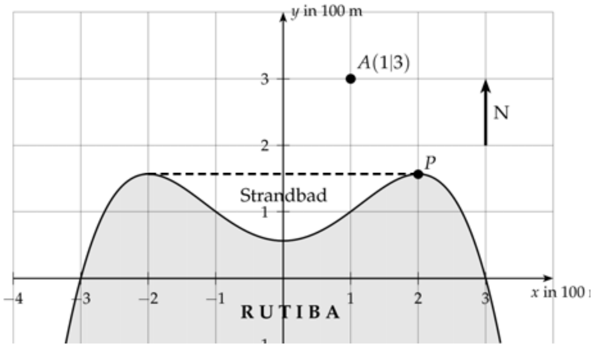
ANALYSIS 1

I.1 Seebad Rutiba

Die nebenstehende Abbildung zeigt die Nordküste der künstlich angelegten Insel Rutiba (1 LE entspricht 100 m). Direkt am Strand führt eine Uferstraße (durchgezogene Linie) entlang.



Rutiba hat ein Strandbad, das durch eine Absperrkette von der offenen See getrennt ist (gestrichelte Linie).

Die Uferstraße ist durch die Funktion *f* mit

$$f(x) = -\frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{2} + \frac{9}{16}, \quad x \in [-4;4],$$

gegeben.

Der Nordküste vorgelagert ist ein Felsen *A*, der als Anlegestelle für Ausflugsdampfer dient. Diese Anlegestelle ist bisher nur durch eine Bootsverbindung von der östlichen Spitze der Insel (Punkt *P*) zu erreichen.

a) Bestätigen Sie: *P* ist ein Maximum der Funktion f mit den Koordinaten $P\left(2\middle|\frac{25}{16}\right)$.

Berechnen Sie die Länge der Absperrkette und die breiteste Stelle des Strandbades in Nord-Süd-Richtung. **(15P)**

b) Bestimmen Sie die Entfernung, die ein Boot zwischen der Insel (*P*) und der Anlegestelle (*A*) zurücklegen muss und den Winkel, unter dem es (gegen die Nordrichtung) fahren muss. **(10P)**

Da das Strandbad aufgrund gefährlicher Strömungen häufig für den Badebetrieb gesperrt werden musste, soll es nun zu einem neuen geschützten Badesee umgebaut werden. Dazu liegen der Planungskommission zwei Entwürfe vor (siehe Anlage).
Bei beiden Entwürfen wird die bisherige Uferstraße über einen Damm umgeleitet. Dadurch entsteht jeweils ein großer Badesee.

Im ersten Entwurf (**Plan 1**) soll der Dammverlauf die Form einer quadratischen Parabel mit folgender Gleichung haben:

$$h(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{45}{16}.$$

c) Bestimmen Sie die Punkte, bei denen die alte Uferstraße nach **Plan 1** in den neuen Damm übergeht und die Fläche des dadurch entstehenden Badesees. **(25P)**

Im zweiten Entwurf (**Plan 2**) kann der Verlauf des Damms durch eine trigonometrische Funktion g beschrieben werden, die zwei Tiefpunkte genau an den Hochpunkten der Funktion f hat.
Der Badesee wird mit dieser Funktion an der breitesten Stelle (in Nord-Süd-Richtung) genau doppelt so breit.

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion g und begründen Sie, dass der Straßenverlauf knickfrei verlegt werden kann. **(25P)**

Kontrollergebnis: $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) + \frac{33}{16}$.

Der Bürgermeister von Rutiba fordert für die Fläche des neuen Badesees eine Mindestgröße von 45 000 m^2.

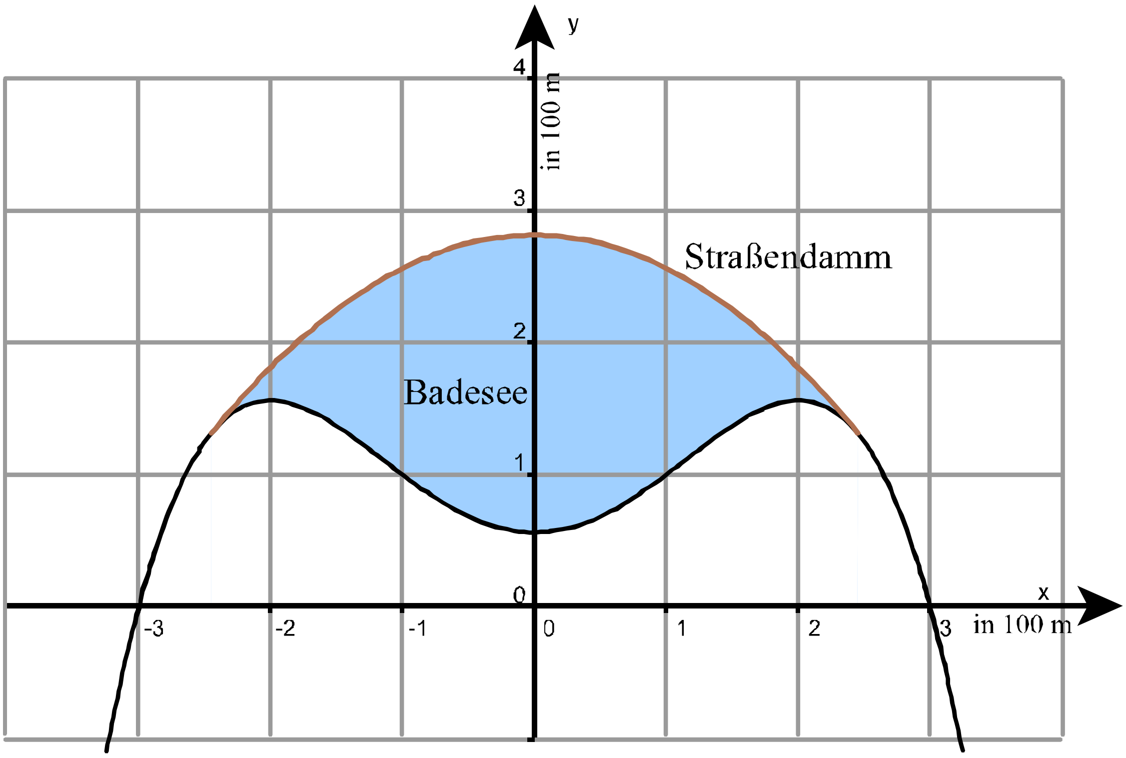
e) Zeigen Sie, dass G mit $G(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) + \frac{33}{16}x$ eine Stammfunktion von g ist und untersuchen Sie, ob die Fläche des Badesees nach **Plan 2** die Forderung des Bürgermeisters erfüllt. **(10P)**

In dem Entwurf nach **Plan 1** soll eine Seebrücke von der Anlegestelle (A) zum neuen Damm gebaut werden. Aus Kostengründen soll die Seebrücke möglichst kurz sein.

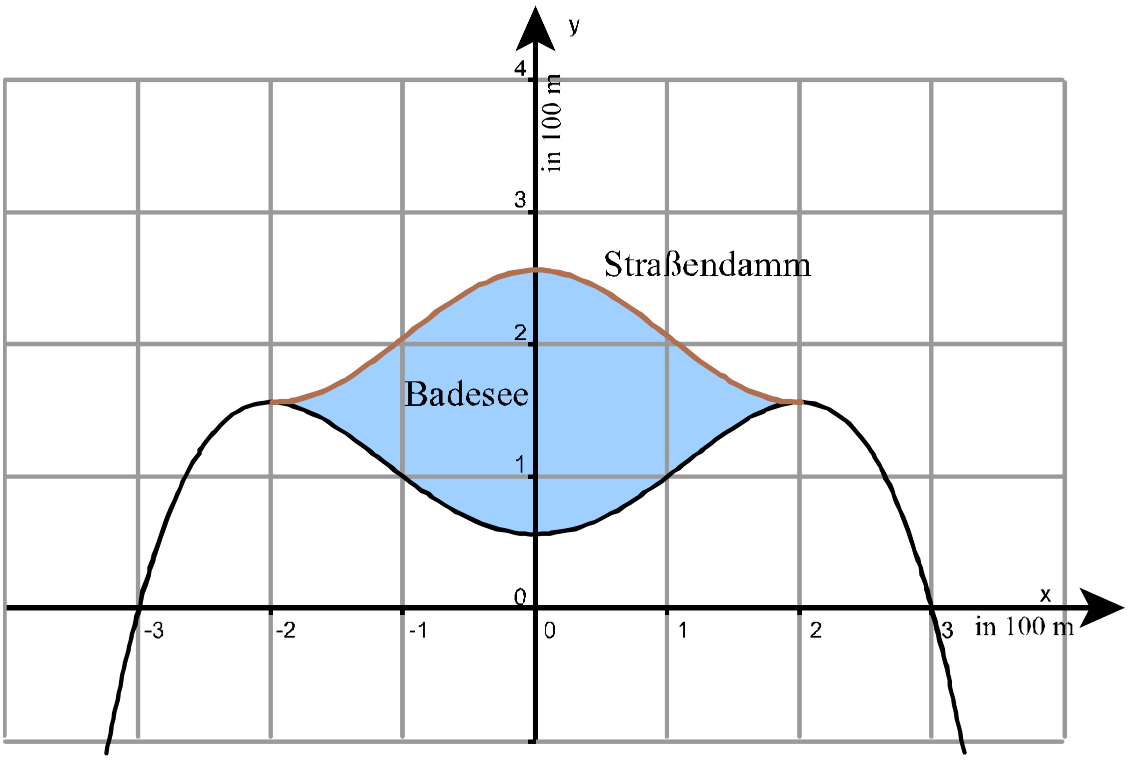
f) Nach ersten Berechnungen soll die Brücke vom Punkt A aus etwa im Punkt $Q(0{,}845 \mid 2{,}634)$ (die Koordinaten von Q sind auf drei Nachkommastellen gerundet!) auf den Damm treffen.
Bestätigen Sie, dass der Punkt Q auf dem Graphen von h liegt.
Zeigen Sie, dass der Damm im Punkt Q am dichtesten zur Anlegestelle A liegt. **(15P)**

Anlage zur Aufgabe „Rutiba“

Plan 1:



Plan 2:



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	<u>Lage des Punktes *P*:</u> Bed.: $f'(x)=0 \wedge f''(x)<0$. $f'(x)=-\frac{1}{4}x^3+x=(-\frac{1}{4}x^2+1)\cdot x=0 \Rightarrow x_1=0 \vee x_2=2 \vee x_3=-2$. Klassifizierung: $f''(x)=-\frac{3}{4}x^2+1 \Rightarrow f''(2)=-2<0 \Rightarrow \textit{Maximum}$ $f(2)=\frac{25}{16}$ $\quad$ $\underline{\underline{P(2;\frac{25}{16})}}$ <u>Länge der Absperrkette:</u> $l=x_2-x_3=2-(-2)=4$ Die Absperrkette ist 400 m lang. Die breiteste Stelle in Nord-Süd-Richtung ist bei $x_1=0$, da der Graph von f hier ein lokales Minimum hat: Bedingung: $f'(x)=0 \wedge f''(x)>0$. $f''(x)=-\frac{3}{4}x^2+1$, das heißt $f''(0)=1>0$, also liegt ein Minimum vor. *Andere Lösungsvarianten sind möglich und erhalten volle Punktzahl.* Breite in N-S-Richtung: $b=f(2)-f(0)=\frac{25}{16}-\frac{9}{16}=1$. Das Strandbad ist in Nord-Südrichtung 100 m breit.	15		
b)	<u>Entfernung zwischen *P* und *A*:</u> $\lvert PA\rvert=\sqrt{(x_A-x_P)^2+(y_A-y_P)^2}=\sqrt{(1-2)^2+\left(3-\frac{25}{16}\right)^2}\approx 1{,}75$. Die Entfernung zwischen den Punkten *P* und *A* beträgt 175 m. <u>Winkel gegen Nordrichtung:</u> $\tan\alpha=\frac{x_P-x_A}{y_A-y_P}=\frac{2-1}{3-\frac{25}{16}}\approx 0{,}696$. Es gilt damit $\arctan 0{,}696=34{,}82...°$ Das Boot muss mit einem Kurs von ca. 35° Nord Richtung West fahren.	10		

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
c)	<u>Berechnung der Berührungsstellen</u>: $f(x) = -\frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{2} + \frac{9}{16} \qquad h(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{45}{16}$ $f(x) = h(x)$ $-\frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{2} + \frac{9}{16} = -\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{45}{16}$ $-\frac{x^4}{16} + \frac{3}{4} \cdot x^2 - \frac{36}{16} = 0$ $x^4 - 12 \cdot x^2 + 36 = 0$ $(x^2 - 6) \cdot (x^2 - 6) = 0$ $x^2 = 6$ $x_4 = \sqrt{6} \vee x_5 = -\sqrt{6}$ $h(\sqrt{6}) = h(-\sqrt{6}) = \frac{21}{16}$. Die gesuchten Punkte haben die Koordinaten $\left(\sqrt{6}; \frac{21}{16}\right)$ bzw. $\left(-\sqrt{6}; \frac{21}{16}\right)$. Die Fläche des entstehenden Badesees nach Plan 1: $A_1 = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} [h(x) - f(x)] dx$ $= \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left[-\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{45}{16} - \left(-\frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{2} + \frac{9}{16}\right)\right] dx$ $= \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left(\frac{x^4}{16} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{36}{16}\right) dx$ $= \left[\frac{x^5}{80} - \frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x\right]_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \approx 5{,}879$ Der Badesee nach Plan 1 hat eine Fläche von ca. 58 800 m².		20	5

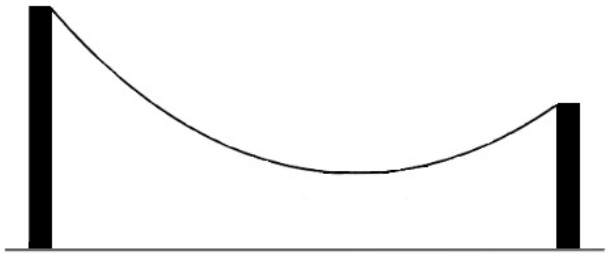
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	Funktionsvorschrift für *g*: Wegen der Achsensymmetrie von *f* handelt es sich um eine Kosinusfunktion mit $g(x) = a \cdot \cos(b \cdot x) + c$. Amplitude: $a = \frac{1}{2} \cdot (f(2) - f(0)) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{25}{16} - \frac{9}{16}\right) = \frac{1}{2}$. Periodenlänge: $p = \frac{2 \cdot \pi}{b} = 4 \Leftrightarrow b = \frac{\pi}{2}$. *y*-Verschiebung: $c = f(2) + a = \frac{25}{16} + \frac{1}{2} = \frac{33}{16}$. $\underline{\underline{g(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) + \frac{33}{16}}}$ Untersuchung auf „Knickfreiheit“: $f'(x) = -\frac{x^3}{4} + x \qquad g'(x) = -\frac{\pi}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$ Der Straßenverlauf kann knickfrei verändert werden, wenn an den Berührungsstellen gilt: $f(x) = g(x) \wedge f'(x) = g'(x)$. $f(2) = g(2) = \frac{25}{16} \wedge f'(2) = g'(2) = 0$.		20	5
e)	Durch Anwendung der Kettenregel erhält man $G'(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) + \frac{33}{16} = g(x)$ $A_2 = \int_{-2}^{2} [g(x) - f(x)]dx$ $= \int_{-2}^{2} \left[\frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) + \frac{33}{16} - \left(-\frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{2} + \frac{9}{16}\right)\right]dx$ $= \int_{-2}^{2} \left[\frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) + \frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\right]dx$ $= \left[\frac{1}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) + \frac{x^5}{80} - \frac{x^3}{6} + \frac{3}{2}x\right]_{-2}^{2}$ $= \frac{31}{15} - \left(-\frac{31}{15}\right) = \frac{62}{15} \approx 4{,}133$ Der Badesee nach Plan 2 hat nur eine Fläche von ca. 41 300 m^2 und erfüllt somit <u>nicht</u> die Forderung des Bürgermeisters.		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	Der Punkt Q liegt auf dem Graphen von h, denn $h(0{,}845) \approx 2{,}634$. Der Abstand zwischen A und Q ist minimal, wenn die Strecke $\overline{AQ}$ senkrecht zur Tangente im Punkt Q der Parabel ist (Normale): Die Strecke $\overline{AQ}$ hat die Steigung $m_1 = \frac{y_A - y_Q}{x_A - x_Q} = \frac{3 - 2{,}634}{1 - 0{,}845} \approx 2{,}361$. Weiterhin gilt $h'(x) = -\frac{1}{2} \cdot x$. Die Tangentensteigung der Parabel im Punkt Q ist $m_2 = h'(0{,}845) \approx -0{,}423$. Die Gerade $\overline{AQ}$ steht senkrecht auf der Tangenten im Punkt Q der Parabel, wenn $m_1 \cdot m_2 = -1$. Dies ist mit $2{,}361 \cdot (-0{,}423) = -0{,}998703 \approx -1$ der Fall.	5		10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

ANALYSIS 2

I.2 Seilbahn

In einem Freizeitpark soll auf dem Abenteuerspielplatz eine Seilbahn gebaut werden. Der Freizeitparkbetreiber übergibt diese Aufgabe einem Architektenbüro seines Vertrauens.



Das Seil soll zwischen zwei Pfeilern gespannt werden, die einen Abstand von 50 m haben. Wenn sich ein Mensch an das Seil hängt, darf er den Boden nicht berühren.

Der Architekt geht davon aus, dass für diese Seilbahn das durchhängende Seil (ohne Belastung) durch die Funktion *f* mit folgender Gleichung beschrieben werden kann:

$$f(x) = 15 \cdot e^{\frac{1}{30}x-1} + 15 \cdot e^{-\frac{1}{30}x+1} - 25\,,\ x \in [0;50].$$

Das Seil verläuft in Richtung der positiven *x*-Achse, die im ebenen Erdboden unter der Seilbahn liegt.

a) Der erste Pfeiler steht mit seinem Fuß an dem Punkt $(0\,|\,0)$. Im Abstand von 50 m soll der zweite Pfeiler aufgestellt werden. Berechnen Sie die notwendige Höhe der zwei Pfeiler. **(10P)**
Bemerkung: beide Pfeiler liegen im Koordinatensystem parallel zur y-Achse.

b) Berechnen Sie die Steigung des Seiles in den beiden Aufhängepunkten. **(10P)**

c) Bei Belastung hängt das Seil höchstens 1 m durch. Bestätigen Sie, dass dann ein Mensch von 2 m Länge an jeder Stelle des Seils hängen kann, ohne den Boden zu berühren. **(15P)**
Hinweis: Eine Überprüfung mit der zweiten Ableitung ist nicht notwendig.

d) Zeichnen Sie den Graphen von f und die beiden Pfeiler in das beigefügte Koordinatensystem ein. **(10P)**

Der Assistent des Architekten überlegt sich, dass der Verlauf des Seiles näherungsweise auch durch eine quadratische Funktion p beschrieben werden kann. Diese Funktion p muss natürlich dieselben Aufhängepunkte wie die Funktion f haben und soll auch durch den Punkt $(30\,|\,5)$ verlaufen.

e) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel p. Benutzen Sie dazu die Aufhängepunkte $(0\,|\,21{,}3)$ und $(50\,|\,11{,}9)$. **(20P)**

Zur Kontrolle: $p(x) = \frac{533}{30000}x^2 - \frac{3229}{3000}x + 21{,}3 = 0{,}0177\overline{6}x^2 - 1{,}076\overline{3}x + 21{,}3$.

Der Assistent behauptet, dass sich die beiden Graphen praktisch kaum unterscheiden. Das soll überprüft werden.

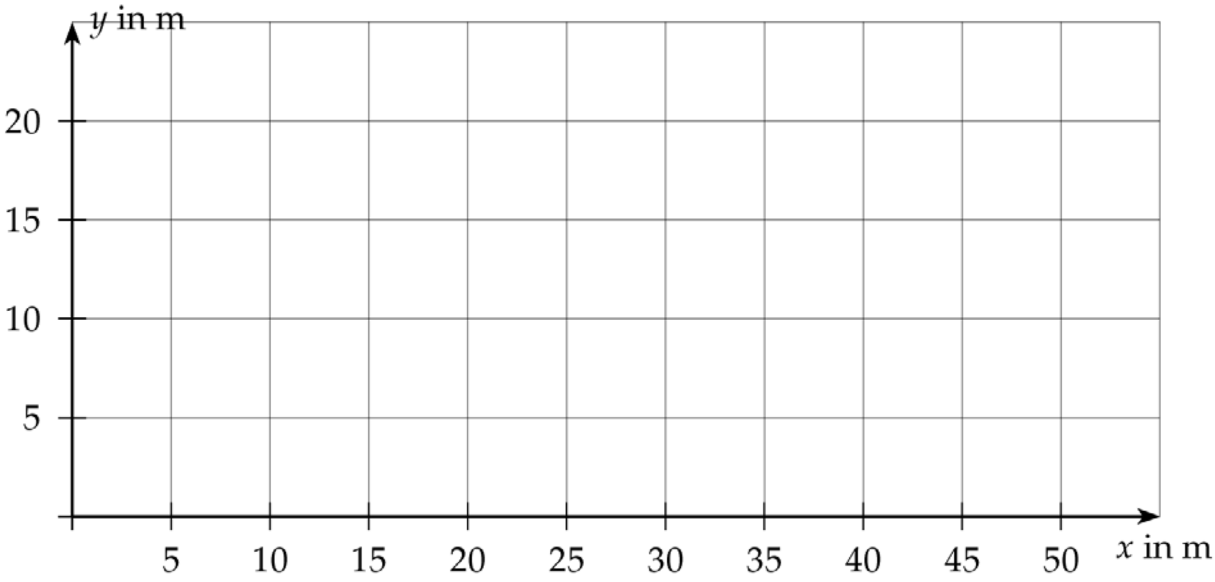
f) • Zeigen Sie zunächst, dass F mit $F(x) = 450 \cdot e^{\frac{1}{30}x-1} - 450 \cdot e^{-\frac{1}{30}x+1} - 25 \cdot x$ eine Stammfunktion von f ist, und bestimmen Sie eine Stammfunktion von p.

Hinweis: Sie können voraussetzen, dass die beiden Graphen außer den Aufhängepunkten und $(30\,|\,5)$ keine weiteren Punkte gemeinsam haben.

• Bestimmen Sie den **durchschnittlichen** Unterschied der beiden Funktionen in den Teilbereichen vom Start bis 30 m und für den zweiten Teil der Seilbahn von 30 m bis 50 m. **(25P)**

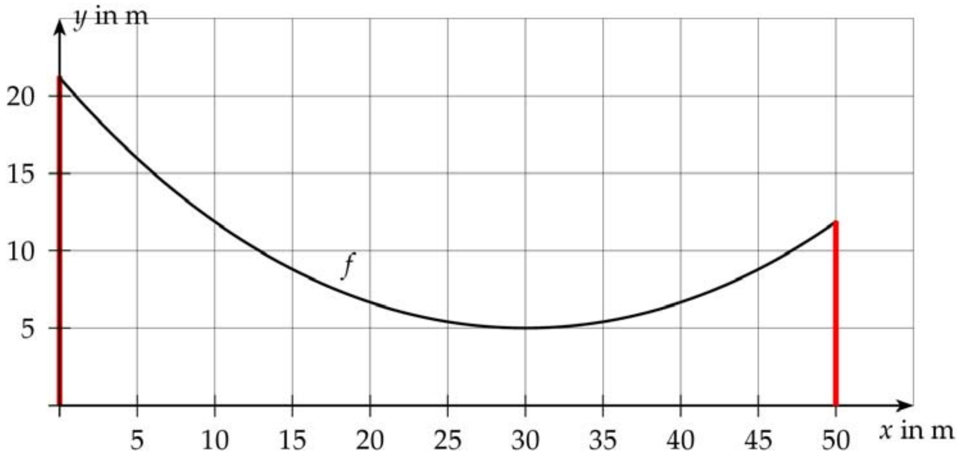
g) Vergleichen Sie nun den durchschnittlichen Unterschied zwischen f und p getrennt für die beiden oben genannten Bereiche und beurteilen Sie die Behauptung des Assistenten. **(10P)**

Anlage zur Aufgabe „Seilbahn“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	$f(x)=15\cdot e^{\frac{1}{30}x-1}+15\cdot e^{-\frac{1}{30}x+1}-25$ $f(0)=15\cdot e^{-1}+15\cdot e-25=21{,}2924...$ $f(50)=15\cdot e^{\frac{2}{3}}+15\cdot e^{\frac{-2}{3}}-25=11{,}9172...$ Der erste Pfeiler ist etwa 21,29 m hoch, der zweite etwa 11,92 m.	10		
b)	$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{30}x-1}-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{30}x+1}$. $f'(0)=\frac{1}{2}\cdot e^{-1}-\frac{1}{2}\cdot e=-1{,}1752...\approx-1{,}18$. $f'(50)=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{2}{3}}=0{,}7171...\approx 0{,}72$.	10		
c)	Es muss der Tiefpunkt bestimmt werden. Ansatz $f'(x)=0$. $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{30}x-1}-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{30}x+1}$ $0=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{30}x-1}-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{30}x+1}$ $e^{\frac{1}{30}x-1}=e^{-\frac{1}{30}x+1}$ $\frac{1}{30}x-1=-\frac{1}{30}x+1$ $\frac{1}{15}x=2$ $x=30$ $f(30)=15\cdot e^{0}+15\cdot e^{0}-25$ $f(30)=5$ Am tiefsten Punkt hängt das Seil im unbelasteten Zustand 5 m über dem Fußboden, selbst wenn es 1 m durchhängt, ist also noch genug Platz für einen daran hängenden Menschen.		15	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>
</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Mit dem Ansatz $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ erhält man durch Einsetzen der Punkte ein Gleichungssystem mit den drei Unbekannten a, b, c:

$$21{,}3 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \text{, also } c = 21{,}3$$
$$5 = a \cdot 900 + b \cdot 30 + 21{,}3$$
$$11{,}9 = a \cdot 2500 + b \cdot 50 + 21{,}3$$

mit den Lösungen

$$a = \frac{533}{30000}; \quad b = -\frac{3229}{3000}; \quad c = 21{,}3\,,$$

so dass sich die Parabel mit der Gleichung

$$p(x) = \frac{533}{30000} x^2 - \frac{3229}{3000} x + 21{,}3$$

ergibt.</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>f)</td><td>• Nachweis der Stammfunktion:

$$F(x) = 450 \cdot e^{\frac{1}{30}x-1} - 450 \cdot e^{-\frac{1}{30}x+1} - 25 \cdot x$$
$$F'(x) = 450 \cdot \frac{1}{30} \cdot e^{\frac{1}{30}x-1} - 450 \cdot \left(-\frac{1}{30}\right) \cdot e^{-\frac{1}{30}x+1} - 25$$
$$= 15 \cdot e^{\frac{1}{30}x-1} + 15 \cdot e^{-\frac{1}{30}x+1} - 25 = f(x)$$

Stammfunktion von p:

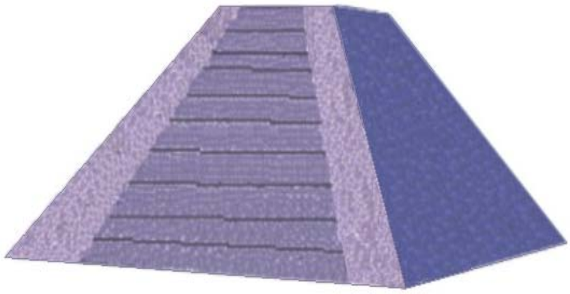
$$P(x) = \frac{533}{90000} x^3 - \frac{3229}{6000} x^2 + 21{,}3x$$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Es muss das Integral über die Differenzfunktion $d(x) = \left\| f(x) - p(x) \right\|$ bestimmt werden und durch die jeweiligen Intervalllängen geteilt werden. Da die Schnittpunkte bekannt sind, kann zunächst das Integral über die Differenzfunktion ohne Betragsstriche gebildet werden und das Vorzeichen beim Übergang in die Deutung des Ergebnisses sofern nötig korrigiert werden. $\int_0^{30} \left(\left(15 \cdot e^{\frac{x}{30}-1} + 15 \cdot e^{1-\frac{x}{30}} - 25 \right) - \left(\frac{533}{30000} x^2 - \frac{3229}{3000} x + 21{,}3 \right) \right) dx =$ $\left[\left(450 \cdot e^{\frac{x}{30}-1} - 450 \cdot e^{1-\frac{x}{30}} - 25 \cdot x \right) - \left(\frac{533}{90000} x^3 - \frac{3229}{6000} x^2 + 21{,}3x \right) \right]_0^{30} \approx -6{,}87$ Der durchschnittliche Abstand zwischen den Funktionsgraphen beträgt $\frac{6{,}87}{30} \approx 0{,}23$, also etwa **23 cm**. $\left[\left(450 \cdot e^{\frac{x}{30}-1} - 450 \cdot e^{1-\frac{x}{30}} - 25 \cdot x \right) - \left(\frac{533}{90000} x^3 - \frac{3229}{6000} x^2 + 21{,}3x \right) \right]_{30}^{50} \approx 0{,}1315$. Der durchschnittliche Abstand zwischen den Funktionsgraphen beträgt in diesem Intervall $\frac{0{,}1315}{20} = 0{,}006575$, also etwa **0,7 cm**. *Alternative: Berechnung der Durchschnittshöhen einzeln (insgesamt vier Integrale) und danach die Differenzen bestimmen.*		15	10
g)	Offensichtlich stimmen Parabel und Kettenlinie im Intervall [30;50] fast exakt überein, die durchschnittliche Abweichung ist kleiner als eine realistische Dicke des Stahlseils. Hier hat der Assistent also Recht. Die durchschnittliche Abweichung von 23 cm im Intervall [0;30] kann unterschiedlich beurteilt werden. Nimmt man große Toleranzen bei der Montage an, könnten die 23 cm Abweichung noch innerhalb dieser Toleranz liegen. Benötigt man dagegen genauere Daten, z.B. für zusätzliche in der Nähe liegende Installationen, könnte diese Abweichung als (zu) groß angesehen werden. Verschiedene sinnvolle Argumentationen der Prüflinge können hier als richtig bewertet werden.			10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

LA / AG 1

II.1 Ausstellungshalle

In der Stadt „Future-City“ soll eine neue Ausstellungshalle gebaut werden. Ein Architektenbüro wird mit einem Entwurf beauftragt. Als Vorbild dient ein historisches Bauwerk, das die Form eines Pyramidenstumpfes besitzt (siehe Abbildung).



Das Bauwerk ist etwa 40 m hoch.

Eine breite Außentreppe führt vorn auf das Dach des Bauwerks.

Das Architektenbüro fertigt einen ersten Entwurf an:

In einem kartesischen Koordinatensystem lässt sich die Grundfläche der Halle durch folgende Eckpunkte beschreiben: $A_1(0|0|0)$; $B_1(180|0|0)$; $C_1(160|240|0)$; $D_1(40|240|0)$. Die Dachfläche wird durch die Eckpunkte $A_2(60|60|40)$; $B_2(140|30|40)$; $C_2(120|210|40)$; $D_2(60|180|40)$ dargestellt.

a) Zeichnen Sie diese Ausstellungshalle in das Koordinatensystem in der Anlage. **(15P)**

b) Begründen Sie, dass die Grundfläche ein Trapez ist.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Grundfläche. **(15P)**

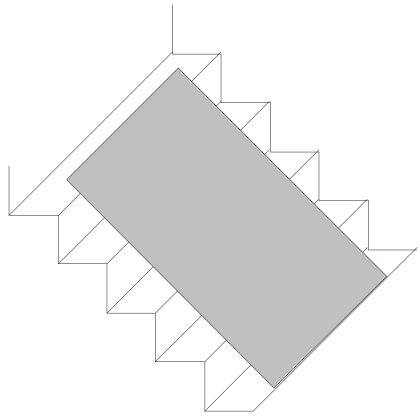
c) Die beiden Strecken $\overline{B_2 A_2}$ und $\overline{C_2 D_2}$ sind Teile von zwei Geraden, die sich in der Spitze eines in der Nähe stehenden Obelisken schneiden. Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden. **(20P)**

d) Von der Spitze des Obelisken werden abends zwei Laserstrahlen auf die Ausstellungshalle gerichtet. Die Strahlen verlaufen in Richtung der Gebäudekanten $\overline{B_2 A_2}$ und $\overline{C_2 D_2}$.

Berechnen Sie den Winkel zwischen den Laserstrahlen. **(5P)**

e) Die Mitte der Gebäudekante $\overline{A_1 A_2}$ wird mit dem Punkt $\left(36\tfrac{2}{3} \middle| 36\tfrac{2}{3} \middle| 0\right)$ durch einen Stützpfeiler verbunden. Bestimmen Sie die Länge des Stützpfeilers und weisen Sie nach, dass der Stützpfeiler senkrecht zur Kante $\overline{A_1 A_2}$ ist. **(15P)**

Die Dachfläche wird als Aussichtsplattform genutzt. Zu dieser Aussichtsplattform gelangt man über eine 20 m breite Außentreppe, die an der Kante $\overline{B_2 C_2}$ endet. Für den Sicherheitsaspekt ist die Steilheit der Treppe interessant. Dazu wird die Ebene *E* genutzt, die die Lage (*Neigung*) dieser Treppe beschreibt (siehe Abbildung).



Diese „Treppenebene“ *E* wird beschrieben durch die Gleichung

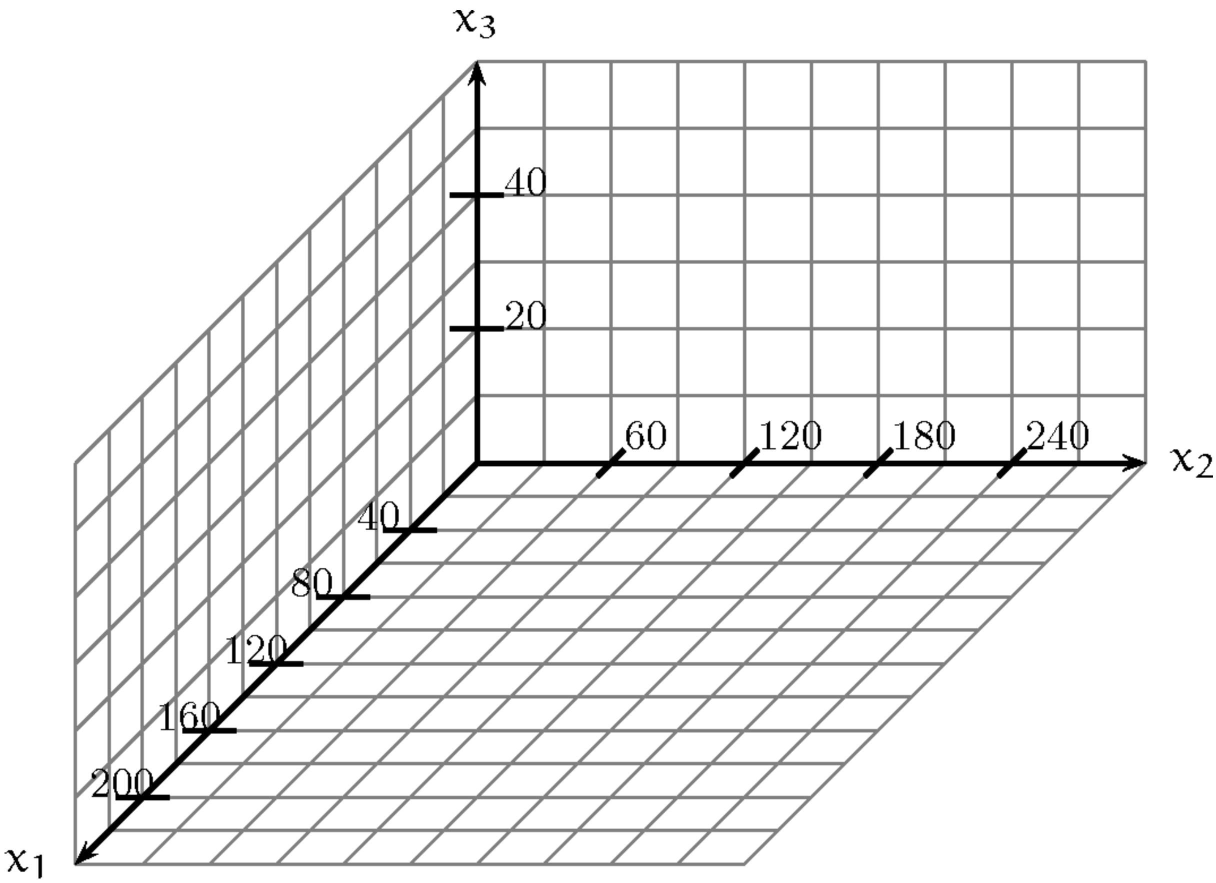
$$18x_1 + 2x_2 + k \cdot x_3 = 3660,$$

wobei *k* eine reelle Zahl ist.

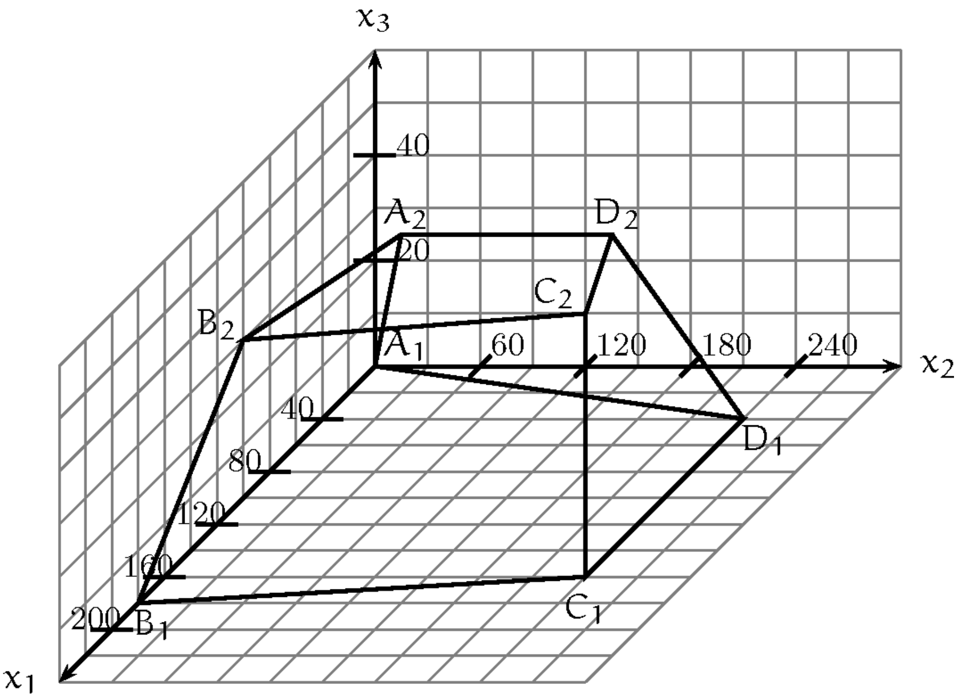
f) Ermitteln Sie *k* so, dass die Kante $\overline{B_2 C_2}$ in der Treppenebene liegt. **(15P)**

g) Beurteilen Sie die Nutzbarkeit der Treppe unter Sicherheitsaspekten. **(15P)**
Information:
Im häuslichen Bereich ist ein Neigungswinkel im Bereich zwischen 25° und 40° üblich.
Für Garten- und Freitreppen ist ein maximaler Neigungswinkel von 28° erlaubt.

Anlage zur Aufgabe „Ausstellungshalle“



Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Zeichnung:

</td><td>15</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Die Strecken $\overline{A_1B_1}$ und $\overline{C_1D_1}$ liegen parallel zueinander.

Begründung: Die zweite und dritte Komponente von A_1 und B_1 sind ebenso identisch wie die zweite und dritte Komponente von C_1 und D_1.

Oder: $\overrightarrow{A_1B_1} = \begin{pmatrix} 180 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{C_1D_1} = \begin{pmatrix} -120 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Also ist das Viereck ein Trapez für dessen Flächeninhalt die Trapezformel gilt:

$A = \dfrac{(\overline{A_1B_1} + \overline{C_1D_1}) \cdot h}{2} = \dfrac{(180 + 120) \cdot 240}{2} = 36\,000$,

Der Flächeninhalt ist also 36 000 m² groß.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>c)</td><td>Ermittlung des Schnittpunkts zweier Geraden mit der jeweiligen Vektorgleichung $\vec{x} = \vec{a} + t\cdot\vec{b}$.

Es ergeben sich die Richtungsvektoren

$\overrightarrow{B_2A_2} = \begin{pmatrix} -80 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{C_2D_2} = \begin{pmatrix} -60 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix}$ und somit

$g_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 140 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -80 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie $g_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 120 \\ 210 \\ 40 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -60 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$.

Der Schnittpunkt ergibt sich durch das Gleichsetzen und die Lösung des entstehenden Gleichungssystems:

$g_1 = g_2$:
ergibt

I) $140 - 80r = 120 - 60s$
II) $30 + 30r = 210 - 30s \Rightarrow r = 6 - s$; einsetzen in I)

$s = \frac{23}{7} \approx 3{,}285$.

Nach Einsetzen in g_1 oder g_2 erhält man: $S \approx \begin{pmatrix} -77{,}1 \\ 111{,}4 \\ 40 \end{pmatrix}$.</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>$\cos(\alpha) = \frac{\left(\overrightarrow{B_2A_2}\right)\cdot\left(\overrightarrow{C_2D_2}\right)}{\left|\overrightarrow{B_2A_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{C_2D_2}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} -80 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -60 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{7300}\cdot\sqrt{4500}} \approx \frac{3900}{5732} \approx 0{,}68 \Rightarrow \alpha \approx 47{,}1°.$</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Die Mitte der Gebäudekante ist im Punkt $M\,(30\,|\,30\,|\,20)$.

Länge des Stützpfeilers: $\sqrt{(36\tfrac{2}{3} - 30)^2 + (36\tfrac{2}{3} - 30)^2 + 20^2} \approx 22{,}1$.

Das Skalarprodukt der Richtungen der Kante und des Pfeilers $\begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ 40 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6\tfrac{2}{3} \\ 6\tfrac{2}{3} \\ -20 \end{pmatrix} = 0$

zeigt, dass die Richtungen senkrecht zueinander sind.</td><td>10</td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
f)	Lösung für die Bestimmung von *k*: Die Kante $\overline{B_2C_2}$ liegt genau dann in der Treppenebene, wenn beide Punkte in dieser Ebene liegen. Mit $B_2 \in E$ gilt: $18 \cdot 140 + 2 \cdot 30 + k \cdot 40 = 3660 \Rightarrow k = 27$. Prüfen mit C_2: $18 \cdot 120 + 2 \cdot 210 + 27 \cdot 40 = 3660$. Also liegt auch C_2 in der Ebene und somit die ganze Kante. Mit $k = 27$ ist die Forderung erfüllt.		10	5
g)	Der Neigungswinkel lässt sich als Winkel zwischen Normalenvektoren der Treppenebene und des Bodens berechnen. Der Normalenvektor der Treppenebene kann aus Aufgabenteil f entnommen werden, der Normalenvektor des Bodens ist klar. $\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix}18\\2\\27\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{18^2+2^2+27^2}} \approx \frac{27}{32{,}5} \approx 0{,}83 \Rightarrow \alpha \approx 33{,}9°.$ Somit hat die Treppe als Freitreppe einen unzulässig großen Neigungswinkel.			15
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

LA / AG 2

II.2 Kastanien-Miniermotte

Die Rosskastanien-Miniermotte (Cameraria ohridella) ist vor gut 20 Jahren entdeckt worden und breitet sich schnell in Europa aus. Dieser Kleinschmetterling ist relativ wenig erforscht. Die in dieser Aufgabe verwendeten Daten über die Entwicklungsstadien beruhen daher teilweise auf Schätzungen.

Die Motten bringen über einen Sommer zwei bis drei, unter günstigen Lebensbedingungen auch vier „Generationen“ hervor.
In dieser Aufgabe wird zur Vereinfachung davon ausgegangen, dass die Motten nur eine „Generation“ im Juni hervorbringen und eine zweite „Generation“ im August. Dabei beschreibt der Begriff „Generation“ einen vollständigen dreischrittigen Entwicklungszyklus von Puppen zu Puppen!

Die ersten Miniermotten eines Sommers entwickeln sich aus Puppen, die den Winter über in welken Kastanienblättern gelebt haben. Anfang Juni gibt es also nur diese „Winter-Puppen“ (WP).

Hier die dreischrittige Entwicklung der Junigeneration:

(1) 50 % der „Winter-Puppen“ (WP) sind lebensfähig und entwickeln sich zu Faltern (F).

(2) Jeder Falter legt Eier, aus denen sich im Durchschnitt 20 Larven (L) entwickeln.
20 % der Larven entwickeln sich zu „Winter-Puppen“ (WP), die in den Ruhezustand fallen und sich so bis zum nächsten Jahr nicht weiter entwickeln.

(3) 40 % der Larven entwickeln sich zu „Sommer-Puppen“ (SP), die sich im Juni bereits zu Faltern entwickeln. Die restlichen Larven sterben.

Zur Beschreibung der drei Entwicklungsschritte der Junigeneration soll dieselbe Übergangsmatrix P nacheinander auf den Populationsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} L \\ SP \\ WP \\ F \end{pmatrix}$ angewandt werden.

Diese Übergangsmatrix hat dabei die allgemeine Form $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix}$.

a) Für die Matrix P stehen folgende Varianten zur Verfügung:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die richtige Matrix P an und beschreiben Sie Ihre Entscheidung im Sachkontext der Aufgabe. **(10P)**

b) In einem Garten gibt es Anfang Juni 100 „Winter-Puppen“. Berechnen Sie die Anzahlen der „Sommer-Puppen“ und der „Winter-Puppen“, die sich im Laufe des Juni in den drei Schritten daraus entwickeln. **(10P)**
Kontrollergebnis: Es gibt 400 Sommer-Puppen und 200 Winter-Puppen.

c) Die Berechnung der Puppenanzahlen in b) lässt sich in einem Schritt mit Hilfe der Matrix P^3 durchführen.
Bestimmen Sie diese Matrix und zeigen Sie, dass die einfache Anwendung von P^3 auf den Bestand von 100 Winter-Puppen zum gleichen Ergebnis wie in b) führt. **(15P)**

Die leicht veränderte, ebenfalls dreischrittige Entwicklungsphase der Augustgeneration eines Sommers wird durch dreimalige Anwendung der folgenden Matrix *Q* dargestellt:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Beschreiben Sie die Bedeutung der von Null verschiedenen Einträge der Matrix Q. **(10P)**

e) Bestimmen Sie aus dem Ergebnis von b) die Anzahl der „Winter-Puppen“ Ende August. **(10P)**

Die Berechnung der Entwicklung im August lässt sich auch wieder in <u>einem</u> einzigen Schritt mithilfe der folgenden Matrix durchführen:

$$Q^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 6,3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

f) Bestimmen Sie die Matrix *R*, die die Entwicklung im Juni und August in einem Schritt zusammenfasst, so dass man direkt aus der Anzahl der „Winter-Puppen“ Anfang Juni die Anzahl der „Winter-Puppen“ Ende August berechnen kann. Bestätigen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie mit dieser Matrix *R* das Ergebnis aus e) erneut berechnen. **(15P)**

g) Zur Bekämpfung der Miniermotten wird seit einigen Jahren in der Presse dazu aufgerufen, das Laub der Kastanien zu verbrennen, weil darin die Puppen überwintern und die Puppen von der Verrottung des Laubs nicht betroffen sind. Solche Aktionen bewirkten eine drastische Reduktion der überwinterten Puppen und damit des Befalls der Kastanienbäume. Berechnen Sie, wie viel Prozent des Winterlaubs verbrannt werden müsste, damit sich – nach dem hier entwickelten Modell – die Miniermotten nicht von Jahr zu Jahr weiter ausbreiten. **(10P)**

h) Ein Unternehmen der chemischen Industrie hat ein neues Mittel speziell gegen die Falter entwickelt. Ermitteln Sie einen Rechenweg, mit dem man bestimmen könnte, wie viel Prozent der Falter getötet werden müssten, bevor sie Eier legen, damit sich – nach dem hier entwickelten Modell – die Miniermotten nicht von Jahr zu Jahr weiter ausbreiten. **(20P)**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$. $\text{Larven}_{\text{neu}} = 20 \cdot \text{Falter}_{\text{alt}}$. Jeder Falter legt Eier, aus denen sich im Durchschnitt 20 Larven entwickeln. $SP_{\text{neu}} = 0{,}4 \cdot L_{\text{alt}}$: 40 % der Larven werden zu SP. $WP_{\text{neu}} = 0{,}2 \cdot L_{\text{alt}}$: 20 % der Larven werden zu WP. $F_{\text{neu}} = 0{,}5 \cdot WP_{\text{alt}}$: 50 % der Winter-Puppen werden zu F.	10		
b)	Es ist $\vec{v}_1 = P \cdot \vec{v}_0$ die erste Entwicklungsphase der Junigeneration. Die zweite Entwicklungsphase ist $\vec{v}_2 = P \cdot \vec{v}_1$ und somit die dritte Entwicklungsphase der Junigeneration $\vec{v}_3 = P \cdot \vec{v}_2$. Es ergibt sich: $\vec{v}_1 = P \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_2 = P \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_3 = P \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 400 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix}$ Somit gibt es $400 + 200 = 600$ Puppen.	10		

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
c)	Es ist $P^3 = P \cdot P^2$ $= P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Man rechnet weiter $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 400 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix}$ und erhält das gleiche Ergebnis wie in b).		15	
d)	– Die Zahl 15 stellt die Eier dar, die die Falter legen und aus denen sich Larven entwickeln. – Aus $0{,}6 = 60\%$ der Larven entstehen Winter-Puppen. – Aus der Zahl 1 ergibt sich, dass die Winter-Puppen vollständig in ihrem Zustand verbleiben. – Aus $0{,}7 = 70\%$ der Sommer-Puppen enstehen Falter.		10	
e)	Es ist $\vec{w}_1 = Q \cdot \vec{v}_3$ die erste Entwicklungsstufe der Augustgeneration. Damit ist die zweite Entwicklungsstufe $\vec{w}_2 = Q \cdot \vec{w}_1$ und die dritte Entwicklungsstufe der Augustgeneration $\vec{w}_3 = Q \cdot \vec{w}_2$. Die Rechnungen hierzu: $\vec{w}_1 = Q \cdot \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 400 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \\ 280 \end{pmatrix}$			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	$\vec{w}_2 = Q \cdot \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \\ 280 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4200 \\ 0 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{w}_3 = Q \cdot \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4200 \\ 0 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2720 \\ 0 \end{pmatrix}$ Am Ende vom August gibt es 2720 Winter-Puppen.	10		
f)	Es wird der Anfangsvektor mit der Matrix *P* multipliziert und dann jeweils das Ergebnis nacheinander zweimal mit *P* und dann dreimal mit *Q* multipliziert: $w_3 = Q \cdot \left(Q \cdot \left(Q \cdot \left(P \cdot \left(P \cdot \left(P \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \right) \right) \right) = Q \cdot \left(Q \cdot \left(Q \cdot v_3 \right) \right)$ Es gilt das Assoziativgesetz der Matrizenmultiplikation: $w_3 = \left(Q^3 \cdot P^3 \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(Q^3 \right) \cdot v_3 .$ Deshalb muss man die Matrix $R = Q^3 \cdot P^3$ bestimmen, um direkt die Entwicklung im Juni und August zu ermitteln. Es ist $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 6,3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,2 & 0 & 27,2 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Somit kann man $\vec{w}_3$ direkt berechnen: $\vec{w}_3 = R \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,2 & 0 & 27,2 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2720 \\ 0 \end{pmatrix}$ Es bestätigt sich damit das Ergebnis aus e).		15	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
g)	Man kann neu rechnen oder aber auch direkt argumentieren, dass jede Anfangsanzahl an Winter-Puppen sich nach Ablauf der beiden Monate Juni und August mit dem Faktor 27,2 vermehrt hat. Um den Kehrwert dieses Faktors muss also die Verbrennaktion die Winter-Puppen vermindern, also mit dem Faktor $\frac{1}{27{,}2} \approx 0{,}037$, das bedeutet eine Verminderung um 96,3 %. Wenn man unterstellt, dass die Winter-Puppen sich homogen im Laub verteilen, müssten also ca. 96,3 % des Herbstlaubs verbrannt werden, *um die Zahl der Winter-Larven wenigstens konstant (bei ca. 100) zu halten.* *Eine Verbrennung von 97 % vermindert die Zahl der Winterlarven auf (gerundet) 80. Auch diese Antwort kann man gelten lassen.*		10	
h)	Es sei *f* der – durch Tötung der Jungfalter – verursachte Verminderungsfaktor, den man als variabel betrachten kann. Dann kann man sich vorstellen, dass jeweils die Anzahl der entstehenden Falter um den Faktor *f* reduziert wird. Für die Entstehung der Falter sind die beiden Faktoren 0,5 in *P* bzw. 0,7 in Q „verantwortlich“ ,diese müssen also durch $f \cdot 0{,}5$ bzw. $f \cdot 0{,}7$ ersetzt werden. Jetzt kann man die Rechnung z.B. von f) unter Mitführung der Variablen *f* durchführen und dann *f* so bestimmen, dass der Wert in der dritten Zeile und dritten Spalte in der Gesamtmatrix $Q_f{}^3 \cdot P_f{}^3$ Eins wird. Dazu muss die entsprechende Gleichung gelöst werden. $(1-f)\cdot 100$ ist dann der gesuchte Mindestprozentsatz.			20
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

STOCHASTIK 1

III.1 Sportschuhe

Eine Firma stellt Sportschuhe an zwei verschiedenen Standorten D und F her.

Die Schuhe werden paarweise in vier Arbeitsgängen gefertigt, die unabhängig voneinander sind.

In den Arbeitsgängen wird erfahrungsgemäß für ein Paar Sportschuhe die erforderliche Qualität mit folgenden Wahrscheinlichkeiten erreicht.

	Arbeitsgang 1	Arbeitsgang 2	Arbeitsgang 3	Arbeitsgang 4
	Zuschnitte	Sohlen pressen	Oberschuhe nähen	Zusammensetzen
Standort D	96,5 %	98 %	97 %	98 %
Standort F	94 %	93,5 %	83 %	96,5 %

a) Bestätigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit p_F, dass ein Paar Schuhe nicht dem Qualitätsstandard entspricht, für den Standort F mit $p_F \approx 0{,}30$ etwa dreimal so hoch ist wie für den Standort D. **(15P)**

Rechnen Sie deshalb mit $p_F = 0{,}3$ für den Anteil an produzierten Schuhen unzureichender Qualität am Standort F und mit $p_D = 0{,}1$ für den Anteil an produzierten Schuhen unzureichender Qualität am Standort D.

Für Qualitätssicherungsmaßnahmen sollen aus den Lieferungen fertiger Schuhe Stichproben entnommen werden. Nehmen Sie an, dass die Anzahl der Schuhe mit dem geforderten Qualitätsstandard jeweils binomialverteilte Zufallsgrößen sind.

Zunächst sollen die Lieferungen aus dem Standort F überprüft werden. Dazu werden einer Lieferung 50 Paare zufällig entnommen.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- genau 15 dieser Paare nicht dem Qualitätsstandard entsprechen,
- mindestens 12 dieser Paare nicht dem Qualitätsstandard entsprechen. **(15P)**

Vor der Auslieferung an den Handel werden im Zentrallager die Schuhe aus beiden Standorten D und F durchmischt und zu Lieferungen zusammengestellt. In jeder Lieferung sind 65 % der Schuhe aus dem Standort F, der andere Teil aus dem Standort D.
Es wird beschlossen, für alle Lieferungen eine Qualitätskontrolle durchzuführen. Dabei werden Schuhe mit unzureichender Qualität mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % entdeckt; diese entdeckten Paare werden aussortiert und vernichtet. Die Qualitätskontrolle ist so gut, dass keine fehlerfreien Paare aussortiert werden.

c) Bestätigen Sie, dass bei der Qualitätskontrolle ca. 20 % der insgesamt produzierten Paare aussortiert und vernichtet werden. **(15P)**

d) Ein Kunde kauft ein Paar Sportschuhe aus einer kontrollierten Lieferung.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Paar fehlerhaft ist.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Paar im Standort D gefertigt wurde. **(20P)**

Die Löhne sind im Standort F erheblich niedriger als im Standort D. Unter anderem deshalb sind die Kosten für die Produktion eines (noch nicht kontrollierten) Schuhpaares im Standort F mit 5 € nur halb so groß wie im Standort D (einschließlich der Transportkosten bis zum Zentrallager).
Da die aussortierten fehlerhaften Schuhe nicht verkauft werden können, erhöhen sich entsprechend die Kosten pro Paar, das in den Verkauf geht.

e) Bestätigen Sie, dass die Kosten für ein Paar Schuhe aus der Produktion des Standortes F, welches die Kontrolle erfolgreich passiert hat, sich auf einen Wert erhöhen, der mit folgendem Term berechnet werden kann:

$$K_F = \frac{5}{(1 - p_F \cdot 0{,}9)} \qquad (1)$$ **(10P)**

Entsprechend gilt für Schuhe aus der Produktion des Standortes D:

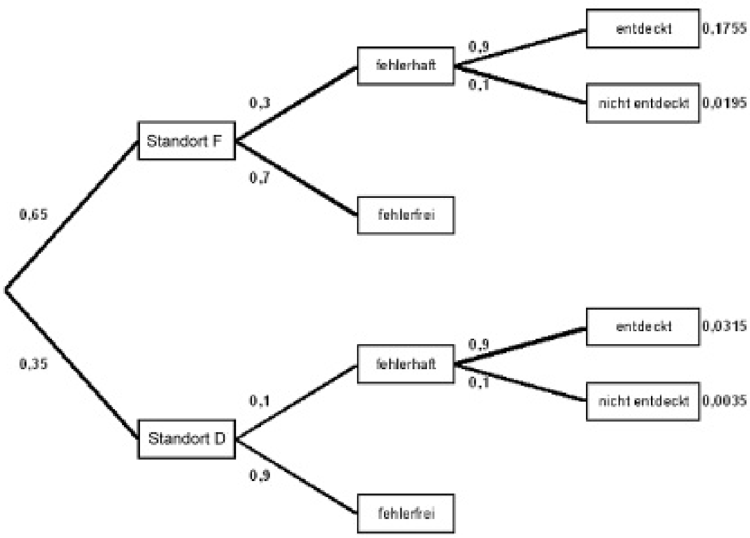
$$K_D = \frac{10}{(1 - p_D \cdot 0{,}9)} \qquad (2)$$

Hinweis: Diese Gleichung (2) können Sie als bereits bestätigt ansehen.

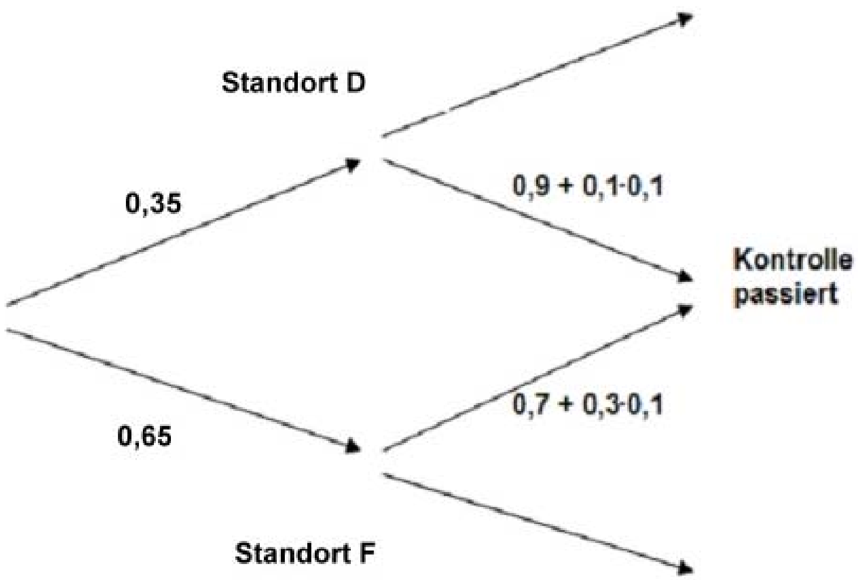
f) Beurteilen Sie, ob sich unter diesen Bedingungen die Produktion im Standort F ökonomisch lohnt.
Bestimmen Sie den Wert der Ausschusswahrscheinlichkeit p_F, mit dem die Kosten eines zum Verkauf bereiten Schuhpaares für beide Produktionsstandorte (bei fester Ausschusswahrscheinlichkeit von $p_D = 0{,}1$) gleich sind. **(15P)**

g) Trotz aller Qualitätskontrollen gelangen auch fehlerhafte Schuhe in den Verkauf. Solche Schuhe werden in der Regel für den Kunden kostenlos umgetauscht. Beurteilen Sie, ob die beiden Kostenterme (1) und (2) aus der Sicht der Herstellerfirma wirklich sinnvoll sind.
Bestimmen Sie einen Weg, wie diese Kosten kalkuliert werden könnten.
Eine Rechnung wird nicht erwartet. **(10P)**

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>$p_F = 1 - 0,94 \cdot 0,935 \cdot 0,83 \cdot 0,965 \approx 0,296 = 29,6\%$.
$p_D = 1 - 0,965 \cdot 0,98 \cdot 0,97 \cdot 0,98 \approx 0,101 = 10,1\%$.
Also ist die Wahrscheinlichkeit p_F etwa dreimal so hoch wie p_D.</td><td>10</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>• X sei 50-0,3-binomialverteilt.
$P(X = 15) = \binom{50}{15} \cdot 0,3^{15} \cdot 0,7^{35} = 0,12235 \approx 12\,\%$.
• Das Ergebnis kann aus der Formelsammlung abgelesen werden.
$P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11) \approx 1 - 0,1390 = 0,8610 \approx 86\,\%$.</td><td>15</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

P(„Schuhpaar wird aussortiert“) = $0,1755 + 0,0315 = 0,207 \approx 21\%$.
Man kann natürlich auch direkt ohne Baumdiagramm rechnen:
P(„Schuhpaar wird aussortiert“) =
$(0,65 \cdot p_F + 0,35 \cdot p_D) \cdot 0,9 = (0,65 \cdot 0,3 + 0,35 \cdot 0,1) \cdot 0,9 \approx 0,2$.
20 % der Lieferung werden also aussortiert.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
d)	• Es sei *A* das Ereignis, dass von den produzierten Schuhen ein herausgegriffenes Paar Ausschussware ist. Es sei *K* das Ereignis, dass von den produzierten Schuhen ein herausgegriffenes Paar die Kontrolle passiert. Gesucht $P(A\mid K)$. $P(A\mid K)=\dfrac{P(A)\cdot P(K\mid A)}{P(K)}$ $P(A)=0{,}65\cdot 0.3+0{,}35\cdot 0{,}1=0{,}23$ $P(K\mid A)=1-0{,}9=0{,}1$ (0,9 im Aufgabentext vorgegeben) Aus c) folgt $P(K)\approx 0{,}8$ oder genauer nach dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit: $P(K)=P(A)\cdot P(K\mid A)+P(\overline{A})\cdot P(K\mid \overline{A})=0{,}23\cdot 0{,}1+0{,}77\cdot 1=0{,}793$. Insgesamt erhalten wir: $P(A\mid K)=\dfrac{P(A)\cdot P(K\mid A)}{P(K)}=\dfrac{0{,}23\cdot 0{,}1}{0{,}23\cdot 0{,}1+0{,}77\cdot 1}\approx 0{,}029\approx 3\,\%$. *<u>Bemerkung:</u> Man kann die ganze Rechnung natürlich auch als Anwendung des Satzes von Bayes auffassen.* • Man kommt am einfachsten zu einem Ergebnis, wenn man das Baumdiagramm aus c) zusammenfasst und das Wesentliche betrachtet:  Es sei *D* das Ereignis, dass von den produzierten Schuhen ein herausgegriffenes Paar die Kontrolle passiert. Gesucht wird $P(D\mid K)$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Auf die im Baumdiagramm dargestellte Situation kann man den Satz von Bayes anwenden: $P(D\mid K)=\dfrac{P(D)\cdot P(K\mid D)}{P(D)\cdot P(K\mid D)+P(\overline{D})\cdot P(K\mid \overline{D})}$ $=\dfrac{0{,}35\cdot(0{,}9+0{,}1\cdot 0{,}1)}{0{,}35\cdot(0{,}9+0{,}1\cdot 0{,}1)+0{,}65\cdot(0{,}7+0{,}3\cdot 0{,}1)}$ $\approx 0{,}41\approx 40\,\%$. *<u>Bemerkung:</u> Das Ergebnis ist plausibel. Die 35 % Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Schuhpaar aus dem Standort D stammt, erhöht sich etwas, wenn man weiß, dass das Paar die Kontrolle passiert hat, da die Ausschussquote dieser Schuhe geringer ist als die der Schuhe aus dem Standort F.*		15	5
e)	Wenn *n* Schuhpaare im Standort F produziert werden, entstehen Kosten in Höhe von $n\cdot 5$ €. Von diesen *n* Paaren werden im Mittel $n\cdot p_F\cdot 0{,}9$ nach der Kontrolle aussortiert. Von den *n* Paaren kommen also $n\cdot(1-p_F\cdot 0{,}9)$ in den Handel. Rechnet man die Kosten um auf diese Paare, erhält man „pro Paar im Handel" Kosten von $\dfrac{5\cdot n\text{ €}}{n\cdot(1-p_F\cdot 0{,}9)}=\dfrac{5}{(1-p_F\cdot 0{,}9)}$ €. *Eine logisch schlüssige Argumentation, die weniger formal formuliert wurde, bekommt ebenfalls volle Punktzahl.*		10	
f)	• Setzt man die beiden bekannten Werte für p_F bzw. p_D in die beiden Formeln ein, erhält man: $K_F=\dfrac{5}{(1-p_F\cdot 0{,}9)}\text{ €}=6{,}85\text{ €}$ $K_D=\dfrac{10}{(1-p_D\cdot 0{,}9)}\text{ €}=10{,}99\text{ €}$ Die Produktion von „handelbaren" Sportschuhen ist also im Standort F kostengünstiger. • Der gesuchte Wert ergibt sich durch Gleichsetzen: $\dfrac{5}{1-p_F\cdot 0{,}9}=\dfrac{10}{1-0{,}1\cdot 0{,}9}$ $4{,}55=10-0{,}9\,p_F$ $-5{,}45=-0{,}9\,p_F$ $p_F\approx 0{,}606\approx 60{,}6\%$			15

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
g)	Die Formeln berücksichtigen u. a. nicht die Kosten für die Qualitätskontrolle und das Umtauschverfahren und sind aus diesem Grund zur Kalkulation nur bedingt geeignet. Um die Kalkulation zu verbessern, könnte man folgende Strategie wählen. • Kosten für die Qualitätskontrolle abschätzen bzw. ermitteln lassen (alle Schuhe auspacken, kontrollieren und wieder einpacken kostet viel Geld). • Kosten für den Umtausch abschätzen bzw. ermitteln lassen. • Anteil der Schuhe minderer Qualität im Verkauf bestimmen.		5	5
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

STOCHASTIK 2

III.2 Screening

Für einige Krankheiten, die erst relativ spät zutage treten, gleichwohl aber im Körper vorhanden sind, gibt es Diagnosetests. Wenn diese Tests für eine große Gruppe angewendet werden, spricht man von Screening.

So wird zur Früherkennung einer Hörstörung bei Neugeborenen standardmäßig für alle ein Test angeboten. Fast alle Eltern haben bei einer Studie dieses Angebot für ihre Kinder angenommen. Es waren 100 000 Neugeborene.

Dieser Test hat eine hohe Qualität:

Bei 98,9 % der schwerhörigen Kinder wird die Schwerhörigkeit auch erkannt.
Man sagt auch, die Sensitivität des Testes beträgt 0,989.

Bei 10 % der gesunden Kinder wird fälschlicherweise eine Schwerhörigkeit angezeigt.
Man sagt auch, die Spezifität des Testes beträgt 1 – 0,1, also 0,9.

Die relative Häufigkeit der Erkrankung unter allen Neugeborenen in der untersuchten Gruppe – die Prävalenz – beträgt 0,002.

Fassen Sie in dieser Aufgabe die genannten drei relativen Häufigkeiten (Sensitivität, Spezifität, Prävalenz) als Schätzwerte für Wahrscheinlichkeiten auf.

a) Erstellen Sie für dieses Screening ein Baumdiagramm oder mit den entsprechenden Werten für die 100 000 Neugeborenen eine Vierfeldertafel mit erwarteten Anzahlen. **(10P)**

b) Bestätigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein als schwerhörig getestetes Neugeborenes auch tatsächlich schwerhörig ist, knapp 2 % beträgt. **(10P)**

c) Einige der untersuchten 100 000 Neugeborenen haben eine Hörstörung und werden aber nach der Untersuchung als gesund betrachtet. Berechnen Sie deren erwartete Anzahl. **(10P)**

An Neugeborenen, bei denen das Testergebnis auf eine Hörstörung hinweist, wird ein zweiter andersartiger, aber kostenintensiver Test durchgeführt.
Dabei geht man von der nicht unproblematischen Annahme aus, dass sowohl bei hörgestörten als auch bei gesunden Säuglingen die Testergebnisse der ersten und der zweiten Testung stochastisch unabhängig voneinander sind.
Erst wenn beide Testergebnisse auf eine Hörstörung hinweisen, wird der Gesamttest als deutlicher Hinweis auf eine Hörstörung gewertet.

Für den zweiten Test gilt:
Die Sensitivität ist 0,99 und die Spezifität ist 0,985.

d) Ein Neugeborenes, bei dem beide Tests auf Schwerhörigkeit hinweisen, ist mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 57 % auch wirklich schwerhörig. Bestätigen Sie diesen Wert. **(20P)**

e) Bestimmen Sie die erwartete Anzahl der Säuglinge, bei denen beide Tests auf Schwerhörigkeit hinweisen. **(15P)**

f) Der erste Test kostet 18 € und der zweite 25 € pro Kind.
Bestimmen Sie den Erwartungswert der Kosten für die gesamte Durchführung des Screenings.
Vergleichen Sie diesen Wert mit den Kosten, die für die Behandlung von Schwerhörigkeit entstehen: Nehmen Sie dafür an, dass bei jedem rechtzeitig behandelten Kind die Schwerhörigkeit mit geringen Kosten geheilt oder zumindest deutlich gemindert wird, so dass nach der Therapie durchschnittlich 5000 € pro Jahr und pro Kind für viele Jahre eingespart werden. **(15P)**

g) Beurteilen Sie, ob die erwartete Anzahl der Kinder, die eingehender untersucht werden müssen, von der Reihenfolge der Untersuchungen abhängt, indem Sie auch auf die Sensitivität und Spezifität des Doppeltests eingehen. **(20P)**

Anlage zur Aufgabe „Screening“

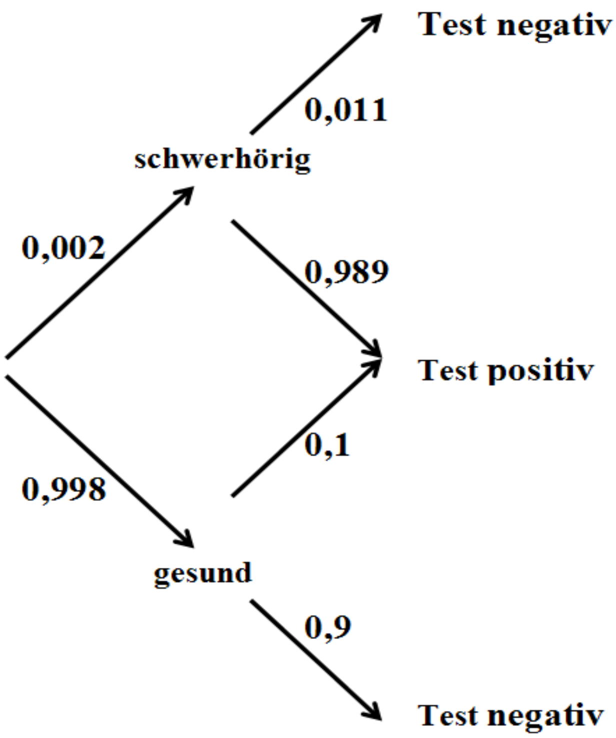
Auf ganze Zahlen gerundete Erwartungswerte der betreffenden Anzahlen bei 100 000 Neugeborenen:

	Kind hat Hörstörung	Kind hat keine Hörstörung	Summen
Test weist auf eine Hörstörung hin			
Test weist auf keine Hörstörung hin			
Summen			100 000

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III

a) Baumdiagramm:



oder

Vierfeldertafel:

	Kind hat Hörstörung	Kind hat keine Hörstörung	Summen
Test weist auf eine Hörstörung hin	198	9 980	10 178
Test weist auf keine Hörstörung hin	2	89 820	89 822
Summen	200	99 800	100 000

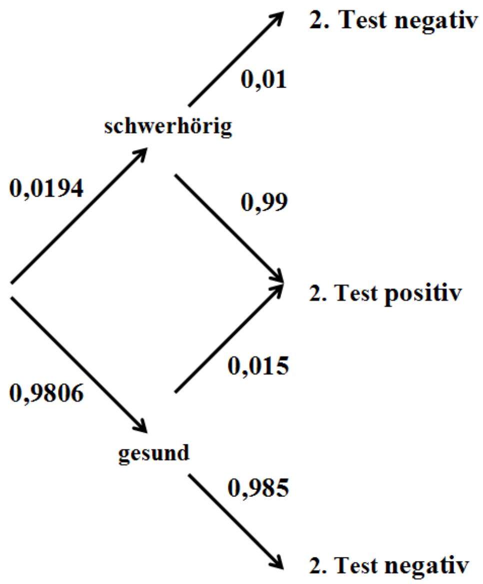
10

b) Mit der Vierfeldertafel lässt sich die gestellte Frage sofort beantworten:

$$p(S/P) = \frac{198}{10178} = 0{,}01945... \approx 2\,\%.$$

Am Baumdiagramm kann man den „umgekehrten Baum“ auswerten:

$$p(S/P) = \frac{0{,}002 \cdot 0{,}989}{0{,}002 \cdot 0{,}989 + 0{,}998 \cdot 0{,}1} = 0{,}019434... \approx 2\,\%.$$

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Hinter dieser Rechnung erkennt man den „Satz von Bayes", den man natürlich auch abstrakt ansetzen kann: $p(S/P) = \dfrac{prävalenz \cdot sensitivität}{prävalenz \cdot sensitivität + (1 - prävalenz) \cdot (1 - spezifität)}$ $= 0{,}019434... \approx 2\,\%$. Man erhält also das unbefriedigende Ergebnis, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind, dessen Testergebnis auf Schwerhörigkeit hinweist, auch tatsächlich schwerhörig ist, nur 2 % beträgt.	10		
c)	Aus der Vierfeldertafel sieht man direkt, dass der gesuchte Erwartungswert 2 ist. Beim Baumdiagramm muss noch 0,00002 mit 100 000 multipliziert werden, um dieses Ergebnis zu erhalten.	10		
d)	Bei der Doppeltestung werden alle Kinder, bei denen das Ergebnis der ersten Testung positiv war zum zweiten Mal getestet. Man kann deshalb die in b) berechnete Wahrscheinlichkeit 0,0194 als „revidierte bzw. Aposteriori-Prävalenz" vor Beginn der zweiten Testung auffassen und ein zweites Mal mit den veränderten Daten genau so rechnen wie bei b). Hier werden auch wieder beide Methoden (Vierfeldertafel, Baumdiagramm) ausgeführt, wobei von den Schülern natürlich nur eine erwartet wird: <u>Baumdiagramm:</u>  Am Baumdiagramm kann man wieder den „umgekehrten Baum" auswerten: $p(S/P) = \dfrac{0{,}0194 \cdot 0{,}99}{0{,}0194 \cdot 0{,}99 + 0{,}9806 \cdot 0{,}015} \approx 0{,}5663 \approx 57\,\%$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III

Vierfeldertafel:

Als Gesamtpopulation setzen wir aus der ersten Vierfeldertafel die erwarteten 10 178 positiv getesteten Säuglinge in die neue Vierfeldertafel ein.
(Man erhält diese erwarteten Anzahlen also aus der insgesamt getesteten Population von 100 000 Kindern. Man könnte zur Lösung der Aufgabenstellung hier auch einen willkürlichen Wert nehmen, z.B. wieder 100 000 oder auch nur 100 um Prozentwerte zu bekommen.)

	Kind hat Hörstörung	Kind hat keine Hörstörung	Summen
2. Test weist auf eine Hörstörung hin	195	150	345
2. Test weist auf keine Hörstörung hin	2	9 831	9 833
Summen	197	9 981	10 178

Die Auswertung der Tabelle ergibt:

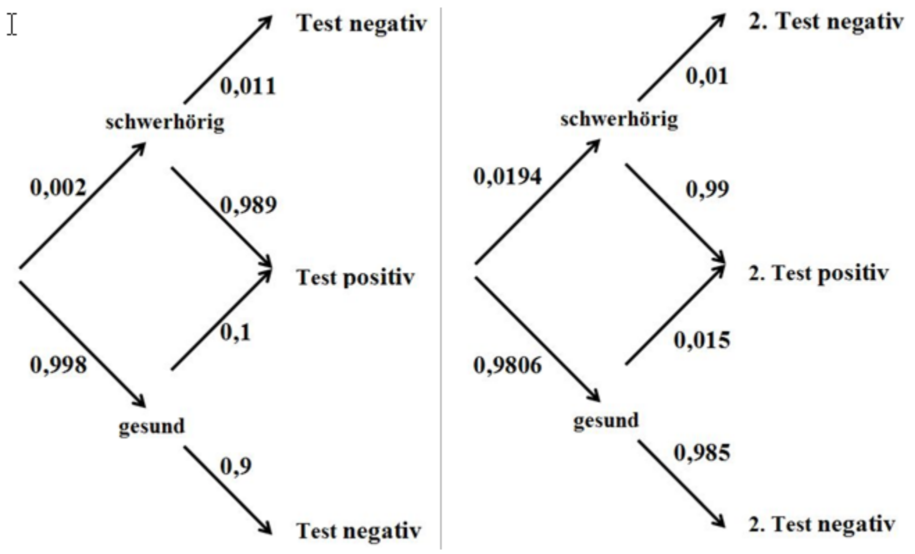
$$p(S/P) = \frac{195}{345} = 0{,}5652... \approx 57\,\%\,.$$

Ein weiterer möglicher Lösungsweg kann auch mit Hilfe von g) begangen werden.

20 (II)

e) Die zweite Vierfeldertafel ergibt direkt: Die erwartete Anzahl der Säuglinge, bei denen beide Tests auf Schwerhörigkeit hinweisen, beträgt 345.

Man kann auch die beiden Baumdiagramme nebeneinander legen und als ein einziges Baumdiagramm auffassen:



	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Dann erhält man: $P\left(\textit{beide Tests positiv}\right)$ $=\left(0{,}002\cdot 0{,}989+0{,}998\cdot 0{,}1\right)\cdot\left(0{,}0194\cdot 0{,}99+0{,}9806\cdot 0{,}015\right)$ $=0{,}00345180087$ $\approx 0{,}345\,\%$. Bei 100 000 Kindern erhält man so auch die Anzahl 345.		15	
f)	Man erhält direkt aus der ersten Vierfeldertafel die (schon in d) betrachtete erwartete Anzahl von 10 178 Personen, die auch dem zweiten Test unterzogen werden. Man kann auch das erste Baumdiagramm verwenden und rechnen: $(0{,}002\cdot 0{,}989+0{,}998\cdot 0{,}1)\cdot 100000\approx 10178$. Die erwarteten Testkosten lassen sich dann wie folgt berechnen: $100000\cdot 18+10178\cdot 25=2\,054\,450$. Der Erwartungswert für die Gesamtkosten beträgt also ca. 2 Millionen Euro. Von den erwarteten rund 350 weiter untersuchten Kindern sind nach d) rund 60 %, also gut 200, wirklich hörgestört. Bei 200 frühzeitig entdeckten schwerhörigen Kindern und 5 000 € Behandlungskosten pro Jahr ergeben sich langfristige (weit länger als zwei Jahre) Einsparungen von rund eine Million € pro Jahr, also lohnt sich das Screening auch finanziell.		10	5
g)	Es muss ein Kind zweimal ein positives Untersuchungsergebnis erhalten, um insgesamt positiv getestet zu werden. Wegen der angenommenen Unabhängigkeit ergibt sich die Sensitivität des Doppeltests aus dem Produkt der Sensitivitäten der Einzeltests. Damit ergibt sich ebenso die Spezifität des Doppeltests als Gegenwahrscheinlichkeit zum Produkt der Gegenwahrscheinlichkeiten der Spezifitäten der Einzeltests, also: $\textit{Sensitivität}=0{,}98\cdot 0.99=0{,}97911$ $\textit{Spezifität}=(1-(0{,}1\cdot 0{,}015))=0{,}9985$. Diese Ergebnisse sind in Bezug auf die beiden Einzeltests kommutativ, also spielt die Reihenfolge der Testungen für die erwartete Anzahl der Kinder, die eingehender untersucht werden müssen, keine Rolle. *Bemerkung: Mit diesen Daten hätte man auch ab d) einfacher rechnen und argumentieren können.*			20
	Insgesamt 100 BWE	30	45	25