebnisse gerundet) lautet:
$0{,}67\,x + 0{,}63\,y + 5{,}37\,z = 0{,}189$

b) Beschreiben Sie – ohne die Berechnungen durchzuführen – einen geeigneten Weg, wie man aus den gegebenen Daten den Ort des Mini-U-Bootes bestimmen kann.
Entscheiden Sie, welche Aussagen man über den Ort des Mini-U-Bootes machen kann, wenn die Daten <u>eines</u> Schiffes fehlen. **15 P**

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Mini-U-Bootes aus den in der Tabelle gegebenen Daten und benutzen Sie die oben angegebene Koordinatengleichung für den Meeresboden.
(Angabe der Ergebnisse auf 0,01 km gerundet.) **15 P**

Von der „Albatros“ wird um 12.00 Uhr ein unbemanntes Mini-U-Boot gestartet, das vom Mutterschiff gesteuert wird. Die Richtung des U-Bootes ist durch den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben.

Die Geschwindigkeit des U-Bootes beträgt $v = 9\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \quad \left(= 2{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$.

Plötzlich reißt der Kontakt der „Albatros“ zu ihrem Mini-U-Boot ab. Von der letzten Position des U-Bootes ist nur die x-Koordinate bekannt: $x = 8{,}70$.

d) • Berechnen Sie die genaue Position des Mini-U-Bootes.
• Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem diese Position erreicht wurde. **15 P**

Man befürchtet, dass das führerlose Mini-U-Boot sich in den Meeresboden bohrt. Wenn der Auftreffwinkel mehr als 10° beträgt, muss man mit seiner Zerstörung rechnen.

e) • Berechnen Sie den Auftreffpunkt.
• Bestätigen Sie, dass für das U-Boot keine Gefahr der Zerstörung besteht. **20 P**

Auch von der „Beluga“ wird ein unbemanntes Mini-U-Boot gestartet. Die Richtung des U-Bootes ist durch den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 27 \\ -3{,}4 \\ -4 \end{pmatrix}$ gegeben. Beide U-Boote werden zur gleichen Zeit gestartet und besitzen dieselbe Geschwindigkeit.

f) Weisen Sie nach, dass die Bahnen der U-Boote der „Albatros“ und der „Beluga“ sich schneiden.
Begründen Sie, dass es trotzdem nicht zu einem Zusammenstoß der beiden U-Boote kommt. **15 P**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Bezeichnet man mit $\vec{c}$ den Ortsvektor des Meeresbodenpunktes unter der Conger, und analog mit $\vec{b}$ den der Beluga bzw. mit $\vec{a}$ den der Albatros, dann ist eine Parameterdarstellung z.B. $e : \vec{x} = \vec{c} + r \cdot (\vec{b} - \vec{c}) + s \cdot (\vec{a} - \vec{c})$ $\text{e: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1,8 \\ 3,5 \\ -0,6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2,4 \\ -1,7 \\ -0,1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0,9 \\ 1,6 \\ -0,3 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$. Eine Koordinatenform ergibt sich z.B. mithilfe Kreuzprodukt: $\begin{pmatrix} 2,4 \\ -1,7 \\ -0,1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 \\ 1,6 \\ -0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,67 \\ 0,63 \\ 5,37 \end{pmatrix} \quad 0,67 \cdot x_1 + 0,63 \cdot x_2 + 5,37 \cdot x_3 = 0,189$ oder aus der Lösung des Gleichungssystems $\left[\begin{array}{ccc\|c} 2,4 & -1,7 & -0,1 & 0 \\ 0,9 & 1,6 & -0,3 & 0 \end{array}\right]$ setzt man $k_3 = 1$ dann folgt $k_2 \approx 0,117,\ k_1 \approx 0,125$. Durch Einsetzen eines Bodenpunktes erhält man die Koordinatengleichung $0,125 \cdot x_1 + 0,117 \cdot x_2 + x_3 = 0,035$ (Da mit gerundeten Werten gerechnet wird, unterscheiden sich die Ergebnisse ein wenig.)	5	15	
b)	Durch die Informationen eines Schiffes erhält man als geometrischen Ort für die Lage des Mini-U-Bootes eine Kugeloberfläche (oder Halbkugel, da das U-Boot unter Wasser liegt) oder einen Kreis (wenn man beachtet, dass das U-Boot auf dem Meeresgrund liegt). Zwei Boote liefern als geometrischen Ort die Schnittmenge der beiden Kugeln – also einen Kreis (bzw. zwei Punkte auf dem Meeresboden). Das dritte Boot liefert dann als Schnitt von Kugel und Kreis zwei Punkte (sofern nicht alle Boote auf einer Geraden liegen), von denen einer sich auf dem Meeresboden befindet. *Eine andere Erklärung ist auch möglich*: Durch die Differenz zweier Kugelgleichungen erhält man die Gleichung einer Ebene (*in der obiger Kreis liegt*). Aus drei Kugelgleichungen erhalte ich durch zwei Differenzbildungen (*bei der jede Kugelgleichung mindestens einmal auftritt*) also die Gleichungen zweier Ebenen. Bringe ich diese beiden Ebenen zum Schnitt, so erhalte ich eine Gerade. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit dem Meeresboden liefert mir dann die Position des Mini-U-Bootes. *Anmerkung: Die eingeklammerten Aussagen werden nicht in der Schülerlösung erwartet.*			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Da ich nur zwei Kugeln zum Schnitt bringen kann, erhalte ich einen Kreis. Die Schnittmenge dieses Kreises mit der Meeresbodenebene liefert mir zwei Punkte an denen sich das U-Boot befinden kann. *Oder*: Fehlt mir die Information eines Schiffes, so erhalte ich nur eine Ebene. Als Schnittmenge mit der Meeresbodenebene ergibt sich eine Gerade (Verbindungsgerade obiger Punkte) auf dem Meeresboden, auf der sich das U-Boot befinden kann.	10	5	
c)	Aus den Daten ergeben sich die drei Kugelgleichungen $k_A: \quad (x-2{,}7)^2+(y-5{,}1)^2+z^2=19{,}10^2$ $k_B: \quad (x-4{,}2)^2+(y-1{,}8)^2+z^2=17{,}38^2$ $k_C: \quad (x-1{,}8)^2+(y-3{,}5)^2+z^2=19{,}80^2$ sowie die Gleichung der Ebene des Meeresbodens $0{,}67x+0{,}63y+5{,}37z=0{,}189$ Hilfsweise wird das lineare Ersatzsystem $(k_C-k_A) \wedge (k_C-k_B) \wedge (0{,}67x+0{,}63y+5{,}37z=0{,}189)$ gelöst. Lösung: $x\approx 21{,}34 \quad y\approx 2{,}07 \quad z\approx -2{,}87$ Das Mini-U-Boot liegt in der Nähe des Punktes $P\left(21{,}34 \middle\vert 2{,}07 \middle\vert -2{,}87\right)$. *Anmerkung: Aufgrund der nur gerundeten Entfernungsangaben ist das obige nichtlineare Gleichungssystem unlösbar, deshalb wird das lineare Ersatzsystem gelöst. Eine diesbezügliche Begründung oder Erläuterung wird vom Prüfling nicht erwartet.*		5	10
d)	Zu lösen ist die Gleichung $\begin{pmatrix}2{,}7\\5{,}1\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}15\\-5\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8{,}7\\y\\z\end{pmatrix}$. Als Lösung erhält man zunächst $r=0{,}4$ und damit dann $y=3{,}1$ und $z=-0{,}8$. Das Mini-U-Boot befand sich im Punkt $P\left(8{,}70 \middle\vert 3{,}10 \middle\vert -0{,}80\right)$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Aus dem Abstand des Punktes P von der Albatros $d(P, \text{Albatros}) = \sqrt{6{,}0^2 + 2{,}0^2 + 0{,}8^2} \approx 6{,}375$ km errechnet sich der Zeitpunkt, an dem das Mini-U-Boot an dieser Stelle war: $t = \frac{s}{v} \approx \frac{6{,}375\text{ km}}{9\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} \approx 0{,}708\text{ h} \quad (\approx 42{,}5\text{ min})$ Das U-Boot passierte die Stelle zwischen 12.42 Uhr und 12.43 Uhr.	5	10	
e)	Der Schnittpunkt der Geraden aus e) mit der Meeresbodenebene wird berechnet: $g \cap e\ :\ \begin{pmatrix}2{,}7\\5{,}1\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}15\\-5\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1{,}8\\3{,}5\\-0{,}6\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2{,}4\\-1{,}7\\-0{,}1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0{,}9\\1{,}6\\-0{,}3\end{pmatrix}$ Lösung: $r \approx 1{,}25859 \quad s \approx 6{,}67969 \quad t \approx 4{,}16406$. Daraus erhält man der Auftreffpunkt $Q(21{,}579 \mid -1{,}193 \mid -2{,}517)$. Der Auftreffwinkel wird über den Nebenwinkel mit dem Skalarprodukt berechnet: $cos(\alpha) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{\lvert\vec{v}\rvert\cdot\lvert\vec{n}\rvert}$, wobei $\vec{n}$ ein Normalenvektor der Meeresbodenebene und $\vec{v}$ der Richtungsvektor des U-Bootes ist. Es ergibt sich $\alpha \approx 92{,}5°$. D.h. das Mini-U-Boot trifft im Winkel von ca. 2,5° auf den Meeresboden und wird nicht beschädigt.	10	10	
f)	Der Schnittpunkt Q der beiden Geraden ergibt sich aus: $g_{\text{Beluga}} \cap g_{\text{Albatros}}\ :\ \begin{pmatrix}4{,}2\\1{,}8\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}27\\-3{,}4\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2{,}7\\5{,}1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}15\\-5\\-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow s = \frac{1}{2} \wedge t = 1$ $Q = (17{,}7 \mid 0{,}1 \mid -2{,}0)$			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Die Abstände des Schnittpunkts Q von der Albatros und der Beluga sind unterschiedlich groß: $d(Q, \text{Albatros}) \approx 15{,}9 \text{ km}$ und $d(Q, \text{Beluga}) \approx 13{,}8 \text{ km}$. Da die U-Boote zur gleichen Zeit und mit gleicher Geschwindigkeit gestartet werden, passieren sie nacheinander den Schnittpunkt Q.		5	10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

Lineare Algebra

II.2 Schädlingsbekämpfung

In einem gesellschaftskritischen Zukunftsroman wird von einem Land berichtet, in dem ein Pflanzenschädling sein Unwesen treibt. Dieser Schädling wird „Rübenfresser" genannt.

Der Rübenfresser kann in fünf Altersklassen eingeteilt werden. Dabei gelte:

E_n:	Anzahl der Eier (höchstens ein Jahr alt) zum Zeitpunkt n
JL_n:	Anzahl der jungen Larven (älter als ein Jahr bis maximal zwei Jahre alt) zum Zeitpunkt n
AL_n:	Anzahl der alten Larven (älter als zwei Jahre bis maximal drei Jahre alt) zum Zeitpunkt n
JR_n:	Anzahl der jungen Rübenfresser (älter als drei Jahre bis maximal vier Jahre alt) zum Zeitpunkt n
AR_n:	Anzahl der alten Rübenfresser (älter als vier Jahre bis maximal fünf Jahre alt) zum Zeitpunkt n
n:	Zeit (gemessen in Jahren).

Die jeweiligen Anzahlen beziehen sich ausschließlich auf weibliche Tiere bzw. Eier.

Eine Population zum Zeitpunkt n werde durch den Vektor $\overrightarrow{b_n} = \begin{pmatrix} E_n \\ JL_n \\ AL_n \\ JR_n \\ AR_n \end{pmatrix}$ beschrieben.

Ein Modellzusammenhang zwischen $\vec{b}_n$ und $\vec{b}_{n+1}$ wird durch eine Matrix P mittels folgender Gleichung beschrieben: $\vec{b}_{n+1} = P \cdot \vec{b}_n$. Für P gilt:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 220 & 180 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie die Bedeutung der Matrixeinträge $p_{14} = 220$ und $p_{43} = 0,25$ vor dem Hintergrund des Sachkontextes an. **5 P**

b) Erstellen Sie einen Übergangsgraphen, der die Entwicklung der Rübenfresserpopulation nach dem Modell beschreibt. **10 P**

Die Rübenbauern entschließen sich, die Entwicklung der alten und der jungen Rübenfresser mithilfe des Populationsmodells vorherzusagen. Dies soll als Entscheidungshilfe dazu dienen, ob eine Bekämpfung des Schädlings notwendig ist. Die Startpopulation zum Zeitpunkt $n = 0$ auf einem abgesteckten Gebiet besteht aus 6000 Eiern, 1000 jungen Larven, 320 alten Larven und 100 jungen Rübenfressern sowie 80 alten Rübenfressern.

c) • Berechnen Sie unter Verwendung der Populationsmatrix *P* eine Prognose der Bestände der jungen und der alten Rübenfresser für die nächsten drei Jahre, also für $n = 1$, 2 und 3.

- Interpretieren Sie Ihre Rechenergebnisse: Ist eine Bekämpfung der jungen und der alten Rübenfresser notwendig?
- Ermitteln Sie erneut unter Verwendung von *P* Vorhersagen für die Bestände der jungen und der alten Rübenfresser, diesmal jedoch für eine langfristige Entwicklung (mehr als 20 Jahre). Wählen Sie dabei eine angemessene Anzahl von Beispielen. Entscheiden Sie daraufhin, ob ihre zuvor angestellten Interpretationen auch bei langfristiger Betrachtung zutreffend sind. **25 P**

Die Bauern entscheiden sich zunächst gegen ein Schädlingsbekämpfungsmittel, wollen jedoch zur Vorsicht möglichst viele Rübenfresser einsammeln. Die Bauern planen, jeweils *vor* der Wachstums- und Fortpflanzungsperiode 90 % der alten und 90 % der jungen Rübenfresser einzusammeln.

d) Zeigen Sie durch eine Modellrechnung, dass die Rübenfresser (alle 5 Altersklassen) bei diesem Vorgehen langfristig aussterben würden. Verwenden Sie wieder die oben genannte Startpopulation. **25 P**

Das Einsammeln der Rübenfresser erweist sich als zu aufwendig, es wird daher nicht durchgeführt. Die Bauern wenden sich nun an eine Firma, welche ein Schädlingsbekämpfungsmittel anbietet, das einen Anteil der von den jungen Rübenfressern und denselben Anteil der von den alten Rübenfressern gelegten Eier sofort nach der Eiablage zerstört. Die Firma behauptet, dass sich dadurch eine anfängliche Rübenfresserpopulation von 4000 Eiern, 100 jungen Larven, 100 alten Larven, 110 jungen Rübenfressern und 100 alten Rübenfressern bereits nach drei Jahreszyklen so verändert, dass nur noch 750 Eier vorhanden sind.

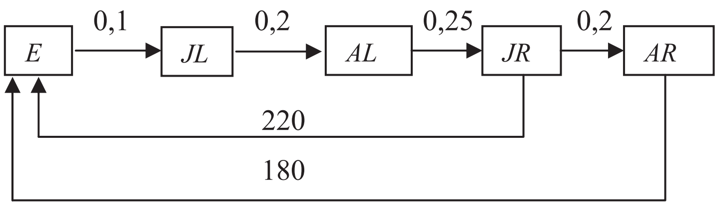
e) Bestimmen Sie den prozentualen Anteil der Eier, der angeblich durch das Mittel zerstört wird. Gehen Sie dabei davon aus, dass diejenigen Werte der Matrix *P*, die sich *nicht* auf Eiablagen beziehen, unverändert bleiben. **20 P**

Eine andere Firma bietet ein Mittel an, das die von den *jungen* Rübenfressern gelegten Eier unmittelbar nach der Eiablage vollständig zerstört. Allerdings tritt eine bemerkenswerte Nebenwirkung auf: Die *alten* Rübenfresser legen nun pro Jahr durchschnittlich 1000 Eier.

f) • Ermitteln Sie aus diesen Daten eine Prognose für die Populationsvektoren der ersten 11 Jahre nach Einsatz des Mittels. Gehen Sie dabei wieder von einer Startpopulation bestehend aus 4000 Eiern, 100 jungen Larven, 100 alten Larven, 110 jungen Rübenfressern und 100 alten Rübenfressern aus. Betrachten Sie diejenigen Werte der Matrix *P*, die sich *nicht* auf Eiablagen beziehen, als unverändert.

- Interpretieren Sie Ihr Ergebnis in Hinblick auf die Effektivität dieser Art von Schädlingsbekämpfung. **15 P**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	p_{14} = 220 steht für die Anzahl der Eier, welche die jungen Rübenfresser in einem Jahr legen. p_{43} = 0,25 steht für die Überlebensrate der alte Larven beim Übergang zu den jungen Rübenfressern, d.h. 25 % der alten Larven erreichen das nächste Stadium.	5		
b)		10		
c)	$\vec{b}_1 = P \cdot \vec{b}_0 \qquad \vec{b}_2 = P \cdot \vec{b}_1 \qquad \vec{b}_3 = P \cdot \vec{b}_2$ $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 36400 \\ 600 \\ 200 \\ 80 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 21200 \\ 3640 \\ 120 \\ 50 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 13880 \\ 2120 \\ 728 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}$ Die Ergebnisse der Modellrechnung legen den Schluss nahe, dass eine Schädlingsbekämpfung nicht notwendig ist, da die Anzahl der jungen Rübenfresser in den beobachteten drei Jahren von 100 über 80, 50 und 30 ständig abnimmt. Dies gilt ebenso für die der alten Rübenfresser: von 80 über 20, 16 und 10. Für eine langfristige Prognose werden weitere Vektoren berechnet, etwa: $\overrightarrow{b_{21}} = P^{21} \cdot \vec{b}_0 \approx \begin{pmatrix} 72100 \\ 3152 \\ 987 \\ 338 \\ 61 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{b_{22}} = P^{22} \cdot \vec{b}_0 \approx \begin{pmatrix} 85496 \\ 7210 \\ 630 \\ 246 \\ 67 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{b_{23}} = P^{23} \cdot \vec{b}_0 \approx \begin{pmatrix} 66470 \\ 8549 \\ 1442 \\ 157 \\ 49 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{b_{24}} = P^{24} \cdot \vec{b}_0 \approx \begin{pmatrix} 43565 \\ 6647 \\ 1709 \\ 360 \\ 31 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{b_{25}} = P^{25} \cdot \vec{b}_0 \approx \begin{pmatrix} 84985 \\ 4356 \\ 1329 \\ 427 \\ 72 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{b_{26}} = P^{26} \cdot \vec{b}_0 \approx \begin{pmatrix} 107023 \\ 8498 \\ 871 \\ 332 \\ 85 \end{pmatrix}$			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Man erkennt, besonders im Vergleich zu den oben aufgeführten frühen Zeitschritten, dass sowohl die Anzahl der jungen als auch die der alten Rübenfresser trotz einiger Schwankungen in der Tendenz zunimmt. Eine Schädlingsbekämpfung ist also langfristig betrachtet zweckmäßig, die zuvor angestellten Überlegungen treffen somit für längere Zeiträume nicht zu. *Anmerkung 1: Aufgrund der für diese Art der Modellierung typischen Schwankungen von Zeitschritt zu Zeitschritt müssen zur Beurteilung der Situation mindestens vier Populationsvektoren mit $n > 20$ ermittelt werden.* *Anmerkung 2: Die Vektorkomponenten wurden aus sachkontextualen Gründen stets nach unten gerundet. Da die Art der Rundung für die zu untersuchende Frage jedoch nicht relevant ist, soll für eine hiervon abweichende Rundung kein Punktabzug gegeben werden.*	10	10	5
d)	Das Einsammeln kann durch die Multiplikation eines Bestandsvektors mit der Matrix $$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$ modelliert werden. Damit ergibt sich der folgende Zusammenhang: $$\vec{b}_{n+1} = P \cdot M \cdot \vec{b}_n \qquad \text{bzw.} \qquad \vec{b}_n = (P \cdot M)^n \cdot \vec{b}_0$$ Es ist zu bestätigen, dass durch die geeignete Wahl von n alle Vektorkomponenten kleiner als 1 werden können, denn dies reicht aus sachkontextualen Gründen aus, um ein Aussterben der Population zu zeigen. Es zeigt sich, dass dieser Fall für $n = 16$ das erste Mal auftritt: $$\vec{b}_{15} = (P \cdot M)^{15} \cdot \vec{b}_0 \approx \begin{pmatrix} 1{,}623710 \\ 0{,}263479 \\ 0{,}104953 \\ 0{,}043283 \\ 0{,}001438 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_{16} = (P \cdot M)^{16} \cdot \vec{b}_0 \approx \begin{pmatrix} 0{,}978115 \\ 0{,}162371 \\ 0{,}052696 \\ 0{,}026238 \\ 0{,}000866 \end{pmatrix}$$ *Bemerkung 1: Es ist neben weiteren Herangehensweisen ebenso möglich, ohne Verwendung der Multiplikation mit der Matrix M vor jedem Zeitschritt den jeweiligen Bestandsvektor so zu ändern, dass die letzten beiden Komponenten jeweils um 90% verringert werden und dann mit der Matrix P zu multiplizieren.* *Bemerkung 2: Eine zulässige Modellierung liegt auch dann vor, wenn jeweils vor und/oder nach der Multiplikation mit der Matrix P alle Vektorkomponenten (aus sachkontextualen Gründen) auf eine ganze Zahl abgerundet werden. Bei diesem Vorgehen wird das Aussterben im Modell früher angezeigt.*		25	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
e)	Sei x der Anteil der zerstörten Eier. Dann gilt für die neue Übergangsmatrix Q $$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 220\cdot(1-x) & 180\cdot(1-x) \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$$ und somit für die Beschreibung dreier Zeitschritte $$Q^3 = \begin{pmatrix} 0 & 11\cdot(1-x) & 9\cdot(1-x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5{,}5\cdot(1-x) & 3{,}6\cdot(1-x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4{,}4\cdot(1-x) & 3{,}6\cdot(1-x) \\ 0{,}005 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}01 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Da nur die Anzahl der Eier gegeben ist, kommt lediglich die erste Zeile der Matrix zum Tragen: $$\begin{pmatrix} 0 & 11\cdot(1-x) & 9\cdot(1-x) & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4000 \\ 100 \\ 100 \\ 110 \\ 100 \end{pmatrix} = 750$$ Daraus folgt $11\cdot(1-x)\cdot 100 + 9\cdot(1-x)\cdot 100 = 750 \Rightarrow x = 0{,}625 = 62{,}5\%$ Ein Eieranteil von 62,5 % wird also durch das Mittel zerstört. *Anmerkung: Die explizite Angabe der Matrix Q^3 ist nicht notwendig.*			20

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>f)</td><td>Die im Aufgabentext beschriebene Situation kann im Rahmen des Modells durch die folgende Matrix R beschrieben werden:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit $\vec{b}_{n+1} = R \cdot \vec{b}_n$ und $\vec{b}_0 = \begin{pmatrix} 4000 \\ 100 \\ 100 \\ 110 \\ 100 \end{pmatrix}$ gilt $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 100000 \\ 400 \\ 20 \\ 25 \\ 22 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 22000 \\ 10000 \\ 80 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix},$

$$\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 5000 \\ 2200 \\ 2000 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 500 \\ 440 \\ 500 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b}_5 = \begin{pmatrix} 4000 \\ 100 \\ 100 \\ 110 \\ 100 \end{pmatrix}, \vec{b}_6 = \begin{pmatrix} 100000 \\ 400 \\ 20 \\ 25 \\ 22 \end{pmatrix}, \vec{b}_7 = \begin{pmatrix} 22000 \\ 10000 \\ 80 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\vec{b}_8 = \begin{pmatrix} 5000 \\ 2200 \\ 2000 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_9 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 500 \\ 440 \\ 500 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b}_{10} = \begin{pmatrix} 4000 \\ 100 \\ 100 \\ 110 \\ 100 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b}_{11} = \begin{pmatrix} 100000 \\ 400 \\ 20 \\ 25 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Die Populationsentwicklung ist also periodisch mit der Periodenlänge 5. Der Einsatz des Mittels ist wenig zweckmäßig, da keine langfristige Verringerung des Schädlingsbestandes zu erwarten ist.
Bemerkung: Auch eine abweichend vom Operator eher theoretische Betrachtung, die die Periodizität des Prozesses aus den Einträgen der Matrix ableitet, soll bei angemessener Beurteilung der Effektivität des Mittels mit voller Punktzahl bewertet werden.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>50</td><td>25</td></tr>
</table>

Stochastik

III.1 Sportschuhe

Eine Firma stellt Sportschuhe sowohl am Standort F als auch am Standort D her. Wegen geringerer Ausbildung und Qualifikation der Mitarbeiter und Mitarbeiterinnen am Standort F sowie deren schlechterer Bezahlung werden dort häufiger als am Standort D Sportschuhe mit unzureichender Qualität produziert.

Die Schuhe werden paarweise in 4 Arbeitsgängen gefertigt, die unabhängig voneinander sind. In jedem Arbeitsgang wird erfahrungsgemäß für ein Paar die erforderliche Qualität mit folgenden Wahrscheinlichkeiten erreicht:

	Arbeitsgang 1	Arbeitsgang 2	Arbeitsgang 3	Arbeitsgang 4
	Zuschnitte	Sohlen pressen	Oberschuhe nähen	Zusammensetzen
Standort D	96,5 %	98 %	97 %	98 %
Standort F	94 %	93,5 %	83 %	96,5 %

a) Bestätigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Paar Schuhe insgesamt nicht dem Qualitätsstandard entspricht, am Standort F mit $p_F \approx 0,30$ dreimal so hoch ist wie am Standort D. **10P**

Rechnen Sie deshalb zunächst mit $p_F = 0,3$ für den Anteil an produzierten Schuhpaaren unzureichender Qualität am Standort F und mit $p_D = 0,1$ für den Anteil an produzierten Schuhpaaren unzureichender Qualität am Standort D.

Für Qualitätssicherungsmaßnahmen sollen aus den Produktionsserien fertiger Schuhe Stichproben gezogen werden. Nehmen Sie an, dass die Anzahl der Schuhe mit dem geforderten Qualitätsstandard jeweils <u>binomialverteilte</u> Zufallsgrößen sind.

Zunächst sollen die Lieferungen vom Standort F überprüft werden. Dazu werden einer Lieferung 50 Paare zufällig entnommen.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
- genau 15 dieser Paare nicht dem Qualitätsstandard entsprechen.
- mindestens 12 dieser Paare nicht dem Qualitätsstandard entsprechen. **15P**

Vor der Auslieferung an den Handel befinden sich die vom Standort D und vom Standort F stammenden Sportschuhpaare gemischt im Zentrallager. 65 % der Schuhpaare stammen vom Standort F, der andere Teil vom Standort D. Es wird beschlossen, für alle Schuhe eine Qualitätskontrolle durchzuführen. Dabei werden Schuhpaare mit unzureichender Qualität mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % entdeckt; diese entdeckten Paare werden aussortiert und vernichtet. Die Qualitätskontrolle ist so gut, dass keine Schuhpaare, die dem geforderten Qualitätsstandard entsprechen, fälschlicherweise aussortiert werden.

c) Zeigen Sie, dass bei der Qualitätskontrolle ca. 20 % der Paare aussortiert und vernichtet werden. **15P**

Die Löhne sind am Standort F erheblich niedriger als am Standort D. Unter anderem deshalb sind die Kosten für die Produktion eines (noch nicht kontrollierten) Schuhpaares am Standort F mit 5 € nur halb so groß wie am Standort D. Durch das Aussortieren erhöhen sich die Kosten.

d) Bestätigen Sie, dass sich die mittleren Kosten K_F für ein kontrolliertes Paar Schuhe aus der Produktion am Standort F folgendermaßen berechnen lassen: $K_F = \frac{5}{(1 - p_F \cdot 0{,}9)}$ € (1) **15P**

Entsprechend gilt für Schuhpaare aus der Produktion am Standort D: $K_D = \frac{10}{(1 - p_D \cdot 0{,}9)}$ €. (2)

Dies können Sie als bereits bestätigt ansehen.

e) • Bestätigen Sie zunächst, dass sich die Produktion am Standort F gegenüber der Produktion am Standort D ökonomisch lohnt, wenn man die beiden Kostenterme (1) und (2) zu Grunde legt.

Der bisher betrachtete Wert $p_F = 0{,}3$ ist in Wirklichkeit nicht so konstant wie eingangs angenommen, er kann je nach örtlichen Produktionsbedingungen stark variieren.
Betrachten Sie deshalb $K_F : x \to K_F(x)$ als Funktion, wobei x den jetzt variablen Anteil p_F der Schuhpaare unzureichender Qualität aus der Produktion am Standort F bezeichnet.

Bemerkung: Natürlich ist auch der Wert p_D für den Standort D nicht immer konstant, das soll aber hier nicht berücksichtigt werden; gehen Sie deshalb für die ganze Aufgabe weiter davon aus, dass $p_D = 0{,}1$ und damit auch K_D konstant ist.

- Zeichnen Sie den zugehörigen Graphen von K_F in die Vorlage ein (siehe Anlage 1).
- Zeichnen Sie den Graphen der konstanten Funktion K_D zusätzlich in das beigefügte Koordinatensystem ein.
- Bestimmen Sie rechnerisch, wie groß p_F höchstens sein darf, damit sich die Produktion am Standort F gegenüber der am Standort D ökonomisch lohnt. Dabei sollen die beiden Kostenterme (1) und (2) zu Grunde gelegt werden.
- Es gilt $K_F(1) = 50$ €. Zeichnen Sie auch dieses Ergebnis (als Punkt auf dem Graphen) in das Koordinatensystem (siehe Anlage 1) ein. Interpretieren Sie dieses Ergebnis und setzen sich danach mit der Frage auseinander, ob der Term (1) aus der Sicht der Herstellerfirma für diesen Extremfall wirklich sinnvoll ist. **25P**

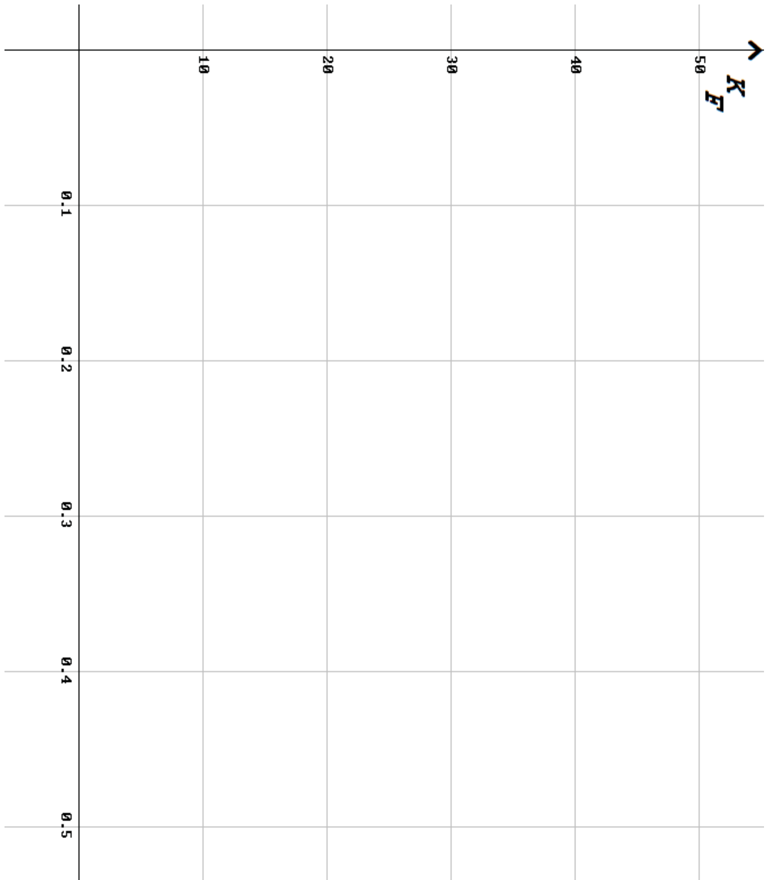
Wir betrachten jetzt nur noch Schuhe aus der Produktion am Standort F. Alle Schuhpaare, die die Qualitätskontrolle passiert haben, werden für 40 € pro Paar an den Handel geliefert.
Ein verkauftes Schuhpaar, das die geforderte Qualität nicht hat, wird vom Kunden zurückgegeben. Dies belastet die Herstellerfirma mit 60 €; dieser Betrag besteht aus dem Lieferpreis in Höhe von 40 € sowie einem Verwaltungsaufwand in Höhe von 20 €.

Der Gewinn setzt sich deshalb zusammen aus
- den erwarteten Verkaufseinnahmen,

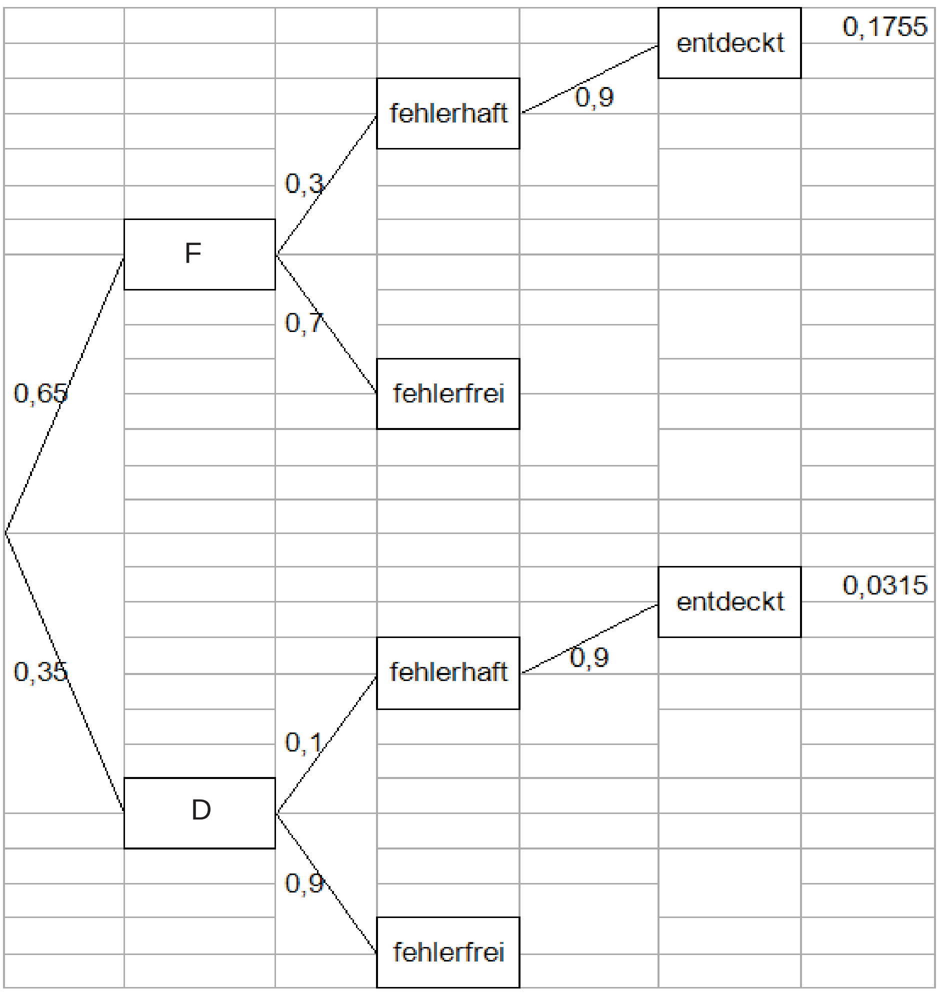
abzüglich
- der Produktionskosten von 5 Euro pro Paar und
- der erwarteten Belastungen durch Rückgaben.

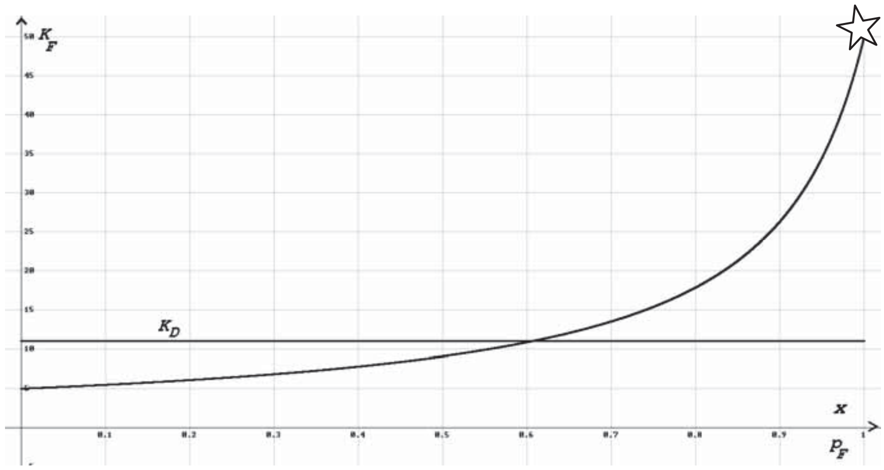
f) • Bestimmen Sie so den erwarteten Gewinn für 1000 am Standort F produzierten Schuhpaare bei $p_F = 0{,}3$.
• Bestimmen Sie den maximalen Wert von p_F, bei dem eine Produktion am Standort F überhaupt noch Gewinn erwarten lässt. **20P**

Anlage zur Aufgabe „Sportschuhe“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	P(Standard bei Produktion am Standort D nicht erreicht) $= 1 - 0{,}965 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}98 \approx 0{,}101 = 10{,}1\%$. P(Standard bei Produktion am Standort F nicht erreicht) $= 1 - 0{,}94 \cdot 0{,}935 \cdot 0{,}83 \cdot 0{,}965 \approx 0{,}296 = 29{,}6\%$. Also ist die Wahrscheinlichkeit etwa dreimal so hoch.	10		
b)	X sei 50-0,3-binomialverteilt • $p(X = 15) = \binom{50}{15} \cdot 0{,}3^{15} \cdot 0{,}7^{35} \approx 0{,}12235 \approx 12\%$ • $P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11) \approx 1 - 0{,}1390 = 0{,}8610 \approx 86\%$	15		
c)				

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	$0{,}1755+0{,}0315=0{,}207\approx 21\%$. Man kann natürlich auch direkt ohne Baumdiagramm rechnen: *P*(„Schuhpaar wird aussortiert") = $\left(0.65\cdot p_F+0{,}35\cdot p_D\right)\cdot 0{,}9=\left(0.65\cdot 0{,}3+0{,}35\cdot 0{,}1\right)\cdot 0{,}9\approx 0{,}2$ Ca. 20% der Partie werden also aussortiert.		15	
d)	Wenn *n* Schuhpaare am Standort F produziert werden, entstehen Kosten in Höhe von $n\cdot 5$ €. Von diesen *n* Paaren werden im Mittel $n\cdot p_F\cdot 0{,}9$ nach der Kontrolle aussortiert. Von den *n* Paaren kommen also $n\cdot\left(1-p_F\cdot 0{,}9\right)$ in den Handel. Rechnet man die Kosten um auf diese Paare, erhält man „pro Paar im Handel" Kosten von $\frac{5\cdot n\text{ €}}{n\cdot\left(1-p_F\cdot 0{,}9\right)}=\frac{5}{\left(1-p_F\cdot 0{,}9\right)}$ €		15	
e)	• Setzt man die beiden bekannten Werte für p_F bzw. p_D in die beiden Formeln ein, erhält man: $K_F=\frac{5}{(1-p_F\cdot 0{,}9)}\text{ €}\approx 6{,}85\text{ €}$ $K_D=\frac{10}{(1-p_D\cdot 0{,}9)}\text{ €}\approx 10{,}99\text{ €}$ Die Produktion von „handelbaren" Turnschuhen ist also am Standort F kostengünstiger. • 			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Der gekrümmte Graph stellt die beschriebene Funktion dar, die konstante Funktion den Wert K_D. $\frac{5}{(1-x\cdot 0{,}9)} = \frac{10}{(1-0{,}1\cdot 0{,}9)}$ $\Leftrightarrow x = \frac{109}{180} \quad (\approx 0{,}606)$ Wenn die Ausschussquote am Standort F den Wert von ca. 0,6 überschreitet, lohnt die Produktion dort nicht. • $p_F = 1$ bedeutet, dass nur Ausschussware produziert wird und dass deshalb auch bei der Kontrolle nicht entdeckter Ausschuss in den Handel kommt, was natürlich später zu Reklamationen und Rückzahlungsforderungen führen wird. Die im Modell berechneten hohen Kosten von 50 € können somit gar nicht durch Verkaufseinnahmen wieder erwirtschaftet werden. In diesem Extremfall ist die ganze Modellierung unsinnig.		20	5
f)	• Es sei zunächst $p_F = 0{,}3$. Von 1000 Paaren kommen also erwartet $1000\cdot(1-0{,}3\cdot 0{,}9) = 730$ in den Handel und führen zu erwarteten Einnahmen von $730\cdot 40\text{ €} = 29\,200\text{ €}$. Die Produktionskosten betragen $1000\cdot 5\text{ €} = 5\,000\text{ €}$ Von den 1000 Paaren kommen trotz Kontrolle erwartet $1000\cdot 0{,}3\cdot 0{,}1 = 30$ Paare unzureichender Qualität in den Handel und verursachen erwartete Belastungen von $30\cdot 60\text{ €} = 1\,800\text{ €}$ Der erwartete Gewinn G bei 1000 produzierten Paaren beträgt also $G = (29\,200 - 5000 - 1800)\text{€} = 22400\text{€}$ • Diese Überlegungen werden jetzt mit Variablen wiederholt: n Paare führen zu erwarteten Einnahmen von $n\cdot(1-p_F\cdot 0{,}9)\cdot 40\text{€}$. Die Produktionskosten betragen $n\cdot 5\text{ €}$ Von den n Paaren kommen trotz Kontrolle erwartet $n\cdot p_F\cdot 0{,}1$ Paare unzureichender Qualität in den Handel und verursachen erwartete Belastungen von $n\cdot p_F\cdot 0{,}1\cdot 60\text{€}$ Der erwartete Gewinn $G(p_F)$ bei n produzierten Paaren beträgt also $G(p_F) = n\cdot\left((1-p_F\cdot 0{,}9)\cdot 40 - 5 - p_F\cdot 0{,}1\cdot 60\right)\text{ €}$ $\quad = n\cdot(35-42p_F)\text{ €}$ Dieser Term ist genau dann positiv, wenn $35 > 42p_F$ also $p_F < \frac{5}{6} \approx 83\%$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Der Anteil der mit unzureichender Qualität am Standort F produzierten Schuhe darf also ca. 83% nicht übersteigen, wenn sich die Produktion dort noch lohnen soll. *Bemerkung: Teilt man diese Terme durch n erhält man mit* $\left(35-42\,p_F\right)$ *€ den mittleren „Gewinn pro produziertem Paar am Standort F“.* *<u>Bemerkung:</u>* *Hier kann auch an Hand grafischer Darstellungen argumentiert werden.*			20
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Stochastik

III.2 Screening

Für einige Krankheiten, die erst relativ spät zutage treten, gleichwohl aber im Körper vorhanden sind, gibt es Diagnosetests. Wenn diese Tests für große Bevölkerungsgruppen angewendet werden sollen, spricht man von Screening.

So wird zur Früherkennung einer Hörstörung für alle Neugeborenen (die eine Hörstörung noch gar nicht mitteilen können) ein Test angeboten. Fast alle Eltern nehmen dieses Angebot für ihre Kinder an.

Dieser Test hat anscheinend eine hohe Qualität: Bei 98,9% derjenigen Kinder, die eine Hörstörung haben, wird sie durch den Test erkannt. Man sagt auch, die Sensitivität des Tests beträgt 0,989.

Aber es gibt auch Fehldiagnosen der Art, dass der Test fälschlicherweise auf eine Hörstörung hinweist, obwohl diese gar nicht vorliegt: Bei 10 % derjenigen Kinder, deren Gehör völlig gesund ist, wird fälschlicherweise eine Hörstörung angezeigt. Man sagt auch, die Spezifität des Testes beträgt 1 – 0,1 = 0,90

Die relative Häufigkeit einer tatsächlichen Hörstörung unter allen Neugeborenen in der hier untersuchten Population – die Prävalenz – beträgt etwa 0,2 % = 0,002.

Fassen Sie im Folgenden die genannten drei relativen Häufigkeiten – Sensitivität (*sens)*, Spezifität (*spe*), Prävalenz (*prae*) – als Wahrscheinlichkeiten auf.

a) Erstellen Sie für dieses Screening ein Baumdiagramm
oder
ergänzen Sie die Tabelle (sog. Vierfeldertafel) in der Anlage zu dieser Aufgabe. In den Feldern der Tabelle sollen ggf. auf ganze Zahlen gerundete Erwartungswerte bei einer betrachteten Anzahl von 100000 Neugeborenen stehen. **15 P**

b) Bestätigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein als hörgestört getestetes Neugeborenes auch tatsächlich eine Hörstörung hat, nur ungefähr 2 % beträgt. **10 P**

Das Ergebnis aus b) ist vielleicht überraschend, in jedem Falle aber deprimierend. Bei einem brauchbaren Test sollte die Wahrscheinlichkeit, dass ein als hörgestört getestetes Neugeborenes auch tatsächlich eine Hörstörung hat, doch zumindest deutlich über 50 % liegen. Um über die Ursachen nachzudenken und Wege zur Verbesserung aufzuzeigen, soll die Wahrscheinlichkeit, dass ein als hörgestört getestetes Neugeborenes auch tatsächlich eine Hörstörung hat, in Abhängigkeit von den drei Eingangsgrößen (*sens*, *spe* und *prae*) betrachtet werden.

Dabei soll in drei Funktionen jeweils immer nur eine der drei Größen variabel gehalten werden und die anderen beiden Größen sollen entsprechend den oben genannten Zahlenwerten als Konstanten betrachtet werden.

c) Seien zunächst *prae* variabel und somit *sens* und *spe* konstant. Bestätigen Sie die folgende Formel für die Wahrscheinlichkeit, dass tatsächlich eine Hörstörung vorliegt, wenn der Test eine solche anzeigt:

$$P\left(\textit{Hörstörung liegt vor}\ \middle|\ \textit{Der Test zeigt Hörstörung an}\right) = h(prae) = \frac{989 \cdot prae}{889 \cdot prae + 100}$$

Stellen Sie den soeben bestätigten Zusammenhang aussagekräftig in einem Koordinatensystem grafisch dar. Dabei werde die Variable *prae* auf der horizontalen Achse und die Wahrscheinlichkeit auf der senkrechten Achse abgetragen. Interpretieren Sie den Verlauf des Graphen. Gehen Sie bei Ihrer Interpretation auch darauf ein, bei welchen Prävalenzen (Werten für *prae*) ein Ergebnis, das auf eine Hörstörung hinweist, brauchbar ist. **20 P**

Betrachtet man nun nacheinander auch *sens* und dann *spe* als Variable und lässt dabei die jeweils anderen beiden Größen konstant, ergeben sich die folgenden beiden Formeln für die Wahrscheinlichkeit, dass tatsächlich eine Hörstörung vorliegt, wenn der Test eine solche anzeigt.

sens variabel: $P\left(\textit{Hörstörung liegt vor}\ \middle|\ \textit{Der Test zeigt Hörstörung an}\right) = f(sens) = \frac{10 \cdot sens}{10 \cdot sens + 499}$

spe variabel: $P\left(\textit{Hörstörung liegt vor}\ \middle|\ \textit{Der Test zeigt Hörstörung an}\right) = g(spe) = \frac{989}{499989 - 499000 \cdot spe}$

d) Bestätigen Sie eine der beiden soeben aufgeführten Formeln.
Zeichnen Sie analog zum vorangegangen Aufgabenteil durch Wahl geeigneter Ausschnitte aussagekräftige Funktionsgraphen zu beiden Formeln. **20 P**

e) Im Rahmen der Planung für den Einsatz von Forschungsgeldern stellt sich die Frage, ob man eher die *Spezifität* oder eher die *Sensitivität* (ausgehend von den Werten 0,9 bzw. 0,989) des Testes verbessern sollte, um die Wahrscheinlichkeit zu erhöhen, dass ein als hörgestört getestetes Neugeborenes auch tatsächlich eine Hörstörung hat. Interpretieren Sie in Bezug auf diese Fragestellung die beiden in Aufgabenteil d) dargestellten Graphen. **20 P**

Für die Diagnose von Hörstörungen bei Neugeborenen gibt es mehrere Testverfahren, die unterschiedlich aufwändig, unterschiedlich teuer und unterschiedlich gut sind. Man beginnt oft bei dem Screening mit dem oben beschriebenen – eher preiswerten – Test.

f) Bei einem Befund, der auf ein gesundes Kind hinweist, geht man in der Regel davon aus, dass dieses Kind auch tatsächlich keinen Gehörschaden hat und untersucht nicht weiter. Begründen Sie dieses Vorgehen. **15 P**

Anlage zur Aufgabe „Screening“

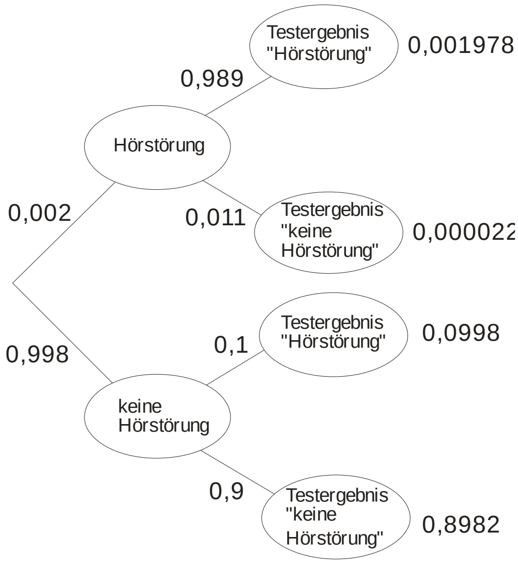
Auf ganze Zahlen gerundete Erwartungswerte für 100 000 Neugeborene:

	Kind hat Hörstörung	Kind hat keine Hörstörung	Summen
Test weist auf eine Hörstörung hin			
Test weist auf keine Hörstörung hin			
Summen			100 000

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III

a)



oder

	Kind hat Hörstörung	Kind hat <u>keine</u> Hörstörung	Summen
Test weist auf eine Hörstörung hin	198	9 980	10 178
Test weist auf <u>keine</u> Hörstörung hin	2	89 820	89 822
Summen	200	99 800	100 000

I: 15

b) Die Frage kann direkt mit den Daten aus obiger Vierfeldertafel beantwortet werden:

$$P\left(\textit{Hörstörung liegt vor}\,\middle|\,\textit{Der Test zeigt Hörstörung an}\right)=\frac{198}{10178}\approx 0{,}0195\approx 2\%$$

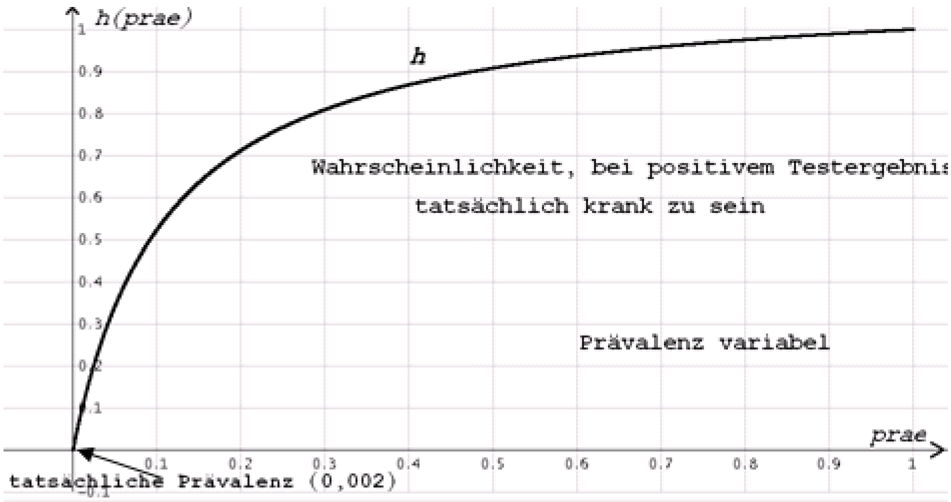
Möglich ist auch ein Ansatz über den Satz von Bayes bzw. über das Baumdiagramm:

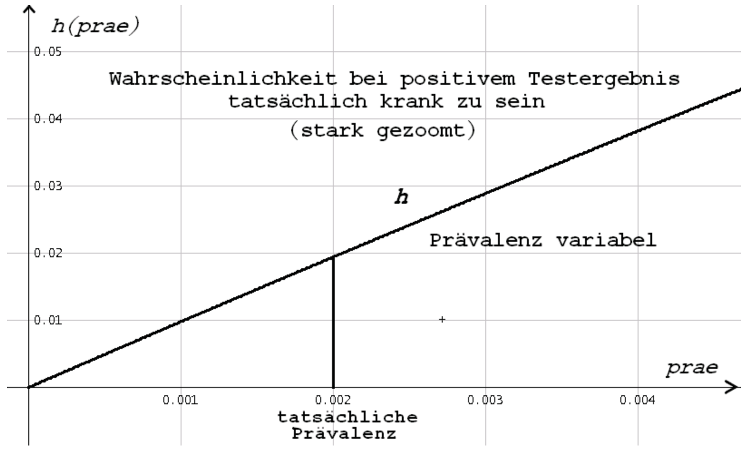
$$P\left(\textit{Hörstörung liegt vor}\,\middle|\,\textit{Der Test zeigt Hörstörung an}\right)=$$

$$\frac{prae\cdot sens}{prae\cdot sens+(1-prae)\cdot(1-spe)}=\frac{0{,}002\cdot 0{,}989}{0{,}002\cdot 0{,}989+0{,}998\cdot 0{,}1}\approx 0{,}0194\approx 2\%$$

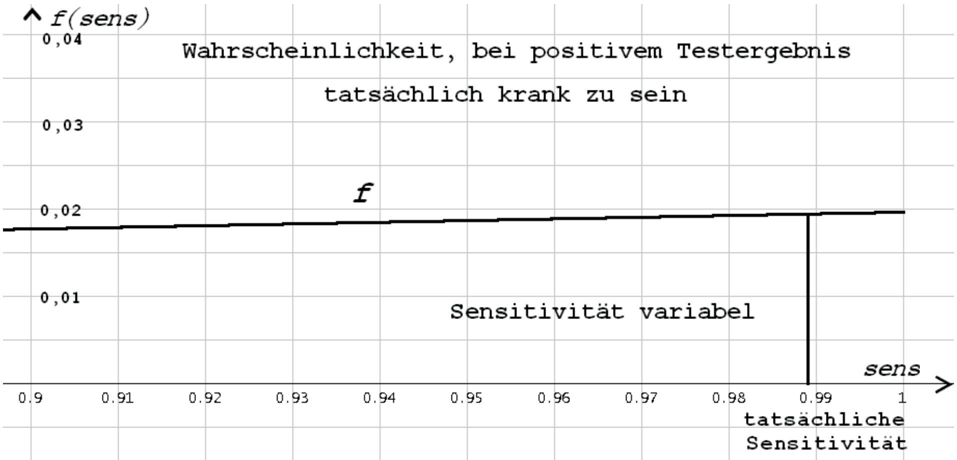
<u>Bemerkung:</u> Der vielleicht auftauchende Unterschied der Ergebnisse bei genauerer Rechnung erklärt sich daraus, dass die Vierfeldertafel in a) in der ersten Spalte gerundete Werte enthält.

I: 10

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	Sei B_1: Das Neugeborene ist hörgeschädigt. $P(B_1) = prae$ B_2: Das Neugeborene ist nicht hörgeschädigt. $P(B_2) = 1 - prae$ sowie A: Der Test zeigt eine Hörschädigung an. Es gilt $P(A \mid B_1) = sens = 0{,}989$ $P(A \mid B_2) = 1 - spe = 0{,}1$ Nach dem Satz von Bayes gilt dann für die gesuchte Wahrscheinlichkeit: $P\left(\text{Hörstörung liegt vor} \,\middle|\, \text{Der Test zeigt Hörstörung an}\right) =$ $P(B_1 \mid A) = \dfrac{P(B_1)\cdot P(A \mid B_1)}{P(B_1)\cdot P(A \mid B_1) + P(B_2)\cdot P(A \mid B_2)}$ $= \quad = \dfrac{prae \cdot 0{,}989}{prae \cdot 0{,}989 + (1 - prae)0{,}1}$ (*) $= \dfrac{989 \cdot prae}{889 \cdot prae + 100} = h(prae)$ <u>Anmerkung</u>: *In der schriftlichen Darstellung des Prüflings muss ein Zwischenschritt ähnlich dem in der mit (*) markierten Zeile erscheinen.*  Man erkennt hier, dass bei geringen Prävalenzen ein positives Testergebnis wenig aussagt. Erst ab einer Prävalenz von über 0,09 ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit einem positiven Testergebnis tatsächlich hörgeschädigt ist, größer als 50 %.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Die „Realität" wird anders sichtbar, wenn man *h* stark zoomt:  *<u>Anmerkung</u>: Die Darstellung der Graphen ist dann mit voller Punktzahl zu bewerten, wenn die Interpretation an Hand* ***eines*** *der Graphen nachvollziehbar ist.*		15	5
d)	*Anmerkung: Nur <u>eine</u> der beiden Formeln muss bestätigt werden.* <u>*sens* variabel:</u> Sei B_1: Das Neugeborene ist hörgeschädigt. $P(B_1) = 0{,}002$ B_2: Das Neugeborene ist nicht hörgeschädigt. $P(B_2) = 0{,}998$ sowie A: Der Test zeigt eine Hörschädigung an. Es gilt $P(A \mid B_1) = sens$ $P(A \mid B_2) = 1 - spe = 0{,}1$ Nach dem Satz von Bayes gilt dann für die gesuchte Wahrscheinlichkeit: $P\left(\textit{Hörstörung liegt vor} \mid \textit{Der Test zeigt Hörstörung an}\right) =$ $P(B_1 \mid A) = \dfrac{P(B_1) \cdot P(A \mid B_1)}{P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + P(B_2) \cdot P(A \mid B_2)}$ $= \dfrac{0{,}002 \cdot sens}{0{,}002 \cdot sens + 0{,}998 \cdot 0{,}1}$ (*) $= \dfrac{10 \cdot sens}{10 \cdot sens + 499} = f(sens)$ *<u>Anmerkung</u>: In der schriftlichen Darstellung des Prüflings muss ein Zwischenschritt ähnlich dem in der mit (*) markierten Zeile erscheinen.*			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III



<u>*spe* variabel:</u>

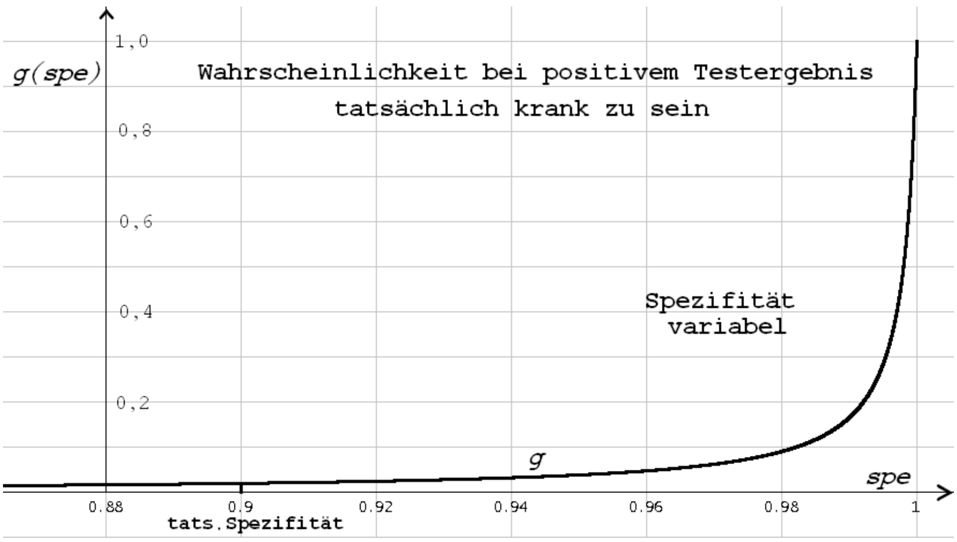
Mit den obigen Bezeichnungen gilt hier: $P(B_1) = 0{,}002$, $P(B_2) = 0{,}998$, $P(A\,|\,B_1) = 0{,}989$ und $P(A\,|\,B_2) = 1 - spe$.

Nach dem Satz von Bayes gilt dann für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P\left(\textit{Hörstörung liegt vor}\;\middle|\;\textit{Der Test zeigt Hörstörung an}\right) =$$

$$\begin{aligned} P(B_1\,|\,A) &= \frac{P(B_1)\cdot P(A\,|\,B_1)}{P(B_1)\cdot P(A\,|\,B_1) + P(B_2)\cdot P(A\,|\,B_2)} \\ &= \frac{0{,}989\cdot 0{,}002}{0{,}989\cdot 0{,}002 + (1-spe)\cdot 0{,}998} \qquad (*) \\ &= \frac{989}{499989 - 499000\cdot spe} = g(spe) \end{aligned}$$

<u>Anmerkung</u>: *Auch hier muss in der schriftlichen Darstellung des Prüflings ein Zwischenschritt ähnlich dem in der mit (*) markierten Zeile erscheinen.*



		I	II	III
			20	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>Der Funktionsgraph f im Zusammenhang mit der variablen Sensitivität zeigt, dass eine Erhöhung der Sensitivität des Tests wenig bringt, wenn es darum geht, die Aussagekraft eines positiven Testergebnisses zu steigern. Selbst bei einer idealen Sensitivität von 100 % beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass eine positiv getestete Person tatsächlich krank ist, nur ca. 2 %. Denn bei der geringen Prävalenz ist die überwiegende Anzahl der getesteten Neugeborenen gesund und die schlechte Spezifität ist die eigentliche Ursache von Fehlurteilen bei positiver Testung.

Man erkennt weiter am Funktionsgraphen von g im Zusammenhang mit der variablen Spezifität, dass man durch Erhöhung der Spezifität die Wahrscheinlichkeit für korrekte Urteile bei positivem Testergebnis steigern kann, aber man muss schon eine Spezifität von deutlich über 99 % erreichen, um im Ergebnis über 50 % zu kommen.

Die Forschungsgelder sind also in die Erhöhung der Spezifität zu investieren.

<u>Bemerkung:</u> Wenn man hier eine genauere Aussage haben will, müsste man den Graphen im ganz rechten Bereich zoomen oder eine Gleichung $g(spe)=0{,}5$ lösen mit dem Ergebnis, dass die Spezifität größer als 99,8 % sein müsste. Das ist aber nicht verlangt.</td><td></td><td></td><td>20</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>Sei B_1: Das Neugeborene ist hörgeschädigt. $P(B_1)=0{,}002$
B_2: Das Neugeborene ist nicht hörgeschädigt. $P(B_2)=0{,}998$
sowie C: Der Test zeigt keine Hörschädigung an.
Es gilt $P(C\mid B_1)=1-0{,}989=0{,}011$
$P(C\mid B_2)=0{,}9$.

Nach dem Satz von Bayes gilt dann für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:
$P\left(\text{Hörstörung liegt } \underline{\text{nicht}} \text{ vor} \,\middle|\, \text{Der Test zeigt } \underline{\text{keine}} \text{ Hörstörung an}\right)=$
$$P(B_2\mid C)=\frac{P(B_2)\cdot P(C\mid B_2)}{P(B_1)\cdot P(C\mid B_1)+P(B_2)\cdot P(C\mid B_2)} =\frac{0{,}998\cdot 0{,}9}{0{,}998\cdot 0{,}9+0{,}002\cdot 0{,}011} =\frac{0{,}898200}{0{,}898222}\approx 1$$
Bei der sehr geringen Prävalenz kann nämlich der rechte Summand im Nenner vernachlässigt werden.

Anmerkung: Auch eine weniger formale Herleitung des Ergebnisses ist zu akzeptieren. Man kann etwa das Ergebnis direkt aus den (gerundeten) Werten der Vierfeldertafel aus Aufgabenteil a) ablesen. Man erhält dann für die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{89820}{89822}\approx 1$.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Bei einem Testbefund, der auf ein nicht-hörgeschädigtes Kind hinweist, kann man also so gut wie sicher davon ausgehen, dass kein Hörschaden vorliegt.		15	
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25