ANALYSIS 1

I.1 Kaffeerösterei

Die Gesamtkosten einer Kaffeerösterei hängen von der produzierten Kaffeemenge x ab und werden durch die Gesamtkostenfunktion K beschrieben.
Die Entwicklung der Gesamtkosten $K(x)$ ist im Anhang grafisch dargestellt.

a) Nehmen Sie an, dass die Kostenfunktion K eine ganzrationale Funktion ist. Geben Sie anhand der Grafik an, warum die Kostenfunktion K mindestens vom Grad 3 sein muss.

Die Funktion K mit $K(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}55x^2 + 11{,}58x + 25$ beschreibt die dargestellte Kostenentwicklung in guter Näherung.

b) Berechnen Sie den Wendepunkt von K.
Begründen Sie, warum in der Nähe der Wendestelle eine Produktionserhöhung sinnvoll ist.

Der Erlös ergibt sich aus dem Produkt „Menge mal Preis" und wird mit E bezeichnet. Der Gewinn G wird in Abhängigkeit von der abgesetzten Menge x betrachtet und lässt sich als Differenz von Erlös und Kosten berechnen, also $G(x) = E(x) - K(x)$.

c) Das Unternehmen legt einen Preis von 10 Geldeinheiten (GE) pro Mengeneinheit (ME) fest.

Geben Sie die Funktionsgleichung der entsprechenden Erlösfunktion E an.

Zeigen Sie, dass für die Gleichung der Gewinnfunktion G gilt:
$G(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}55x^2 - 1{,}58x - 25$.

Untersuchen Sie, bei welcher Produktionsmenge maximaler Gewinn erwirtschaftet wird.

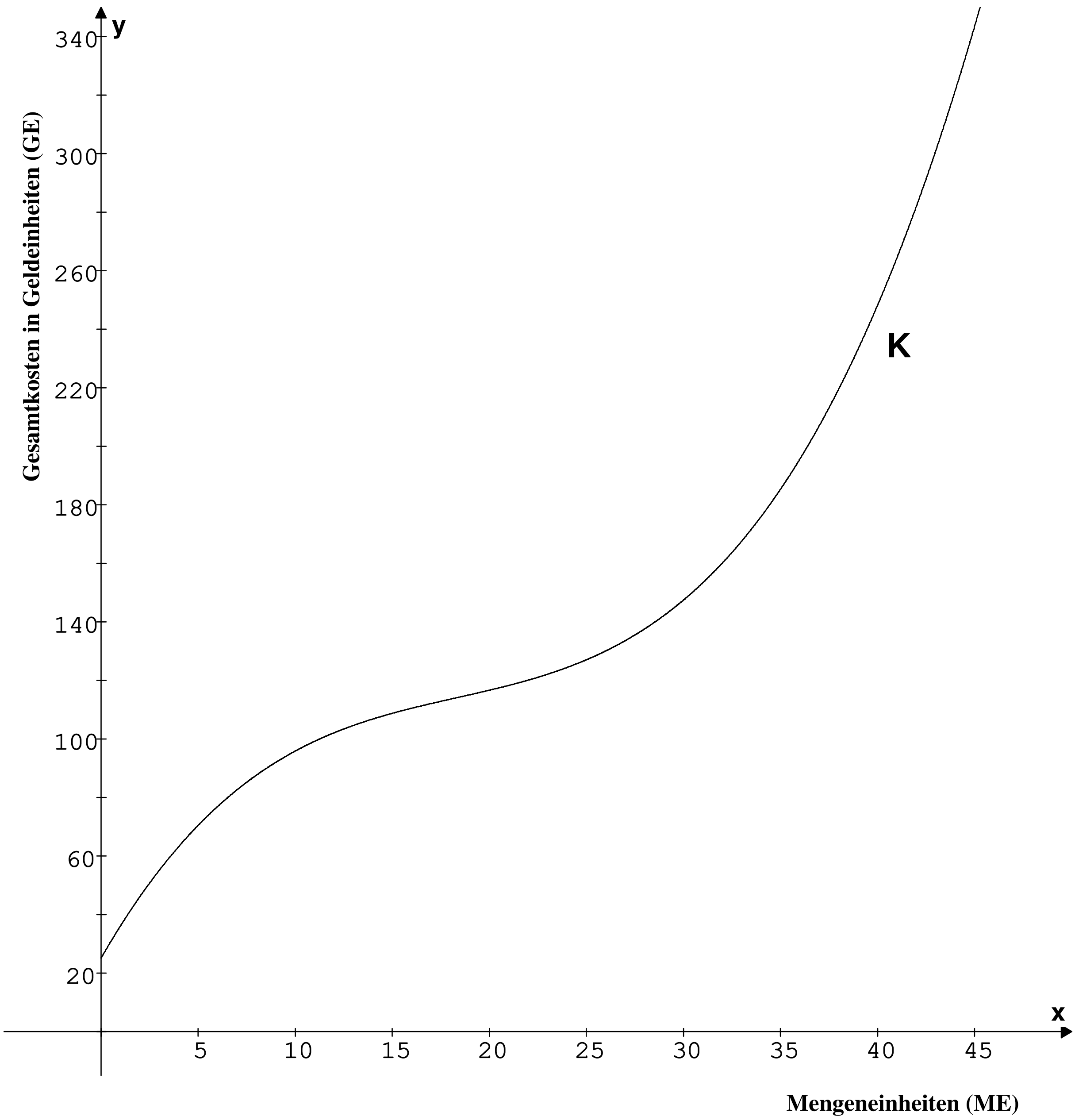
d) Betrachtet wird nun die so genannte Stückkostenfunktion S (Gesamtkosten pro Mengeneinheit) mit $S(x) = \frac{K(x)}{x}$. Begründen Sie, dass minimale Stückkosten in guter Näherung bei einer Absatzmenge von 29 ME erreicht werden.

e) Die Geschäftsführung will den Preis senken und damit ein „Schnupperangebot" auf den Markt bringen.

Weisen Sie nach, dass bei einem Preis von z. B. 4 GE der beim Verkauf erzielte Erlös stets kleiner als die zugehörigen Gesamtkosten ist und damit nur noch mit Verlust produziert werden kann.

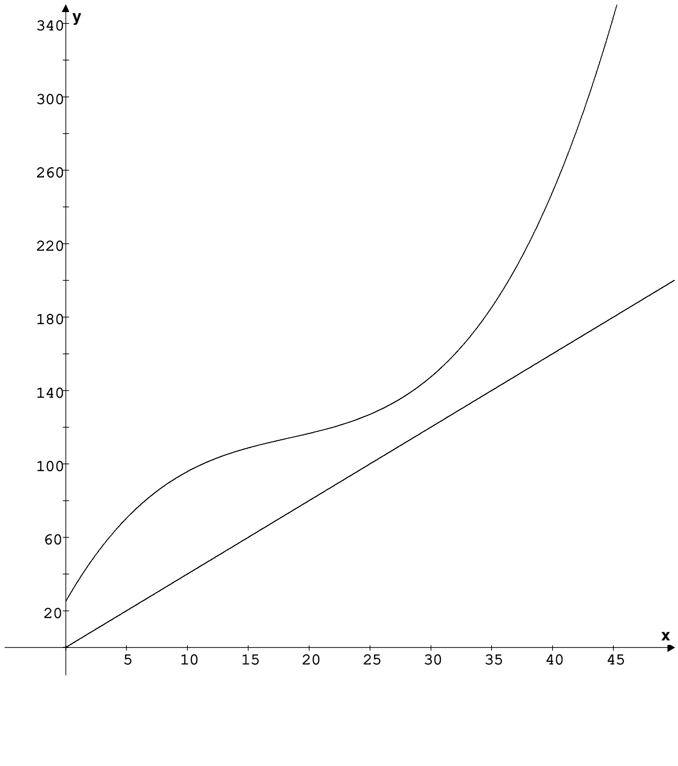
Bis zu welchem Mindestwert kann der Preis gesenkt werden, ohne dass mit Verlust produziert werden muss? Bestimmen Sie – z.B. mit Hilfe der Grafik – diesen minimalen Preis und die zugehörige Produktionsmenge.

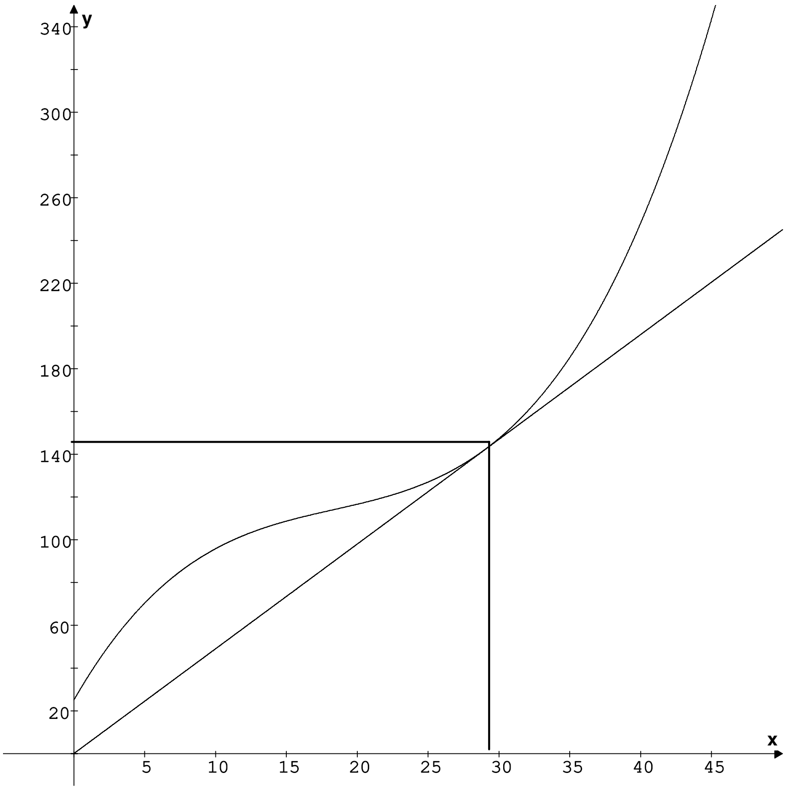
Anlage zur Aufgabe „Kaffeerösterei“:



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Der Graph der Kostenfunktion hat einen Wendepunkt; dies ist weder bei einer linearen noch bei einer quadratischen Funktion der Fall.	10		
b)	$K'(x) = 0{,}03x^2 - 1{,}1x + 11{,}58$, $K''(x) = 0{,}06x - 1{,}1$. Die notwendige Bedingung $K''(x) = 0$ ergibt: $0{,}06x - 1{,}1 = 0$ $0{,}06x = 1{,}1$ $x = 18\frac{1}{3} \approx 18{,}33$. Da $K'''(x) = 0{,}06$ konstant ungleich 0 ist, gilt: K hat an der Stelle $x = 18\frac{1}{3}$ eine Wendestelle. Der Wendepunkt hat die Koordinaten $W(18{,}\overline{3} \mid \approx 114{,}06)$. Eine Produktionserhöhung in der Nähe der Wendestelle ist sinnvoll, da die Kostenzunahme in diesem Bereich relativ klein ist.	5	10	5
c)	$E(x) = 10x$. $G(x) = E(x) - K(x)$ $= 10x - \left(0{,}01x^3 - 0{,}55x^2 + 11{,}58x + 25\right)$ $= -0{,}01x^3 + 0{,}55x^2 - 1{,}58x - 25$. Die Berechnung des Gewinnmaximums erfolgt mithilfe der Nullstellen der ersten Ableitung: $G'\left(x\right) = -0{,}03x^2 + 1{,}1x - 1{,}58$. Für $G'\left(x\right) = 0$ ergibt sich $-0{,}03x^2 + 1{,}1x - 1{,}58 = 0$ $x^2 - \frac{110}{3}x + \frac{158}{3} = 0$ $x_{1,2} = \frac{55}{3} \pm \sqrt{\frac{3025 - 474}{9}}$ $x_1 = \frac{55}{3} + \frac{\sqrt{2551}}{3} \approx 35{,}17$ $x_2 = \frac{55}{3} - \frac{\sqrt{2551}}{3} \approx 1{,}50$ Aus $G''(x) = -0{,}06x + 1{,}1$ folgt: $G(x_1) \approx -1{,}01$ und $G(x_2) \approx 1{,}01.$ Also ist bei einer Produktion von ca. 35,17 ME der Gewinn beim Verkauf maximal.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Hinweis: Die Größe einer Mengeneinheit ist aus der Aufgabenstellung nicht direkt ersichtlich. Deshalb können Schülerinnen und Schüler die entsprechenden Mengeneinheiten durchaus gerundet angeben.	5	20	
d)	$S(x)=\frac{K(x)}{x}=\frac{0{,}01x^3-0{,}55x^2+11{,}58x+25}{x}=0{,}01x^2-0{,}55x+11{,}58+\frac{25}{x}$, $S'(x)=0{,}02x-0{,}55-\frac{25}{x^2}$. Einsetzen von x = 29 in die Gleichung der Ableitungsfunktion zeigt, dass der Funktionswert nahezu Null ist: $S'(29)=0{,}02\cdot 29-0{,}55-\frac{25}{841}\approx 0{,}00027$. Berechnet man entsprechende Werte für x = 30 oder x = 28, so stellt man fest, dass $S'(30)\approx 0{,}02$ und $S'(28)\approx -0{,}02$. Bei $x\approx 29$ liegt also ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung vor. Insgesamt kann man damit x = 29 als Näherung für die Minimalstelle ansehen.		20	
e)	<u>Nachweis mithilfe des Stückkostenminimums</u> aus Aufgabenteil (d): Das Stückkostenminimum liegt bei $x\approx 29$ und beträgt etwa $S(x)=\frac{K(29)}{29}=\frac{0{,}01\cdot 29^3-0{,}55\cdot 29^2+11{,}58\cdot 29+25}{29}\approx 4{,}9$ Der Preis muss also mindestens 4,9 GE pro ME betragen, wenn er die minimalen Stückkosten decken und eine verlustfreie Produktion garantieren soll. Ein Preis von 4 GE reicht damit nicht aus. <u>Nachweis mithilfe der Grafik:</u> 			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Bei einem Preis von 4 GE hat die Erlösfunktion die Gleichung $E_2(x) = 4x$. Die zugehörige Ursprungsgerade verläuft unterhalb der Kostenkurve und schneidet diese nicht. Also sind die Kosten immer größer als der Erlös; es wird daher nur mit Verlust produziert. <u>Bestimmung des Mindestpreises über das Stückkostenminimum:</u> siehe oben. <u>Grafische Lösung:</u> Zur Bestimmung des Mindestpreises, der noch eine verlustfreie Produktion garantiert, muss man jene Ursprungsgerade suchen, die die Kostenkurve als Tangente berührt.  Die x-Koordinate des Berührpunktes gibt Auskunft über die Produktionsmenge, die Steigung der Geraden gibt Auskunft über den Preis. Durch näherungsweises Ablesen erhält man etwa 29 ME für die Produktionsmenge und Gesamtkosten in Höhe von ca. 145 GE. Berechnung des Preises: $p(29) = \frac{E(29)}{29} = \frac{145}{29} = 5$. Der Preis kann bis auf ca. 5 GE pro ME gesenkt werden, so dass noch verlustfrei produziert werden kann.		10	15
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

ANALYSIS 2

I.2 Beschränktes Wachstum

Gegeben ist die reelle Funktion *f* mit $f(x) = 2 - e^{-x}$.

a) Berechnen Sie die Stelle, an der die Funktion den Wert 1,5 annimmt.
Bestimmen Sie die Nullstelle von *f*.

b) Geben Sie den Funktionswert an der Stelle $x = 0$ an.
Bestimmen Sie die Steigung an der Stelle $x = 0$.
Untersuchen Sie, ob *f* eine Wendestelle hat.

c) Begründen Sie, dass diese Funktion ständig steigt, den Wert $y = 2$ aber nicht übersteigt.

d) Skizzieren Sie den Graphen von *f* für $-1 \le x \le 5$.

e) Bestimmen Sie das Integral $\frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} f(x)dx$.

Funktionen *f* mit $f(x) = a - b \cdot e^{-c \cdot x}$, $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ beschreiben ein stetiges, aber begrenztes Wachstum. Im bisher betrachteten Fall ist $a = 2$, $b = 1$ und $c = 1$.

Ein Beispiel für beschränktes Wachstum ist die Temperaturentwicklung bei der Erwärmung einer Flüssigkeit. Nehmen Sie an, eine Flüssigkeit befindet sich im Kühlschrank. Wird die Flüssigkeit aus dem Kühlschrank genommen, so erwärmt sie sich allmählich auf die Raumtemperatur. Diese Erwärmung lässt sich durch einen Funktionsterm vom obigen Typ beschreiben.

f) Eine spezielle Flüssigkeit hat im Kühlschrank die Temperatur 6°C. Nach der Herausnahme erwärmt sie sich auf die Raumtemperatur von 22°C.
Der Zeitpunkt des Herausnehmens sei $x = 0$ Minuten. 10 Minuten nach dem Herausnehmen hat die Flüssigkeit eine Temperatur von 18,4°C.
Bestimmen Sie den Funktionsterm der Funktion f_E, die diese Erwärmung beschreibt. *Beim Funktionsterm können Sie auf die Einheiten verzichten.*

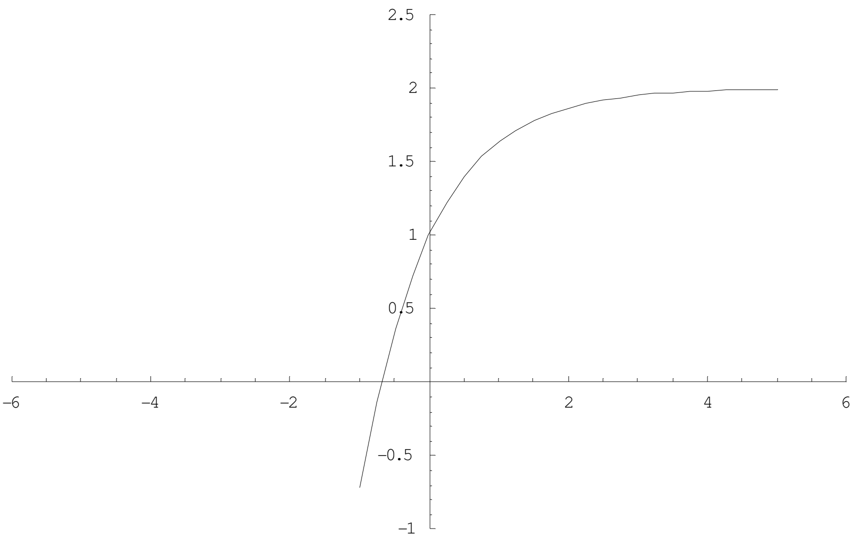
g) Interpretieren Sie f_E' und das Integral $\frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} f_E'(x)dx$ im Sachkontext der Aufgabe.

Bestimmen Sie die Integrale $\frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} f_E'(x)dx$ und $\frac{1}{10} \cdot \int_{10}^{20} f_E'(x)dx$.

Hinweis:
Falls Sie im Aufgabenteil f) keine Lösung gefunden haben, können Sie mit der folgenden – nicht mit der Lösung übereinstimmenden – Funktion f_F mit $f_F(x) = 20 - 10 \cdot e^{-0{,}07 \cdot x}$ *weiterrechnen.*

Das zweite Integral hat einen kleineren Wert als das erste. Begründen Sie dies anhand des prinzipiellen Funktionsverlaufs und im Sachkontext.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	• Stelle, an der die Funktion den Wert 1,5 annimmt: $2-e^{-x}=1{,}5$ $e^{-x}=0{,}5$ $-x=\ln(0{,}5)$ $x\approx 0{,}69315.$ • Nullstelle von *f*: $f(x)=0 \Leftrightarrow e^{-x}=2 \Leftrightarrow x=-\ln(2)\approx -0{,}69315$.	5	10	
b)	Funktionswert an der Stelle $x = 0$: Einsetzen liefert: $f(0)=2-e^0=2-1=1$. Die Ableitungsfunktion hat die Gleichung $f'(x)=e^{-x}$. Gesucht ist $f\,'(0)$; Einsetzen liefert $f\,'(0)=1$. Da $f''(x)=-e^{-x}$, gilt für alle *x*: $f''(x)\neq 0$. Die notwendige Bedingung für eine Wendestelle kann von keinem *x* erfüllt werden, also hat *f* keine Wendestelle.	10	10	
c)	Die Funktion *f* steigt ständig, da $f'(x)>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Der Wert $y = 2$ wird nicht überschritten, da • im Funktionsterm von 2 der Term e^{-x} abgezogen wird <u>und</u> • dieser Term für alle *x* positiv ist, so dass die Differenz – und damit der Funktionswert – für alle *x* kleiner als 2 ist. Da mit wachsendem *x* der Term e^{-x} immer kleiner wird und gegen Null geht, geht der Funktionswert gegen $y = 2$.		10	
d)		10		

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	$\frac{1}{10}\cdot\int_0^{10} f(x)dx = \frac{1}{10}\cdot\int_0^{10} 2-e^{-x}dx$ $=\frac{1}{10}\cdot\left[2x+e^{-x}\right]_0^{10}$ $=\frac{1}{10}\cdot\left(2\cdot 10+e^{-10}-\left(2\cdot 0+e^{-0}\right)\right)$ $=\frac{1}{10}\cdot\left(19+e^{-10}\right)\approx 1,9$.		10	
f)	$f_E(x)=a-b\cdot e^{-c\cdot x}$ $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}^+$. Die obere, nicht überschreitbare Grenze ist die Raumtemperatur von 22°C. Also ist $a = 22$. Die Temperatur beim Herausnehmen ($x = 0$) ist 6°C. Aus $f(0)=6$ folgt: $22-b\cdot e^{-c\cdot 0}=22-b=6$, also $b = 16$. Aus $f(10)=18,4$ folgt $22-16\cdot e^{-10c}=18,4$ $16\cdot e^{-10c}=3,6$ $e^{-10c}=\frac{9}{40}$. Durch Logarithmieren erhält man $-10c=\ln\left(\frac{9}{40}\right)$ bzw. $c=-\frac{1}{10}\cdot\ln\left(\frac{9}{40}\right)=0,1491654...\approx 0,15$. Der Funktionsterm lautet demnach $f_E(x)=22-16\cdot e^{-0,15\cdot x}$.			10
g)	f_E' gibt die momentane Änderungsrate der Temperatur an, $\frac{1}{10}\cdot\int_0^{10} f_E'(x)dx$ gibt die durchschnittliche Temperaturänderung pro Minute während der ersten 10 Minuten des Erwärmvorganges an. $\frac{1}{10}\cdot\int_0^{10} f_E'(x)dx=\frac{1}{10}\cdot\left(f_E(10)-f_E(0)\right)$ $=\frac{1}{10}\cdot\left(22-16\cdot e^{-0,15\cdot 10}-\left(22-16\cdot e^{-0,15\cdot 0}\right)\right)$ $=\frac{1}{10}\cdot\left(16\left(1-e^{-0,15\cdot 10}\right)\right)\approx 1,24$. und			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$\frac{1}{10}\cdot\int_{10}^{20} f_E'(x)dx = \frac{1}{10}\cdot\left(f_E(20)-f_E(10)\right)$ $=\frac{1}{10}\cdot\left(22-16\cdot e^{-0{,}15\cdot 20}-\left(22-16\cdot e^{-0{,}15\cdot 10}\right)\right)$ $=\frac{1}{10}\cdot\left(16\left(e^{-0{,}15\cdot 10}-e^{-0{,}15\cdot 20}\right)\right)\approx 0{,}28$. Die entsprechenden Werte für die Funktion f_F sind: $\frac{1}{10}\cdot\int_0^{10} f_F'(x)dx \approx 0{,}50$ und $\frac{1}{10}\cdot\int_{10}^{20} f_F'(x)dx \approx 0{,}25$. Die Funktion steigt zwar ständig, aber die Änderungsraten werden immer geringer. Denn f_E' mit $f_E'(x)=2{,}4\cdot e^{-0{,}15\cdot x}$ ist eine positive und monoton fallende Funktion. Also ist die durchschnittliche Änderung der Temperatur pro Minute in den ersten 10 Minuten des Erwärmvorganges größer als in den zweiten 10 Minuten des Erwärmvorganges.		15	10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

ANALYSIS 3

I.3 Dreieck

Gegeben sind zwei ganzrationale Funktionen mit den Gleichungen

$$f(x) = (x-2)^2 \quad \text{und} \quad g(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 5 \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}.$$

a) Geben Sie die Scheitelpunkte zu *f* und *g* an.

Ermitteln Sie die Schnittpunkte *D* und *A* (<u>*A* sei rechts von *D*</u>) der Graphen von *f* und *g*.

Zeichnen Sie die Graphen von *f* und *g* im Bereich $-1 \le x \le 5$ in ein Koordinatensystem ein.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der von beiden Graphen eingeschlossenen Fläche.

c) Eine Parallele zur *y*-Achse mit $x = a$ und $0 < a < 4$, schneidet den Graphen von *f* im Punkt *B* und den Graphen von *g* im Punkt *C*. Die Punkte *B* und *C* bilden sowohl mit dem Schnittpunkt *A* als auch mit dem Schnittpunkt *D* aus dem Aufgabenteil a) jeweils die Eckpunkte eines Dreiecks.

Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks *ABC* in Abhängigkeit von *a* durch die Funktion *W* mit $W(a) = \frac{5}{8}a^3 - 5a^2 + 10a$ beschrieben wird.

Ermitteln Sie, für welches *a* die Fläche des Dreiecks *ABC* den größten Inhalt hat, und geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.

Begründen Sie, warum der maximale Flächeninhalt des Dreiecks *DBC* genau so groß ist wie der maximale Flächeninhalt des Dreiecks *ABC*. Bestimmen Sie dann, für welchen Wert von *a* die Fläche des Dreiecks *DBC* den größten Inhalt hat.

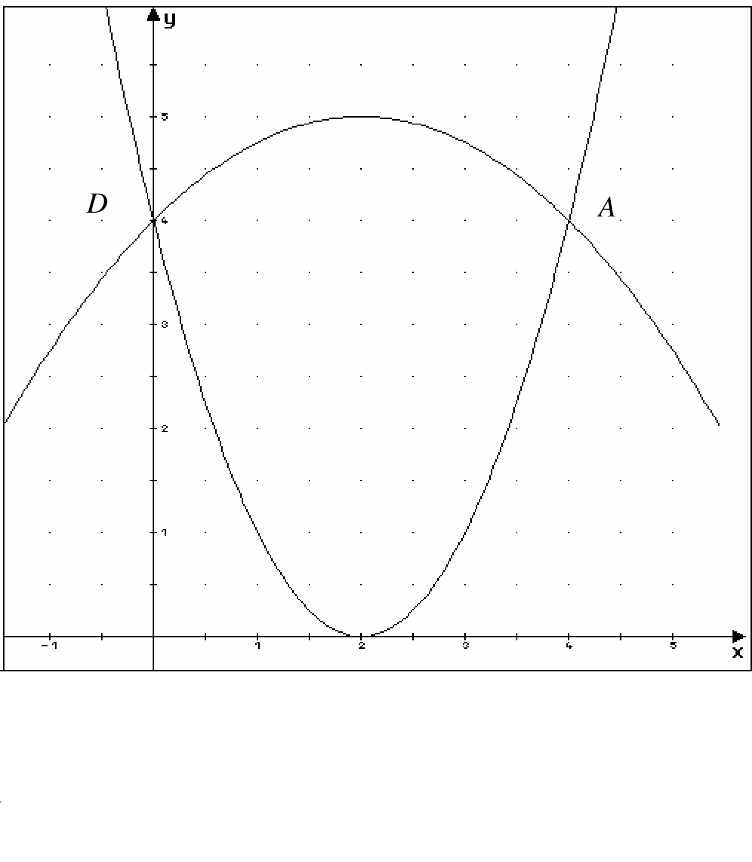
Ermitteln Sie, welchen Anteil die maximale Dreiecksfläche an dem Flächeneinschluss *K* zwischen den Graphen von *f* und *g* hat.

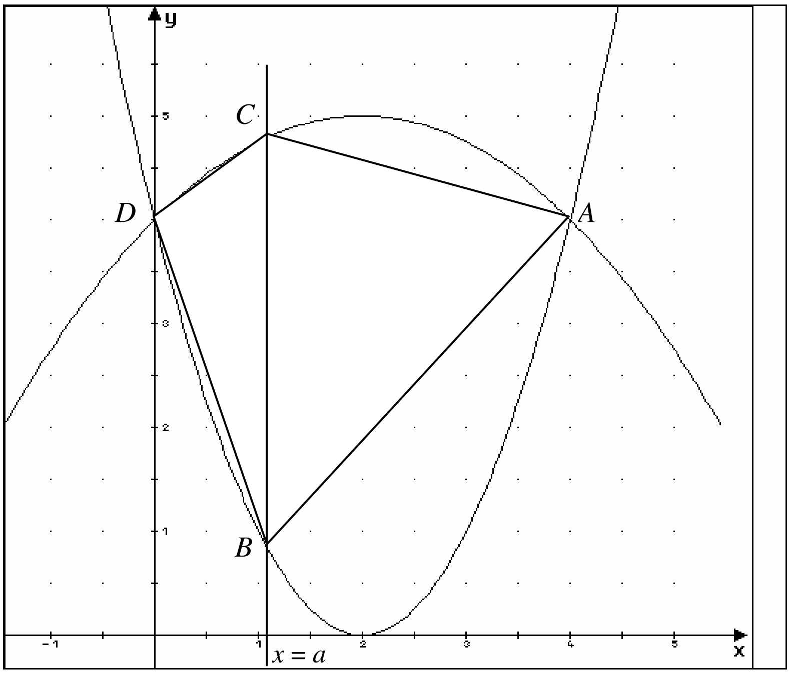
d) Die Graphen von *f* und *g* lassen sich durch einen geeigneten, von Null verschiedenen Faktor $k \in \mathbb{R}$ strecken oder stauchen, sodass die Nullstellen erhalten bleiben. Im Folgenden soll der Faktor *k* bei *f* und *g* jeweils gleich sein.

Zeigen Sie, dass die Schnittstellen der Graphen von *f* und *g* unabhängig von der Wahl von *k* sind.

Bestimmen Sie jetzt *k* so, dass die Graphen in den Schnittpunkten senkrecht zueinander stehen.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Die Koordinaten der Scheitelpunkte lassen sich den Funktionsgleichungen entnehmen: $S_f\,(2 \mid 0)$ und $S_g\,(2 \mid 5)$ Schnittpunkte: Beide Funktionsterme werden gleichgesetzt: $f(x) = g(x)$ $(x-2)^2 = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 5$ $x^2 - 4x + 4 = -\frac{1}{4}x^2 + x + 4$ $\frac{5}{4}x^2 - 5x = 0$ $x \cdot \left(\frac{5}{4}x - 5\right) = 0$ Die letzte Gleichung ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der beiden Faktoren gleich Null ist. D. h. $x = 0 \vee \left(\frac{5}{4}x - 5\right) = 0$ $x = 0 \vee x = 4$ Mit $f(0) = 0$ und $f(4) = 4$ erhält man die Schnittpunkte $D\,(0 \mid 4)$ und $A\,(4 \mid 4)$. Skizze: 	15	15	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
b)	Beide Funktionen haben zwischen den beiden Schnittstellen positive Funktionswerte. Also kann man den Flächeninhalt zwischen den Graphen mithilfe des Integrals über $f - g$ bzw. $g - f$ bilden: $\int_0^4 (g(x) - f(x))dx = \left[-\frac{5}{12}x^3 + \frac{5}{2}x^2\right]_0^4 = \frac{40}{3}$. Der Inhalt der Fläche, der von den beiden Funktionsgraphen umschlossen wird, beträgt $\frac{40}{3}$ Flächeneinheiten.	10		
c)	Dreiecksfläche:  Die Fläche eines Dreiecks berechnet sich aus „$\frac{1}{2} \cdot$ Grundseite $\cdot$ Höhe“. Die Höhe beträgt $4 - a$, die Grundseitenlänge $g(a) - f(a) = -\frac{5}{4}a^2 + 5a$. Also hat der Flächeninhalt des Dreiecks *ABC* den Wert $\left(\frac{1}{2} \cdot (4-a) \cdot (-\frac{5}{4}a^2 + 5a)\right) = \frac{5}{8}a^3 - 5a^2 + 10a$. Maximaler Flächeninhalt des Dreiecks *ABC*: $W(a) = \frac{5}{8}a^3 - 5a^2 + 10a$ $W'(a) = \frac{15}{8}a^2 - 10a + 10$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$W'(a)=0$ $\frac{15}{8}a^2-10a+10=0$ $a^2-\frac{16}{3}a+\frac{16}{3}=0$ $a_{1/2}=\frac{8}{3}\pm\sqrt{\frac{64}{9}-\frac{16}{3}}=\frac{8}{3}\pm\sqrt{\frac{16}{9}}$ $a_{1/2}=\frac{8}{3}\pm\frac{4}{3}$. W hat also bei $a_1=4$ und bei $a_2=\frac{4}{3}$ mögliche Extremstellen. Durch Einsetzen in die zweite Ableitung W'' mit $W''(a)=\frac{15}{4}a-10$ erhält man: $W''\left(\frac{4}{3}\right)=-5$. Also hat W bei $a_2=\frac{4}{3}$ eine Maximumstelle. *Da W* eine ganz rationale Funktion vom Grad drei ist, folgt daraus, dass die andere mögliche Extremstelle a_1 eine Minimumstelle ist. Diese liegt aber außerhalb des untersuchten Bereichs. $W\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{160}{27}\approx 5{,}93$. Der maximale Flächeninhalt des Dreiecks *ABC* beträgt damit etwa 5,93 Flächeneinheiten. <u>Gleichheit der maximalen Flächeninhalte der Dreiecke *ABC* und *DBC*:</u> Aufgrund der vorliegenden Symmetrie beider Graphen zur Scheitelachse $x=2$ liegen auch die Eckpunkte beider Dreiecke symmetrisch zur Scheitelachse. Es sind also jeweils die Länge und Höhe der Dreiecke und damit die Flächeninhalte gleich. Da die beiden Dreiecke mit maximalen Flächeninhalt spiegelsymmetrisch zueinander sind, liegt die Extremalstelle des Dreiecks *DBC* punktsymmetrisch bzgl. 2 zur Extremalstelle des Dreiecks *ABC*: Aus $a=\frac{4}{3}$ folgt $a=2-\frac{2}{3}$. Also liegt die Extremalstelle des Dreiecks *DBC* bei $a=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td><u>Flächenanteil:</u>
Der Anteil beträgt $\frac{\frac{160}{27}}{\frac{40}{3}} = \frac{160}{27} \cdot \frac{3}{40} = \frac{4}{9}$.</td><td></td><td>40</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td><u>Schnittstellen:</u>
Damit f und g bei gleichzeitigem Erhalt der Nullstellen gestaucht bzw. gestreckt wird, muss jeweils der ganze Funktionsterm mit k multipliziert werden, also haben die veränderten Funktionsterme f_k bzw. g_k von f bzw. g das Aussehen
$f_k(x) = k \cdot f(x) = k(x-2)^2$ und $g_k(x) = k \cdot g(x) = -\frac{k}{4}(x-2)^2 + k \cdot 5$.
Nach der Festlegung folgt dann aus $f_k(x) = g_k(x)$ sofort $f(x) = g(x)$, d.h., dass die Schnittstellen gleich sind.
<u>Graphen stehen in den Schnittpunkten senkrecht zueinander:</u>
Aus Symmetriegründen reicht es, die Schnittstelle $x = 0$ zu untersuchen.
$f_k'(x) = k \cdot f'(x) = k \cdot (2x-4)$ und
$g_k'(x) = k \cdot g'(x) = k \cdot (-\frac{1}{2}x + 1)$
Damit beide Funktionsgraphen an den Schnittstellen senkrecht aufeinander stehen, muss gelten
$$\begin{aligned} f_k'(0) &= -\frac{1}{g_k'(0)} \\ k \cdot (2 \cdot 0 - 4) &= -\frac{1}{k \cdot (-\frac{1}{2} \cdot 0 + 1)} \\ -4k &= -\frac{1}{k} \\ k^2 &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$
D. h. $k = \frac{1}{2}$ und $k = -\frac{1}{2}$ sind Lösungen.
Für $k = \frac{1}{2}$ bzw. $k = -\frac{1}{2}$ stehen die Funktionsgraphen von f_k und g_k an den Schnittstellen senkrecht zueinander.</td><td></td><td></td><td>20</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>55</td><td>20</td></tr>
</table>

LA/AG 1

II.1 Würfel

Gegeben sind die Punkte $A\,(-1\,|\,6\,|\,1\,)$, $B\,(\,2\,|\,2\,|\,2\,)$, $C\,(\,0\,|\,7\,|\,-1\,)$, $P\,(\,0\,|\,6\,|\,6\,)$ und $Q\,(\,6\,|\,6\,|\,6\,)$.
Die Ebene ***E*** enthält die Punkte *A, B* und *C*.

a) Geben Sie eine Gleichung der Geraden *g*, die durch die Punkte *P* und *Q* geht, in Parameterform an.

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von ***E*.**
(Ein mögliches Teilergebnis ist $\boldsymbol{E}: x_1 + x_2 + x_3 - 6 = 0$.)
Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen der Geraden *g* und der Ebene ***E***.

b) Berechnen Sie die Schnittpunkte S_1, S_2 und S_3 von ***E*** mit den Koordinatenachsen.

S_1, S_2, S_3 und der Koordinatenursprung *O* sind vier Eckpunkte eines Würfels.

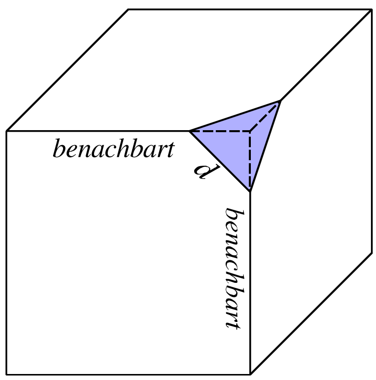
Zeichnen Sie das Dreieck $S_1S_2S_3$ und den Würfel in das beiliegende Koordinatensystem ein. Zeigen Sie, dass die Punkte *P* und *Q* ebenfalls Eckpunkte des Würfels sind.

c) Gegeben ist eine Ebene ***F*** durch die Eckpunkte *P* und *Q* des Würfels aus Aufgabenteil b) und den Punkt $R\,(\,6\,|\,0\,|\,4\,)$.

Bestimmen Sie den Schnittpunkt von ***F*** mit der x_3-Achse.

Die Ebene ***F*** zerlegt den Würfel in zwei Teile.
Zeichnen Sie die Schnittfläche in das Bild aus Aufgabenteil b) ein.
Ermitteln Sie das Verhältnis der Volumeninhalte der entstandenen Teilkörper.

d) Dem Würfel wird ein pyramidenförmiges Stück abgeschnitten, so dass die Pyramidenspitze der Punkt *Q* ist und die von *Q* ausgehenden Kanten gleich lang sind. Die entsprechenden Kanten sind in der Zeichnung gestrichelt eingezeichnet. Drei der alten Würfelflächen werden dadurch zu Fünfecken.



In diesem Aufgabenteil geht es nun um den Restkörper.

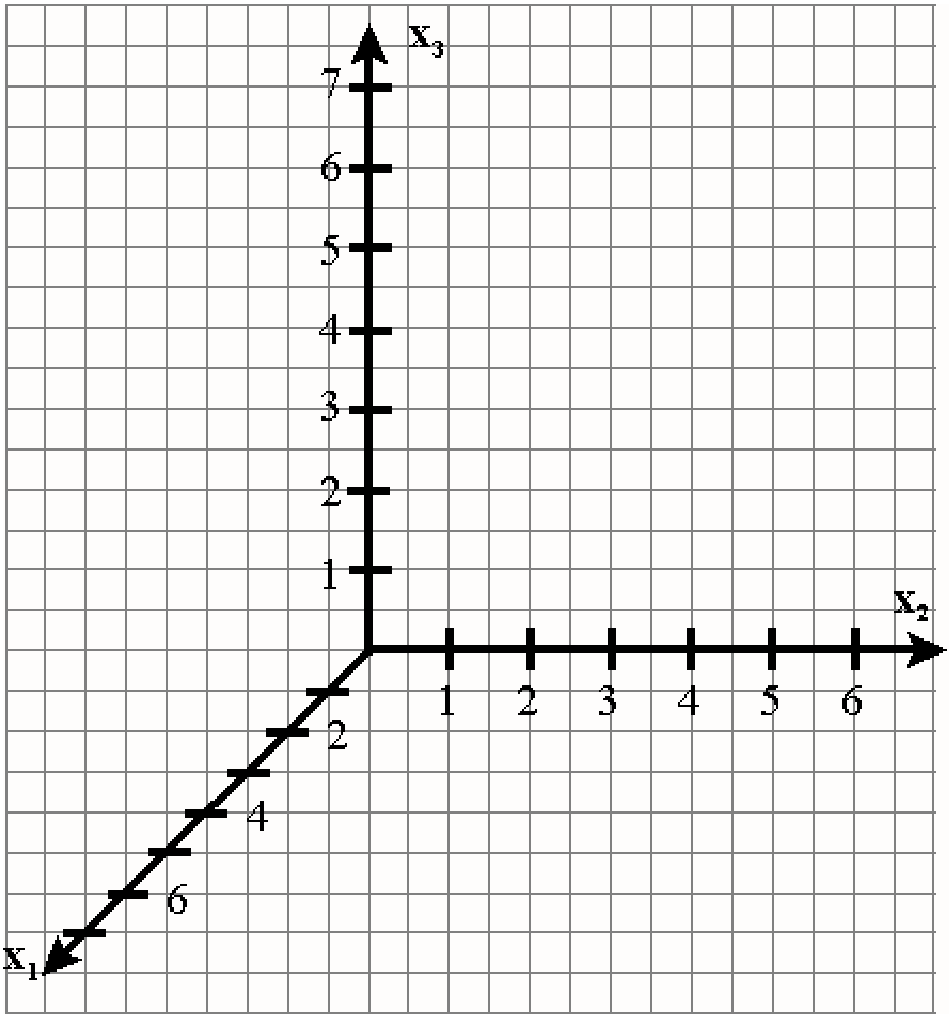
Begründen Sie, dass die entstehende Schnittfläche ein gleichseitiges Dreieck ist.

Bestimmen Sie die Länge *x* der von *Q* ausgehenden Kanten so, dass die neu entstandene Kante *d* und ihre beiden benachbarten Kanten der entstehenden fünfeckigen Seitenflächen des Restkörpers jeweils gleich lang sind. Ermitteln Sie auch diese gemeinsame Länge.

e) Nun werden von <u>allen</u> Ecken des Würfels jeweils gleich große Pyramiden abgeschnitten. Ermitteln Sie, wie lang die von der Ecke ausgehenden Kanten der abgeschnittenen Pyramiden höchstens sein können.

Haben die abgeschnittenen Pyramiden die maximale Größe, so entsteht ein spezieller Restkörper. Ermitteln Sie, um was für einen Körper es sich hierbei handelt. Beschreiben Sie ihn dazu durch die Anzahl der Ecken sowie durch die Form und die Anzahl seiner Seitenflächen.

Anlage zur Aufgabe „Würfel“:



Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Für die Geradengleichung der Geraden g durch die Punkte P und Q kann man als Stützvektor den Ortsvektor $\vec{p}$ und als Richtungsvektor den Vektor $\overrightarrow{PQ}$ verwenden: $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\6\\6\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}$.

Für die Bestimmung der Koordinatengleichung der Ebene E stellt man z. B. erst eine Parametergleichung auf, hier mit dem Stützvektor $\vec{a}$ und den Spannvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$: $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\6\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$.
Dann erhält man über das lineare Gleichungssystem
$\left\{\begin{aligned}x_1&=-1+3r+s\\x_2&=6-4r+s\\x_3&=1+r-2s\end{aligned}\right.\rightarrow\left\{\begin{aligned}x_1&=-1+3r+s\\x_1-x_2&=-7+7r\\2x_1+x_3&=-1+7r\end{aligned}\right.\rightarrow\left\{\begin{aligned}x_1&=-1+3r+s\\x_1-x_2&=-7+7r\\2x_1+x_3-(x_1-x_2)&=6\end{aligned}\right.$

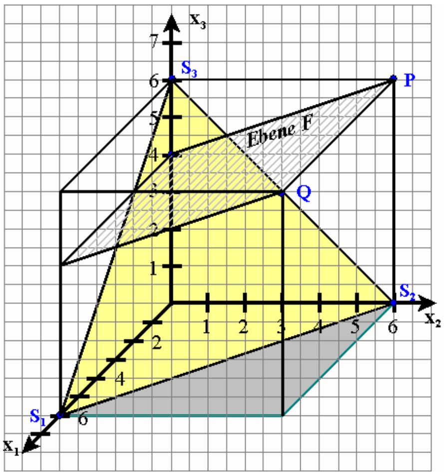
oder über den Normalenvekor $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ die Koordinatengleichung

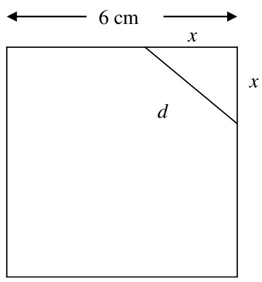
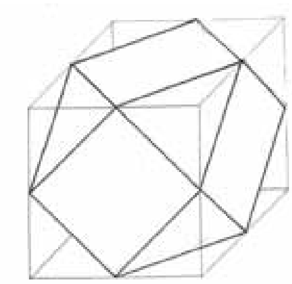
$x_1+x_2+x_3=6$.

Hinweis: Auch eine argumentative Lösung, z. B. über Spurpunkte, ist möglich.

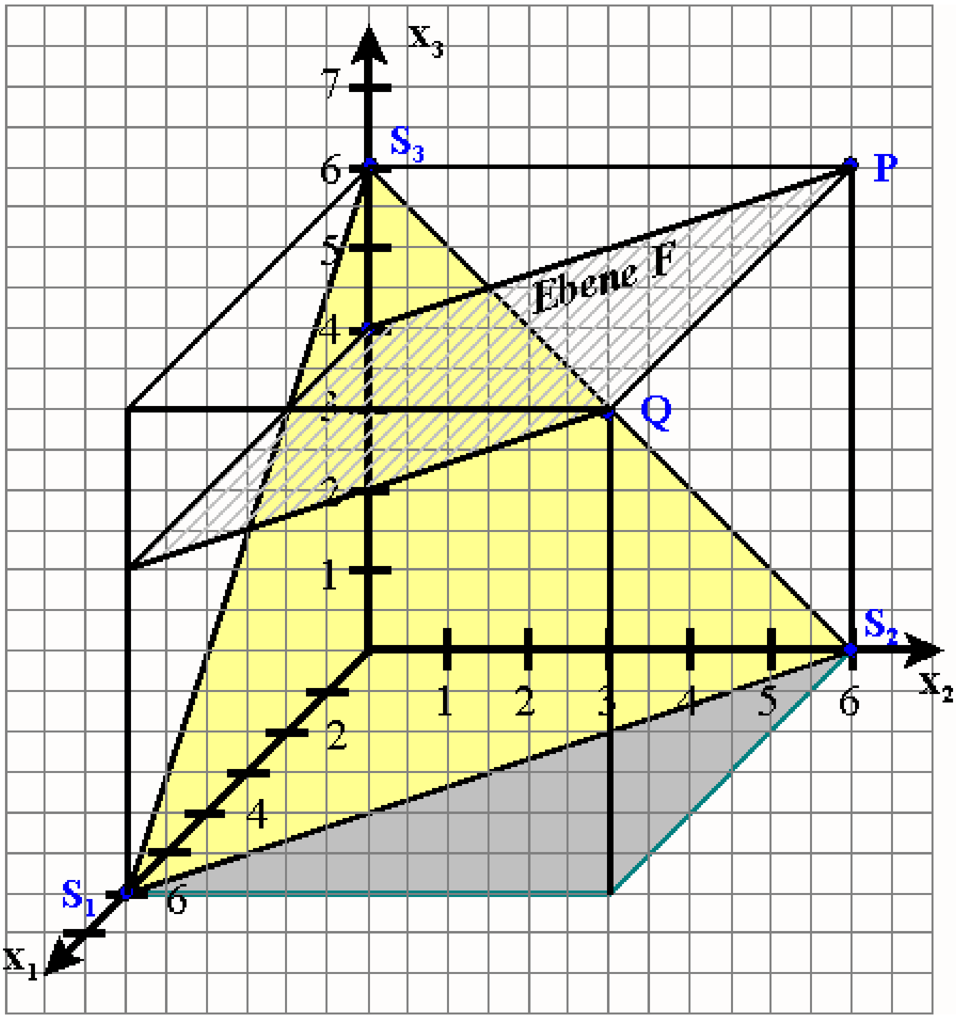
Ein Richtungsvektor von g ($\overrightarrow{PQ}$) und ein Normalenvektor $\vec{n}$ von E werden in die Schnittwinkelformel eingesetzt und es ergibt sich
$$\sin\alpha=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}\right|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{PQ}|}=\frac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}\right|}=\frac{6}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{36}}=\frac{6}{\sqrt{3}\cdot 6}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$
Damit folgt $\alpha\approx 35{,}26°$.</td><td>15</td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Zur Berechnung des Schnittpunkts S_1 der Ebene E mit der x_1-Achse setzt man in der Koordinatengleichung die Koordinaten x_2 und x_3 gleich Null und berechnet x_1. Man erhält $S_1(6|0|0)$.

Entsprechend erhält man $S_2(0|6|0)$ und $S_3(0|0|6)$.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	 Nachweis, dass P und Q Eckpunkte des Würfels sind: $\vec{s_2}+\vec{s_3}=\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\\6\end{pmatrix}=\vec{p}$ und $\vec{s_1}+\vec{s_2}+\vec{s_3}=\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix}=\vec{q}$.	10	10	
c)	• Da P und Q Eckpunkte des Würfels sind und R auf der Würfelkante liegt, die senkrecht auf S_1 steht, muss der Schnittpunkt mit der x_3-Achse die gleiche x_3-Koordinate wie R haben. Also hat der Schnittpunkt von F mit der x_3-Achse die Koordinaten $(0\|0\|4)$. • Die Ebene F zerlegt den Würfel in zwei Prismen. Ein Prisma hat ein rechtwinkliges Dreieck als Grundfläche, das andere hat eine trapezförmige Grundfläche. Für das Volumen des Würfels ergibt sich: $V_{Würfel}=6^3=216$. Für das Prisma mit dem rechtwinkligen Dreieck als Grundfläche ergibt sich: $V_{Teilkörper}=G\cdot h=\frac{6\cdot 2}{2}\cdot 6=36$. Für das Verhältnis gilt dann: $\frac{36}{216}:\frac{180}{216}$, also 1 : 5.		20	
d)	• Die abgeschnittene Pyramide hat zur Spitze hin gleich lange Kanten, jede Seitenfläche hat an der Spitze einen 90°-Winkel. Also sind die drei Seitenflächen kongruent, damit sind die Kanten an der Grundfläche auch gleich lang und die Grundfläche und damit auch die Schnittfläche ist ein gleichseitiges Dreieck. • Sei x die Länge der von Q ausgehenden Pyramidenkante der abgeschnittenen Pyramide. Für die neu erhaltene Seite d gilt $2x^2=d^2$, also $d=\sqrt{2x^2}=\sqrt{2}\cdot x$ (1) und $d=6-x$. (2)			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Die Gleichung (1) gilt immer.
Die Gleichung (2) folgt aus der Aufgabenstellung:
d und die benachbarten Kanten sollen gleich lang sein.
Durch Gleichsetzen erhält man
$\sqrt{2}\cdot x = 6 - x$
$(\sqrt{2}+1)\cdot x = 6$
$x = \frac{6}{\sqrt{2}+1} \approx 2{,}5$.
bzw.
$d = 6 - x \approx 3{,}5$.

</td><td></td><td></td><td>20</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>• Die abgeschnittenen Kanten können höchstens 3 LE lang sein, denn dann treffen sich die abgeschnittenen Pyramiden gerade in der Mitte der Würfelkante, so dass von der Würfelkante nichts mehr übrig bleibt.
• Der Restkörper hat dort, wo der Würfel ehemals Ecken hatte, gleichseitige Dreiecke. Aus den ehemaligen Würfelflächen werden Quadrate, deren Ecken in den Mittelpunkten der ehemaligen Würfelkanten liegen. Der Körper hat also 14 Flächen: 8 gleichseitige Dreiecke und 6 Quadrate. Weiterhin hat der Körper 12 Ecken.
</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>55</td><td>20</td></tr>
</table>

Kopiervorlage für die Zeichnung:



LA/AG 2

II.2 Pavillon am Meer

Auf einem ebenen zum Meer hin abfallenden Hang werden in den Geländepunkten

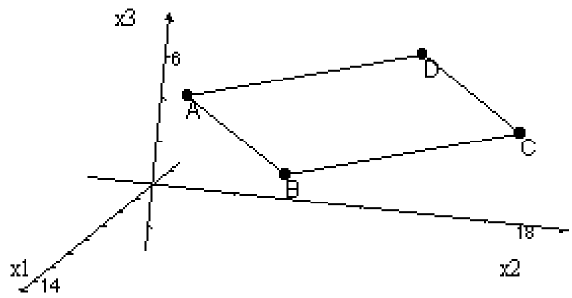
$A(2 \mid 2 \mid 5)$,

$B(10 \mid 10 \mid 4{,}8)$,

$C(2 \mid 18 \mid 5)$,

$D(d_1 \mid d_2 \mid d_3)$

Pfeiler für einen offenen Pavillon entsprechend der nicht maßstäblichen Zeichnung verankert.



1 LE $\hat{=}$ 1 m.

a) Erstellen Sie eine Parametergleichung der Ebene ***E*** des Hanges.

Berechnen Sie die Abstände von *A* nach *B* und von *B* nach *C*.

Die ungefähre Lage des Punktes *D* können Sie der Zeichnung entnehmen. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes *D*, so dass *ABCD* ein Viereck in der Ebene ***E*** wird, in dem alle Seiten gleich lang sind (Raute).

b) Die Planung sah als „Grundriss" des Pavillons ein Quadrat vor.
Entscheiden Sie, ob diese Planung im Gelände durch die gewählten Punkte erfüllt wird.

In den Punkten *A, B, C* und *D* werden die Pfeiler *a, b, c* und *d* angebracht. Jeder Pfeiler ragt mit einer Länge von 3,8 m aus dem Boden heraus. An den Pfeilerspitzen soll ein Planendach aufgehängt werden.

c) Der Pfeiler *c* folgt dem Richtungsvektor $\overrightarrow{v_c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, der Pfeiler *a* folgt dem Richtungsvektor $\overrightarrow{v_a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass $(2 \mid 19{,}2 \mid 8{,}6)$ die Koordinaten der Pfeilerspitze S_c und $(2 \mid 0{,}8 \mid 8{,}6)$ die Koordinaten der Pfeilerspitze S_a sind.
Berechnen Sie den Neigungswinkel des Pfeilers *c* zur Hangwaagerechten, also zur Geraden durch *A* und *C*.

Die Pfeiler *b* und *d* enden in S_b $(11{,}2 \mid 10 \mid 8{,}4)$ und S_d $(-7{,}2 \mid 10 \mid 8{,}8)$.

d) Untersuchen Sie, ob das Planendach durch ein ebenes Glasdach ersetzt werden kann, das auf allen vier Pfeilerspitzen aufliegt.

Der Hang bricht in 4 m Höhe mit einer geraden horizontalen Kante zum Wasser hin ab, d.h. die Abbruchkante liegt in der Hangebene ***E*** und hat dort die konstante Höhe $x_3 = 4$. Der Punkt *B* des Pavillons soll mindestens 40 m von der Abbruchkante entfernt sein.

e) Ermitteln Sie die Geradengleichung der Abbruchkante und beurteilen Sie, ob die Abstandsforderung eingehalten wird.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Mit dem Punkt B als Basispunkt und den Richtungsvektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$ ergibt sich $\boldsymbol{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 4{,}8 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix},\ k, l \in \mathbb{R}.$ Es gilt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 4{,}8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 18 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 4{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$. Also folgt $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{8^2 + 8^2 + 0{,}2^2} \approx 11{,}32$. <u>Erster Lösungsweg zur Berechnung der Koordinaten von *D*:</u> Es gilt: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}$. Damit sich eine Raute in der Ebene bilden soll, muss $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ gelten, d. h. $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$ $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ 5{,}2 \end{pmatrix}.$ Damit ergibt sich D (–6 I 10 I 5,2). <u>Zweiter Lösungsweg:</u> Einfache Betrachtungen der Symmetrien der Punktkoordinaten ergeben unmittelbar, dass • A und C auf gleicher Höhe liegen und • dass die Gerade durch A und C nur in der x_2-Koordinate variabel ist, • dass somit D dieselbe x_2-Koordinate wie B haben muss, • dass D um 0,2 höher als A (und C) liegen muss und • dass D in der x_1-Koordinate von C ebenso weit entfernt sein muss wie B, also D (–6 I 10 I 5,2). Zu überprüfen ist noch die Gleichseitigkeit: Nach der Konstruktion ist $\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$. Aus der Berechnung der Abstände von A nach B und von B nach C folgt: $\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$. Nun muss nur noch $\left\|\overrightarrow{CD}\right\|$ untersucht werden.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CD}$ $\begin{pmatrix}-6\\10\\5,2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\18\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\-8\\0,2\end{pmatrix}$. Also hat auch $\overrightarrow{CD}$ die gleiche Länge wie die übrigen Vierecksseiten. Das Viereck *ABCD* ist also gleichseitig und damit eine Raute. *Hinweis: Andere Schreibweisen, z. B. dass Punkte mit Vektoren identifiziert werden, führen natürlich auch zu richtigen Lösungen.*	15	15	
b)	Die Raute *ABCD* ist ein Quadrat, wenn mindestens einer der Winkel 90° beträgt. Der Winkel α bei *A* wird mithilfe des Skalarproduktes bestimmt: $\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}}{\lvert\overrightarrow{AD}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{AB}\rvert}$ $=\frac{\begin{pmatrix}-8\\8\\0,2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\8\\-0,2\end{pmatrix}}{\lvert\overrightarrow{AD}\rvert^2}$ $=-\frac{0,04}{64+64+0,04}$ $\approx -0,00031$. Aus $\cos\alpha\approx -0,00031$ folgt $\alpha\approx 90,018°$. Da *ABCD* eine Raute ist, muss der gegenüberliegende Winkel ebenso groß sein, und die beiden anderen Winkel sind die Komplementärwinkel, die von einem rechten Winkel um –0,018° abweichen. Der Grundriss kann so akzeptiert werden, da die Abweichungen gegenüber dem Ideal klein genug sind, um bei einem tatsächlichen Bauwerk nie messbar zu sein. *Hinweis: Die Abweichung gegenüber einem wirklich rechtwinkligen Grundriss beträgt etwa 3,5 mm an einem Eckpunkt.*		15	
c)	Die Koordinaten der Pfeilerspitze S_c erhält man aus $\overrightarrow{OC}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ mit der Bedingung, $\left\lvert r\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right\rvert=3,8$. Aus $\left\lvert\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right\rvert=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$ folgt $r=\frac{3,8}{\sqrt{10}}\approx 1,2$. Eingesetzt ergibt sich, dass S_c die Koordinaten (2 ǀ 19,2 ǀ 8,6) hat.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Die Koordinaten von S_a erhält man – da die Pfeilerlänge die gleiche bleibt – dann aus $\overrightarrow{OA}+\frac{3,8}{\sqrt{10}}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0,8\\8,6\end{pmatrix}$. S_a hat die Koordinaten $(2 \mid 0,8 \mid 8,6)$. Der Winkel berechnet sich aus $\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\vec{v}_c}{\lvert\overrightarrow{AC}\rvert\cdot\lvert\vec{v}_c\rvert} =\frac{\begin{pmatrix}0\\16\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}}{\sqrt{16^2}\cdot\sqrt{10}} =\frac{16}{16\cdot\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}\approx 0,32$. Mit $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{10}}$ folgt $\varphi\approx 71,6°$.	5	15	
d)	Drei Punkte liegen immer in einer Ebene. Bestimmt wird die Ebene E_D z. B. durch die drei Punkte S_a, S_b und S_d. Anschließend muss gezeigt werden, dass auch S_c in der Ebene E_D liegt. Als Ebenengleichung mit dem Basispunkt S_a erhält man $E_D:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0,8\\8,6\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}9,2\\9,2\\-0,2\end{pmatrix}+l\cdot\begin{pmatrix}-9,2\\9,2\\0,2\end{pmatrix},\ k,l\in\mathbb{R}$. Damit S_c in der Ebene liegt, muss das folgende Gleichungssystem erfüllbar sein. $2+9,2k-9,2l=2$ (1) $0,8+9,2k+9,2l=19,2$ (2) $8,6-0,2k+0,2l=8,6$ (3) Aus Gleichung (1) folgt: $9,2k=9,2l$ also $k=l$ Eingesetzt in (2) ergibt sich: $0,8+9,2k+9,2(k)=19,2$ $2\cdot 9,2\cdot k=18,4$ $9,2k=9,2$ $k=1$ Dann ist auch $l=1$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Beide Ergebnisse werden in (3) eingesetzt und man erhält $8{,}6-0{,}2\cdot 1+0{,}2\cdot 1=8{,}6$. Damit sind die drei Gleichungen simultan lösbar und S_c liegt ebenfalls in der Ebene $\boldsymbol{E_D}$. Es ist also möglich, das Planendach durch ein ebenes Glasdach zu ersetzen.		15	
e)	<u>Gleichung der Abbruchkante:</u> Die Abbruchkante liegt in der Ebene $\boldsymbol{E}$ und hat dort die konstante Höhe $x_3 = 4$. Eingesetzt in die Gleichung für $\boldsymbol{E}$ ergibt dies eine Bestimmungsgleichung für k und l: $4=4{,}8+0{,}2k+0{,}2l \;\Leftrightarrow\; k=-4-l$. Somit ergibt sich für die Abbruchkante g die Geradengleichung: $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}10\\10\\4{,}8\end{pmatrix}+(-4-l)\cdot\begin{pmatrix}-8\\-8\\0{,}2\end{pmatrix}+l\cdot\begin{pmatrix}-8\\8\\0{,}2\end{pmatrix},\ l\in\mathbb{R}$ $=\begin{pmatrix}42\\42\\4\end{pmatrix}+l\cdot\begin{pmatrix}0\\16\\0\end{pmatrix},\ l\in\mathbb{R}$ $=\begin{pmatrix}42\\42\\4\end{pmatrix}+l\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ l\in\mathbb{R}$ <u>Abstandsforderung:</u> Auch ohne formales Verfahren zur Bestimmung des Abstands eines Punktes (hier B) von einer Geraden (hier g) ist die Frage erschließend beantwortbar: Da g in x_2-Richtung verläuft, kann man einen Schnitt senkrecht zu dieser Achse durch B vornehmen, und die Abstandslinie liegt in dieser Schnittebene. In dieser Ebene haben B und der Durchstoßungspunkt von g eine Koordinatendifferenz von 32 in der x_1-Koordinate und von 0,8 in der x_3-Koordinate. Also ist der Abstand von B zu g: $d(B,g)=\sqrt{32^2+0{,}8^2}\approx 32{,}01<40$. Der geforderte Abstand wird also deutlich unterschritten. *Hinweis: Andere Berechnungen, wie z. B. über Normalenvektoren, sind ebenso möglich.*			20
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

STOCHASTIK 1

III.1 Allergien

Auf einer Internetseite von „netdoktor.de“ vom 18.07.05 wird zunächst erklärt, was eine Allergie ist: „Bei einigen Menschen spielt das Immunsystem verrückt. Statt nur schädliche Krankheitserreger zu bekämpfen, stürzt sich die Immunabwehr auch auf harmlose Fremdlinge wie Blütenpollen, Hausstaub oder bestimmte Nahrungsmittelbestandteile: der Körper reagiert allergisch.“ Später heißt es: „Jeder dritte Deutsche ist Allergiker, schätzt der Ärzteverband Deutscher Allergologen. Tendenz steigend.“

Für Ihre Lösungen können Sie auch den in der Anlage beigefügten Ausschnitt aus einer Tabelle summierter Binomialverteilungen benutzen.

Gehen Sie zunächst davon aus, dass ein Drittel aller Deutschen Allergiker sind.

a) Es werden 100 Bewohner Deutschlands zufällig ausgewählt und auf Allergien getestet.
Begründen Sie, dass man die möglichen Anzahlen an Allergikern unter den getesteten Personen als binomialverteilt ansehen kann.

b) Berechnen Sie unter der Annahme der Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 100 getesteten Personen
- genau 33 Allergiker
- mindestens 25 Allergiker
- höchstens 20 Allergiker sind.

Auf der oben genannten Internetseite heißt es weiter: „Die Neigung zu einer solchen Reaktion ist wahrscheinlich angeboren. Die Neigung, eine Überempfindlichkeit zu entwickeln, liegt bei Personen, bei denen beide Elternteile Allergiker sind, zwischen 40 bis 60 Prozent. Ist nur ein Elternteil betroffen, entwickelt sich in etwa 20 bis 40 Prozent der Fälle eine Allergie.“

c) Gehen Sie in diesem Aufgabenteil davon aus, dass die Partnerwahl und die Familienplanung unabhängig von vorliegenden Allergien erfolgen.

Bestimmen Sie zunächst die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen „Elternkonstellationen“, also dafür, dass beide Elternteile Allergiker sind, ein Elternteil oder kein Elternteil Allergiker ist.

Weisen Sie nach, dass selbst, wenn man jeweils die höheren Werte zugrunde legt – also 60%, wenn beide Elternteile Allergiker sind, 40%, wenn nur ein Elternteil betroffen ist – der Anteil der Allergiker in der Bevölkerung sinken müsste, wenn nur erbliche Faktoren für das Auftreten einer Allergie entscheidend wären und keine Allergien bei Kindern aufträten, deren Elternteile beide keine Allergiker sind.

Zitat aus der o.g. Internetseite: „Warum Allergien in Industrienationen stetig zunehmen, ist unbekannt. Jedoch scheinen besonders hygienische Lebensverhältnisse die Entstehung von Allergien im Kindesalter zu begünstigen. Denn in Regionen mit einfacheren hygienischen Standards treten Allergien deutlich seltener auf. Offenbar verpassen Schmutz und harmlose Keime in der Kindheit dem Immunsystem erst den richtigen Schliff.“

d) Um die Ursachen für das Entstehen von Allergien zu erforschen, werden 100 zufällig ausgewählte fünfjährige Kinder vor ihrer Einschulung auf Allergien untersucht.

Durch einen Hypothesentest soll die Behauptung begründet werden, dass der Anteil an Allergikern steigt. Leiten Sie eine Entscheidungsregel her, mit der die Nullhypothese „Unter Kindern im Alter von 5 Jahren sind höchstens ein Drittel Allergiker.“ gegebenenfalls verworfen werden kann. Dabei soll die Wahrscheinlichkeit, dass die Hypothese zu Unrecht verworfen wird, und also zu Unrecht von einem erhöhten Anteil an Allergikern ausgegangen wird, höchstens 5 % betragen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mit Ihrer Entscheidungsregel eine Erhöhung des Anteils an Allergikern auf 40 % unbemerkt bleibt und interpretieren Sie dieses Ergebnis.

Tabelle der summierten Binomialverteilung für n = 100

k \ p	0,2	0,3	$\frac{1}{3}$	0,4	0,5
10	0,0057	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
11	0,0126	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
12	0,0253	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
13	0,0469	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
14	0,0804	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
15	0,1285	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000
16	0,1923	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000
17	0,2712	0,0022	0,0002	0,0000	0,0000
18	0,3621	0,0045	0,0005	0,0000	0,0000
19	0,4602	0,0089	0,0011	0,0000	0,0000
20	0,5595	0,0165	0,0024	0,0000	0,0000
21	0,6540	0,0288	0,0048	0,0000	0,0000
22	0,7389	0,0479	0,0091	0,0001	0,0000
23	0,8109	0,0755	0,0164	0,0003	0,0000
24	0,8686	0,1136	0,0281	0,0006	0,0000
25	0,9125	0,1631	0,0458	0,0012	0,0000
26	0,9442	0,2244	0,0715	0,0024	0,0000
27	0,9658	0,2964	0,1066	0,0046	0,0000
28	0,9800	0,3768	0,1524	0,0084	0,0000
29	0,9888	0,4623	0,2093	0,0148	0,0000
30	0,9939	0,5491	0,2766	0,0248	0,0000
31	0,9969	0,6331	0,3525	0,0389	0,0001
32	0,9985	0,7107	0,4344	0,0615	0,0002
33	0,9993	0,7793	0,5188	0,0913	0,0004
34	0.9997	0,8371	0,6019	0,1303	0,0009
35	0,9999	0,8839	0,6803	0,1795	0,0018
36	0,9999	0,9201	0,7511	0,2386	0,0033
37	1,0000	0,9470	0,8123	0,3068	0,0060
38	1,0000	0,9660	0,8630	0,3822	0,0105
39	1,0000	0,9790	0,9034	0,4621	0,0176
40	1,0000	0,9875	0,9341	0,5433	0,0284
41	1,0000	0,9928	0,9566	0,6225	0,0443
42	1,0000	0,9960	0,9724	0,6967	0,0666
43	1,0000	0,9979	0,9831	0,7635	0,0967
44	1,0000	0,9989	0,9900	0,8211	0,1356
45	1,0000	0,9995	0,9943	0,8689	0,1841
46	1,0000	0,9997	0,9969	0,9070	0,2421

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Die Auswahl der 100 Personen kann als Bernoulli-Kette der Länge 100 angesehen werden, denn: 1) Es werden nur zwei Ergebnisse unterschieden: Es liegt eine Allergie vor oder nicht. 2) Die Personen werden zufällig ausgewählt. 3) Da „ohne Zurücklegen gezogen“ wird, verändert sich die Wahrscheinlichkeit zwar, aber wegen der großen Gesamtheit so gering, dass dies vernachlässigt werden und die Trefferwahrscheinlichkeit p als konstant angesehen werden kann.	5	10	
b)	X sei die Anzahl der Allergiker unter den 100 Personen. Mithilfe der Formel $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ oder durch Ablesen aus dem angefügten Ausschnitt aus der Tabelle der summierten Binomialverteilung erhält man: $P(X = 33) = P(X \le 33) - P(X \le 32) = 0{,}0844$. Die Wahrscheinlichkeit, dass 33 von 100 getesteten Personen Allergiker sind, beträgt etwa 8,4 %. Bei der Bearbeitung der folgenden Aufgabenteile bietet sich ebenfalls die Tabelle an: $P(X \ge 25) = 1 - P(X \le 24) = 1 - 0{,}0281 = 0{,}9719$. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei 100 getesteten Personen mindestens 25 Allergiker sind, beträgt etwa 97,2 %. $P(X \le 20) = 0{,}0024$. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei 100 getesteten Personen höchstens 20 Allergiker sind, beträgt etwa 0,2 %.	15		
c)	• Bezeichnet man mit B: „Beide Elternteile sind Allergiker“, E: „Ein Elternteil ist Allergiker“ und K: „Kein Elternteil ist Allergiker“, so gilt wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit: $P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, $P(E) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$ sowie $P(K) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. • Mit der Bezeichnung A: „Die ausgewählte Person ist Allergiker“ ergibt sich aus dem Text: $P(A\|B) = 0{,}6$, $P(A\|E) = 0{,}4$ sowie $P(A\|K) = 0$. Für die nächste Generation folgt dann mithilfe eines Baumdiagramms oder mit einem rein formalen Ansatz: $P(A) = P(A\|B) \cdot P(B) + P(A\|E) \cdot P(E) + P(A\|K) \cdot P(K) =$ $\frac{6}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{9} + 0 = \frac{11}{45} < \frac{1}{3}$.	5	10	10

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	• Getestet wird die Nullhypothese H_0: $p \le \frac{1}{3}$. Hierbei handelt es sich um einen einseitigen Test. Gesucht ist also das kleinste k, für das gilt: $P(X \ge k) = \sum_{i=k}^{100} \binom{100}{i} \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{100-i} \le 0{,}05$. • Bei Benutzung der beigefügten Tabelle nutzt man die Beziehung $P(X \ge k) = 1 - P(X \le k-1)$ aus. Es ergibt sich $P(X \ge 41) = 0{,}0659$ und $P(X \ge 42) = 0{,}0434$. Also ist $k = 42$. Haben 42 oder mehr der 100 untersuchten Kinder eine Allergie, sollte man die Nullhypothese verwerfen. • Wäre der Anteil an Allergikern unter fünfjährigen Kindern $p = 0{,}4$, so bliebe dies unentdeckt mit der Wahrscheinlichkeit $\sum_{i=0}^{41} \binom{100}{i} \cdot 0{,}4^i \cdot 0{,}6^{100-i} = 0{,}6225 \approx 62{,}3\,\%$. Auch diesen Wert entnimmt man der Tabelle. Dass diese Wahrscheinlichkeit recht hoch ist (> 50%), ist nicht verwunderlich, da der Erwartungswert für $p = 0{,}4$ (also $\mu = 40$) noch zum Annahmebereich der Hypothese H_0 gehört.		30	15
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

STOCHASTIK 2

III.2 Klassischer Teetassentest

In den Kreisen des englischen Hochadels wird gerne Tee getrunken. Einige Damen rühmen sich sogar, am Geschmack zu erkennen, ob zuerst der Tee in der Tasse war und dann die Milch hinzukam oder ob umgekehrt zuerst die Milch eingegossen wurde und dann der Tee hinzukam.
Während eines nachmittäglichen Teekränzchens wollen einige Damen ihre Fähigkeiten überprüfen. Dazu werden den Damen 10 Tassen Tee mit Milch vorgesetzt, die in zufälliger Reihenfolge mit Milch und Tee gefüllt wurden. Die Anzahl der richtigen Angaben der Reihenfolge wird notiert.

a) Gehen Sie zunächst davon aus, dass eine Dame einfach nur rät, d. h. dass die Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}5$ ist.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Dame durch reines Raten genau 7 richtige Angaben macht.

Bei 9 oder mehr richtigen Angaben will man der entsprechenden Dame eine geschmackliche Begabung zuerkennen:
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Dame, die ja nur rät, diese Begabung zuerkannt werden muss.

b) Nehmen Sie an, dass eine Dame mit gut ausgeprägtem Geschmacksempfinden die Reihenfolge von Tee oder Milch mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}7$ erkennt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der man ihre Begabung nicht erkennt, wenn die Entscheidungsregel aus Aufgabenteil a), also mindestens 9 richtige Angaben, beibehalten wird.

c) Einmal in Teelaune gekommen, denken sich die Damen einen weiteren Test aus.
5 Paare von verschieden zubereiteten Tees werden zur Auswahl gestellt. Ein Paar besteht jeweils aus zwei Tassen, die in unterschiedlicher Reihenfolge befüllt wurden.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, alle Reihenfolgen richtig zu erkennen. Reines Raten wird vorausgesetzt.

d) Einer Dame ist der ursprüngliche Test mit 10 Tassen nicht gut genug. Sie schlägt einen Test mit 25 Tassen vor, die in beliebiger Reihenfolge zufällig befüllt werden. Eine Person soll als geschmacklich begabt gelten, wenn Sie mindestens M richtige Angaben macht.

Ermitteln Sie die kleinste Zahl M so, dass man einer Person, die nur durch reines Raten ihre Entscheidung fällt, mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5 % das Prädikat „geschmacklich begabt“ zuerkennt.

Ermitteln Sie entsprechend zum Aufgabenteil b) auch bei diesem Test die Wahrscheinlichkeit, mit der man die Begabung der Dame mit ausgeprägtem Geschmacksempfinden ($p = 0{,}7$) mit dem so konstruierten Test nicht erkennt.

e) Interpretieren Sie die beiden möglichen Versuchsausgänge „eine Dame besteht den Test aus Aufgabenteil d)“ bzw. „eine Dame besteht den Test aus Aufgabenteil d) nicht“ und nehmen Sie insbesondere Stellung zu den unterschiedlichen Ergebnissen von b) und d).

f) Beim Testen von Hypothesen kommt es sehr stark darauf an, was man für Vorstellungen von der Situation hat und was man darauf aufbauend eigentlich zeigen möchte. In dieser Aufgabe wird z. B. davon ausgegangen, dass eine Trefferwahrscheinlichkeit kleiner als 0,5 nicht sinnvoll ist. Es wurde also im Prinzip einseitig getestet.
Es kann aber auch bei einem „Teetassentest“ durchaus sinnvoll sein, einen zweiseitigen Test durchzuführen.
Begründen Sie jeweils ein Argument, das für einen einseitigen bzw. einen zweiseitigen Test spricht.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Es sei X die Anzahl der richtig geratenen Reihenfolgen. X ist binomialverteilt mit $p = 0{,}5$. Mithilfe der Tafel zur Binomialverteilung oder der entsprechenden Formel erhält man: $P(X=7)=\binom{10}{7}\cdot 0{,}5^7\cdot 0{,}5^3=0{,}1172$. Die Wahrscheinlichkeit, genau 7 Reihenfolgen richtig zu raten, beträgt etwa 11,7 %. Ebenfalls mit Hilfe der Tafel für die summierte Binomialverteilung oder der entsprechenden Formel erhält man: $P(X\ge 9)=\binom{10}{9}\cdot 0{,}5^{10}+\binom{10}{10}\cdot 0{,}5^{10}=1-0{,}9893=0{,}0107$. Die Wahrscheinlichkeit, dass einer ratenden Dame die Begabung zuerkannt wird, beträgt etwa 1,1 %.	15		
b)	„Nicht erkennen“ bedeutet nach der Entscheidungsregel, dass die entsprechende Dame 8 oder weniger richtige Reihenfolgen bestimmt. Sei Y die Anzahl der richtigen Reihenfolgen mit $p = 0{,}7$, so ist Y wieder binomialverteilt und man erhält mithilfe der Tafel für summierte Binomialverteilungen oder der entsprechenden Formel: $P(Y\le 8)=\sum_{k=0}^{8}\binom{10}{k}\cdot 0{,}7^k\cdot 0{,}3^{10-k}=1-0{,}1493=0{,}8507$. Die Wahrscheinlichkeit, mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}7$ nicht erkannt zu werden, beträgt etwa 85,1 %.	10		
c)	Bei einem Tassenpaar reicht das Benennen einer Tasse, weil die Versuchsbedingungen bekannt sind. Die Wahrscheinlichkeit für das richtige Benennen von 5 Tassenpaaren beträgt demnach: $0{,}5^5 = 0{,}03125$.		15	
d)	Der Tabelle für summierte Binomialverteilungen entnimmt man unmittelbar für $p = 0{,}5$, dass die Wahrscheinlichkeit, dass man weniger oder gleich k Tassen richtig rät, mit aufsteigendem k für $k = 17$ erstmals größer oder gleich 95 % ist. ($P(X_{25}\le 16)=0{,}9461$ und $P(X_{25}\le 17)=0{,}9784$) bzw. $P(X_{25}\ge 17)=0{,}0539$ und $P(X_{25}\ge 18)=0{,}0216$. Entsprechend der Fragestellung ist also $M = 18$ zu wählen. Ein nicht signifikantes Ergebnis – d.h. man erkennt die Begabung nicht – liegt vor, wenn $X_{25}\le 17$. Der Tabelle entnimmt man, dass für $p = 0{,}7$ gilt: $P(X\le 17)=1-0.5118=0{,}4882$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Die Wahrscheinlichkeit, mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}7$ nicht erkannt zu werden, beträgt etwa 48,8 %.		30	
e)	Wenn eine Dame den Test besteht, wird sie mit Verweis auf statistische Signifikanz (auf dem 5 %-Niveau) zu Recht behaupten können, dass sie „geschmacklich begabt ist“. Betrug in Aufgabenteil b) die Wahrscheinlichkeit, dass eine Dame mit ausgeprägter Begabung ($p = 0{,}7$) nicht erkannt wird, etwa 85 %, so ist dieser Wert bei dem verbesserten Test aus d) zwar auf 49 % gesunken, das ist aber immer noch ein sehr hoher Wert. Wenn also eine Dame den Test nicht besteht, so kann oder wird sie bis auf weiteres durchaus zu Recht behaupten, dass damit nicht widerlegt sei, dass sie den Unterschied der Reihenfolge des Eingießens von Tee und Milch erkennen kann.		10	10
f)	Begründung für einen einseitigen Test: Wahrscheinlichkeiten kleiner als 0,5 liegen unterhalb der reinen Ratewahrscheinlichkeit, was „schlechter als reines Raten“ bedeuten würde. Das macht hier keinen Sinn. Begründung für einen zweiseitigen Test: Wenn eine Dame nur wenige Treffer erzielt, bedeutet das nicht notwendig, dass sie nur rät, sondern möglicherweise auch, dass sie ziemlich gut schmeckt, allerdings die Zuordnungen verwechselt. Wenn man dies vermutet, sollte man zweiseitig testen.			10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

ANALYSIS 1

I.1 Produktvermarktung

Ein IT-Unternehmen hat ein neues Gerät entwickelt. Nun wird geplant, unter welchen Bedingungen dieses Gerät möglichst gut vermarktet werden kann.
Zuerst werden die Produktionskosten untersucht. Man weiß, dass die festen Kosten (Fixkosten) des Unternehmens pro Monat 250 Geldeinheiten (GE) betragen.

a) Die Kalkulationsabteilung hat berechnet, dass die Kosten (inklusive Fixkosten) bei einer Produktion von 10 Mengeneinheiten (ME) 302 Geldeinheiten und bei 20 Mengeneinheiten 336 Geldeinheiten betragen. Es wird nun versucht, eine Funktion aufzustellen, die die Gesamtkosten für beliebige Produktionszahlen beschreibt. Ein erster Ansatz wird mit einer quadratischen Funktion versucht.

- Berechnen Sie die Gleichung einer quadratischen Funktion, die zu den gegebenen Daten passt.
- Sie erhalten eine Funktion, die bei etwa 34 ME ein Maximum besitzt.
  Begründen Sie, warum Kostenfunktionen eine solche Eigenschaft nicht haben können.

Durch weitere Berechnungen erhalten die Kalkulatoren schließlich mit

$$K(x) = 0{,}002x^3 - 0{,}15x^2 + 6{,}5x + 250$$

die Gleichung einer Gesamtkostenfunktion *K*, die die Produktionskosten hinreichend genau beschreibt.

b) Unter den „Grenzkosten“ versteht man in der Praxis die zusätzlich entstehenden Kosten bei einer Produktionserhöhung um eine Mengeneinheit.
Berechnen Sie die Grenzkosten (der Funktion *K*) für $x = 10$ und $x = 35$, d. h. berechnen Sie die zusätzlichen Kosten, wenn Sie 11 ME statt 10 produzieren bzw. 36 statt 35 ME.

c) Im Allgemeinen wird die Ableitungsfunktion K' auch als Grenzkostenfunktion von *K* bezeichnet. Berechnen Sie $K'(10)$ und $K'(35)$ und interpretieren Sie den (wenn auch geringen) Unterschied zu den im Aufgabenteil b) berechneten Grenzkosten im Kontext der Aufgabe.

d) Der Wendepunkt einer Kostenfunktion *K* wird häufig auch als „Kostenkehre“ bezeichnet.
Bestimmen Sie den Wendepunkt und interpretieren Sie die Bezeichnung „Kostenkehre“ im Kontext der Aufgabe.

e) Ohne Rücksicht auf die tatsächlichen Verkaufszahlen wird für eine erste Kalkulation ein Preis von 15 GE für eine Mengeneinheit angenommen. Der Erlös *E* der Firma ergibt sich aus dem Produkt „Menge mal Preis“. Der erzielte Gewinn *G* in Abhängigkeit von der produzierten Menge *x* ergibt sich als Differenz aus dem Erlös *E* und den zugehörigen Gesamtkosten *K*, also $G(x) = E(x) - K(x)$. Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass alle produzierten Geräte auch verkauft werden.

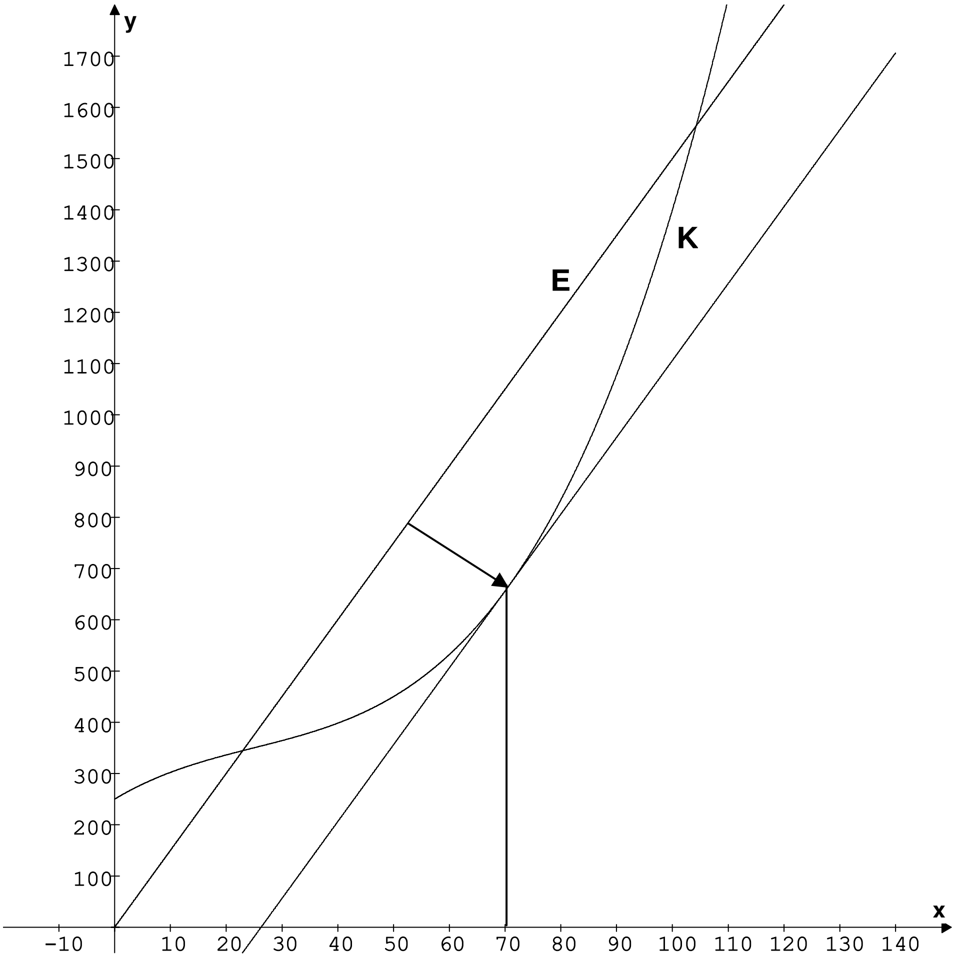
- Bestimmen Sie die Gleichungen der Erlösfunktion *E* und der Gewinnfunktion *G*.
- Bestimmen Sie, bei welcher produzierten Menge der Gewinn *G* maximal wird, und geben Sie den maximalen Gewinn an. Die beiden letzten Angaben sollen in der Antwort auf 2 Nachkommastellen gerundet werden.

f) In diesem Aufgabenteil geht es um eine Veranschaulichung des Ergebnisses aus dem Aufgabenteil e). Bestimmen Sie ein grafisches Verfahren, wie man den *x*-Wert des Gewinnmaximums grafisch ermitteln kann.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Fixkosten in Höhe von 250 GE sind die Kosten, die immer entstehen, auch wenn nicht produziert wird. Also ist 250 der Koeffizient, der den konstanten Anteil angibt. Der Ansatz für den Funktionsterm einer quadratischen Funktion lautet demnach: $f(x)=ax^2+bx+250$. Über die gegebenen Daten erhält man den folgenden Ansatz: $(f(10))\ \ 100a+10b+250\ =302(\mathrm{I})$ und $(f(20))\ \ 400a+20b+250=336\ (\mathrm{II})$ $\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}\qquad 200a-250=-268$ $200a=-18$ $a=-\frac{9}{100}=-0,09$ Das Ergebnis für a wird nun in (I) eingesetzt und man erhält: $100\cdot\left(-\frac{9}{100}\right)+10b+250=302$ $10b=61$ $b=\frac{61}{10}=6,1$. Insgesamt erhält man folgende Funktionsgleichung: $f(x)=-\frac{9}{100}x^2+\frac{61}{10}x+250=-0,09x^2+6,1x+250$. Da die Gesamtkosten einer Produktion mit zunehmender Produktionsmenge x monoton steigen, kann eine Kostenfunktion keine Extremwerte besitzen.	10	10	
b)	$K(10)=302$ und $K(11)=306,012$, also betragen die Grenzkosten bei der Produktionserhöhung von 10 auf 11 ME ca. 4,01 GE. $K(35)=379,5$ und $K(36)=382,912$, also betragen die Grenzkosten bei der Produktionserhöhung von 35 auf 36 ME ca. 3,41 GE.	5		
c)	$K'(x)=0,006x^2-0,30x+6,5$. Danach gilt $K'(10)=4,10$ und $K'(35)=3,35$. Die Ableitungsfunktion gibt die Änderung der Funktionswerte in einer „sehr kleinen“ Umgebung an. Sie beschreibt die Steigung der Tangenten. Die Grenzkosten in Aufgabenteil b) beziehen sich immer auf den Unterschied 1 der x-Werte. Sie beschreiben die Steigung von Sekanten.	5	5	
d)	Der Wendepunkt von K wird über die 2. Ableitung berechnet. $K''(x)=0,012x-0,3$. Mit $0,012x_w-0,3=0$ ergibt sich $x_w=25$. Da die dritte Ableitung die konstante Funktion mit dem Funktionswert 0,012 ist, ist $x_w=25$ eine Wendestelle. Der Wendepunkt hat die Koordinaten $W(25\mid 350)$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Bis zum Wendepunkt (Kostenkehre) wird die Zunahme der Kosten immer geringer, während sie nach dem Wendepunkt immer stärker ansteigt.		20	
e)	Die Erlösfunktion E hat die Gleichung $E(x) = p(x) \cdot x = 15x$. Für die Gewinnfunktion G gilt: $G(x) = E(x) - K(x)$ $= 15 \cdot x - (0{,}002x^3 - 0{,}15x^2 + 6{,}5x + 250)$ $= -0{,}002x^3 + 0{,}15x^2 + 8{,}5x - 250$. Der Gewinn wird höchstens an den Stellen maximal, an denen die erste Ableitung der Gewinnfunktion Null ist. $G'(x_E) = 0$ bedeutet: $-0{,}006x^2 + 0{,}3x + 8{,}5 = 0$ $x^2 - 50x - \frac{4250}{3} = 0$ $x_{1,2} = 25 \pm \sqrt{25^2 + \frac{4250}{3}}$ $x_{1,2} = 25 \pm \sqrt{\frac{6125}{3}}$ $x_{1,2} = 25 \pm \frac{35\sqrt{15}}{3}$. $x_1 \approx 70{,}18$ und $x_2 \approx -20{,}18$ x_2 liegt nicht im Definitionsbereich. Da G einen negativen Leitkoeffizienten hat und somit für „große“ x- Werte gegen „minus Unendlich geht“, hat G bei x_1 ein Maximum. *Hinweis: Hier ist u. a. auch ein Argumentieren mit der zweiten Ableitung möglich.* Durch Einsetzen erhält man $G(70{,}18) \approx 394{,}01$. Bei einer Produktion von 70,18 Mengeneinheiten ist der Gewinn mit ca. 394,01 Geldeinheiten maximal.		25	
f)	Der Gewinn G bestimmt sich aus der Gleichung $G(x) = E(x) - K(x)$. Das Gewinnmaximum bestimmt sich aus der Gleichung $G'(x) = 0$ und damit $E'(x) - K'(x) = 0$ bzw. $E'(x) = K'(x)$. *Der Gewinn ist genau dann maximal, wenn Grenzerlös (Preis) und Grenzkosten übereinstimmen.*			

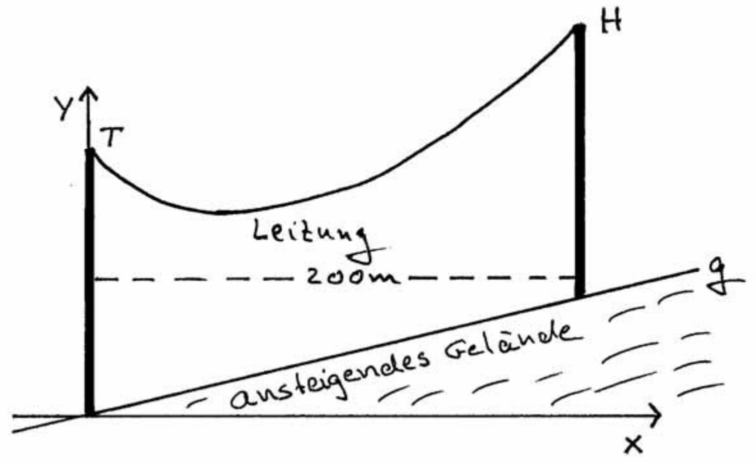
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Grafisch bedeutet dies: Gesucht ist jene Stelle von *K*, an der die Steigung gleich der Steigung von *E* ist.  Durch Parallelverschiebung des Graphen von *E* lässt sich die Stelle von *K* konstruieren, für die gilt: $E'(x) = K'(x)$. Der entsprechende *x*-Wert ist die gesuchte Produktion, für die der Gewinn maximal ist.			20
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

ANALYSIS 2

I.2 Überlandleitung

Zwei Strommasten einer elektrischen Überlandleitung von je 27 m Höhe stehen jeweils vertikal (lotrecht)auf einem gleichmäßig ansteigenden Gelände. Ihr Abstand beträgt 200 m. Der Höhenunterschied der Fußpunkte der Masten beträgt 15 m. Die Spitzen der Masten – wir bezeichnen sie mit T (tieferer Mast) und H (höherer Mast) – sind durch eine Hochspannungsleitung verbunden, wie Sie es der nicht maßstabsgetreuen Skizze entnehmen können.

Wir führen wie folgt ein zweidimensionales Koordinatensystem ein: Der Nullpunkt ist der Fußpunkt des tieferen Mastes. Die x-Achse verläuft waagerecht, die y-Achse zeigt vertikal nach oben:



a) Nehmen Sie vereinfachend an, dass die Leitung durch die Schwerkraft zwischen T und H in Form einer Parabel durchhängt. Berechnen Sie die Gleichung der Parabel p, wenn bekannt ist, dass die Leitung auf den oberen Mast B mit einer Steigung von 0,195 trifft.

Zur Kontrolle: $p(x) = \frac{3}{5000}x^2 - \frac{9}{200}x + 27$

b) Das ansteigende Gelände, d. h. die Verbindungslinie zwischen den Fußpunkten der Masten, lässt sich durch eine Gerade g beschreiben.
Berechnen Sie die Gleichung dieser Geraden g.
Zeigen Sie, dass an der Stelle $x = 100$ die Leitung dem Erdboden in vertikaler Richtung am nächsten kommt, d. h. dort ist das Minimum von $p(x) - g(x)$.

Ermitteln Sie außerdem die entsprechenden Koordinaten der Punkte F auf der Parabel und G auf dem ansteigenden Gelände, in welchen dieser vertikale Abstand minimal ist und geben Sie diesen Abstand an.

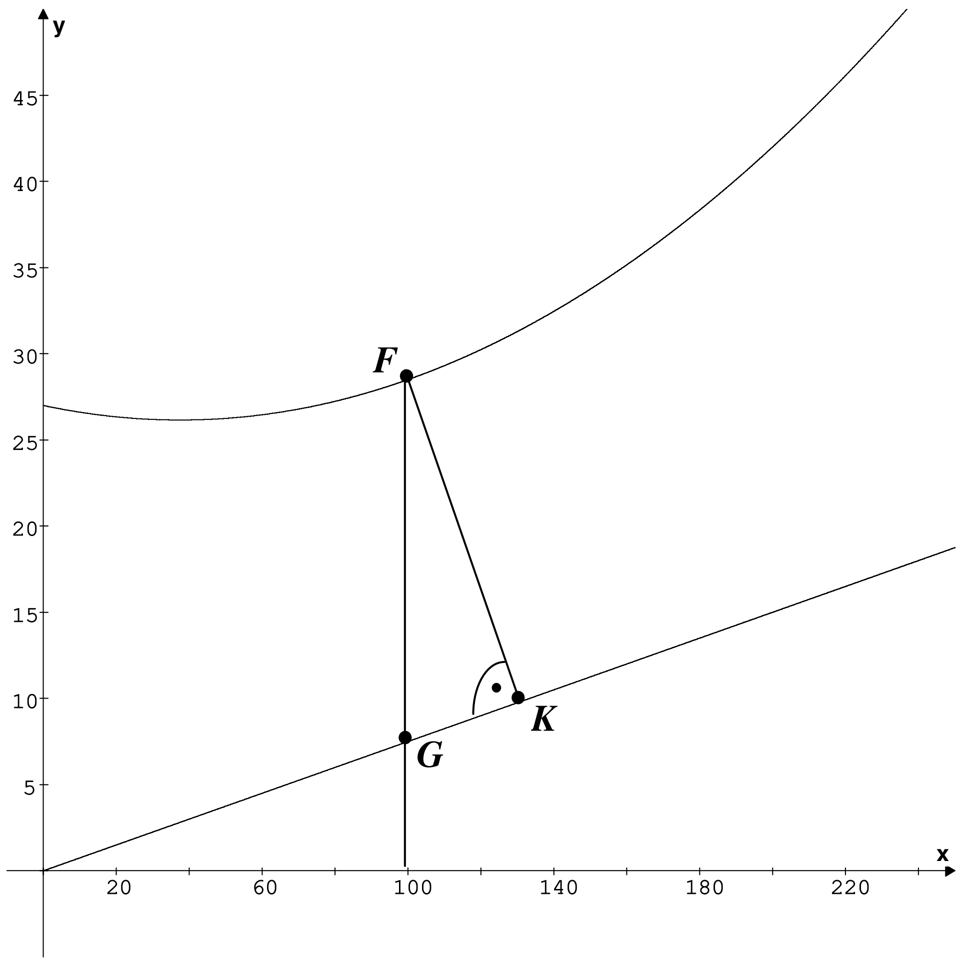
c) Es gibt Punkte auf dem ansteigenden Gelände, deren Abstand zu F kleiner als $\left|\overline{FG}\right|$ ist.

Begründen Sie, dass der Punkt K auf der Geraden, der unter diesen Punkten den kleinsten Abstand zu F hat, auf der Geraden durch F liegt, die den Graphen von g senkrecht schneidet.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes K und den Abstand von K zu F.

d) Im Aufgabenteil c) ist von dem Punkt F ausgegangen worden, der den vertikal kleinsten Abstand zur Geraden g hat. Nun soll der global kürzeste Abstand von Punkten der Parabel und Punkten der Geraden untersucht werden.
Begründen Sie die Aussage: Der Punkt der Parabel mit dem global kürzesten Abstand zur Geraden g hat die gleiche Steigung (bezüglich der Parabel) wie die Gerade g.
Untersuchen Sie, ob der Punkt F sogar der Punkt ist, der den global kürzesten Abstand zur Geraden g hat.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	I	II	III
a)	Ansatz für die Parabelgleichung: $p(x) = ax^2 + bx + c$. Dann ist $p'(x) = 2ax + b$. p verläuft durch die Punkte $A(0\|27)$ und $B(200\|42)$; zusätzlich gilt $p'(200) = 0{,}195 = \frac{39}{200}$. Einsetzen der bekannten Daten liefert: $p(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 27 \quad (1)$ $p(200) = a \cdot 200^2 + b \cdot 200 + c = 42 \quad (2)$ $p'(200) = 2a \cdot 200 + b = 0{,}195 = \frac{39}{200} \quad (3)$ Aus (1) folgt sofort $c = 27$. $200 \cdot (3) - (2)$ ergibt $a \cdot 200^2 - 27 = 39 - 42$ $a \cdot 200^2 = 24$ $a = \frac{24}{40000} = \frac{3}{5000} = 0{,}0006$ Wird dieses Ergebnis in (2) eingesetzt, erhält man: $\frac{24}{200^2} \cdot 200^2 + b \cdot 200 + 27 = 42$ $24 + b \cdot 200 = 15$ $b \cdot 200 = -9$ $b = -\frac{9}{200} = -0{,}045$. Insgesamt folgt damit: $p(x) = \frac{3}{5000}x^2 - \frac{9}{200}x + 27 = 0{,}0006x^2 - 0{,}045x + 27$.	20		
b)	Die Gerade verläuft durch die Punkte $C(0\|0)$ und $D(200\|15)$, ist also eine Ursprungsgerade mit der Steigung $\frac{15}{200}$. Also $g(x) = \frac{3}{40}x = 0{,}075x$. Gesucht ist der Minimalwert von $h(x) = p(x) - g(x)$. Für $x = 0$ und $x = 200$ haben p und g die gleiche Differenz von 27. Die quadratische Differenzfunktion h hat also ihre Symmetrieachse damit ihr Minimum in der Mitte bei $x_E = 100$. *Andere (wenn auch weniger elegante) Lösungen sind natürlich zulässig, z.B.* Gesucht ist der Minimalwert von $h(x) = p(x) - g(x) = \frac{3}{5000}x^2 - \frac{24}{200}x + 27$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Aus $h'(x_E)=0$ *erhält man* $h'(x_E)=\frac{3}{2500}x_E-\frac{24}{200}=0$. *D. h.* $\frac{3}{2500}x_E=\frac{24}{200}$ $x_E=\frac{24}{200}\cdot\frac{2500}{3}=100$. In den Punkten $F(100\mid p(100))=F(100\mid 28{,}5)$ und $G(100\mid g(100))=G(100\mid 7{,}5)$ kommt die Hochspannungsleitung dem Erdboden am nächsten. Der minimale vertikale Abstand beträgt also 21 m. *Grafische Darstellung (nicht gefordert):* 	15	20	
c)	Sei K der Schnittpunkt der Geraden durch F, die g senkrecht schneidet, mit g. Sei $L\neq K$ ein weiterer Punkt auf g. Dann bilden die Punkte L, K und F ein rechtwinkliges Dreieck. $\overline{LF}$ als Hypotenuse ist immer länger als die Kathete $\overline{KF}$. Damit ist die Behauptung gezeigt.			

Lösungsskizze

Die Verbindungslinie von F und G steht nach Konstruktion nicht senkrecht auf g. Also ist *G nicht der gesuchte Punkt.*

Eine Gerade, die senkrecht auf dem Graphen von g steht, hat als Steigung den negativen Kehrwert der Steigung von g, *also* $-\frac{40}{3} \approx -13{,}3$. Außerdem weiß man, dass sie durch den Punkt F verläuft.

Sei l die gesuchte Gerade. Dann gilt also („Punkt-Steigungs-Form“):

$$l(x) = 28{,}5 - \frac{40}{3} \cdot (x - 100) = -\frac{40}{3}x + \frac{8171}{6} = -\frac{40}{3}x + 1361\frac{5}{6}.$$

Andere Variante:

Sei l die gesuchte Gerade. Durch Einsetzen erhält man:

$l(100) = -\frac{40}{3} \cdot 100 + f = 28{,}5$. *Und es ergibt sich*

$f = 28{,}5 + \frac{40}{3} \cdot 100 = \frac{8171}{6} = 1361\frac{5}{6} \approx 1361{,}8$. *Man erhält also*

$l(x) = -\frac{40}{3}x + 1361\frac{5}{6}$.

Die x-Koordinate des Schnittpunkts der Graphen von g und l erhält man durch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen:

$$\begin{aligned} g(x) &= l(x) \\ \frac{3}{40}x &= -\frac{40}{3}x + \frac{8176}{6} \\ \frac{1609}{120}x &= \frac{8176}{6} \\ x &= \frac{8176}{6} \cdot \frac{120}{1609} \\ x &= \frac{163520}{1609} \approx 101{,}63. \end{aligned}$$

Durch Einsetzung in die Funktionsgleichung von g erhält man als Koordinaten von K: $\left(101\frac{1011}{1609} \middle| 7\frac{1001}{1609}\right) \approx (101{,}63 \mid 7{,}62)$.

Der Abstand von F zu K kann nach dem Satz des Pythagoras berechnet werden:

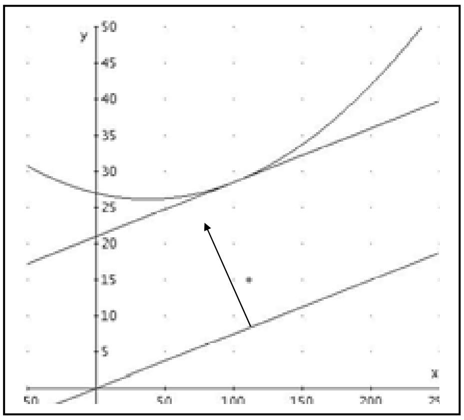
$$\begin{aligned} \left|\overline{FK}\right| &= \sqrt{\left(28{,}5 - 7\frac{1001}{1609}\right)^2 + \left(100 - 101\frac{1011}{1609}\right)^2} \\ &\approx \sqrt{(28{,}5 - 7{,}62)^2 + (100 - 101{,}63)^2} \\ &\approx 20{,}94. \end{aligned}$$

Der minimale Abstand eines Punktes auf der Geraden g zum Punkt F beträgt etwa 20,9 m.

Zuordnung, Bewertung	I	II	III
		15	10

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

d) Wie wir in c) begründet haben, ist der kürzeste Abstand von g zu einem Punkt P auf der Parabel die Länge des Lotes von P auf g. Also ist – wie man der Skizze entnimmt – der gesuchte global kürzeste Abstand von g zu Punkten auf der Leitung (der Parabel) der Abstand von g zu dem Berührpunkt einer zu g parallelen Tangenten an die Parabel.



Alternative Begründung:
Der Punkt der Parabel, der den global kürzesten Abstand zur Geraden hat, verändert sich nicht, wenn man die Gerade parallel verschiebt. Verschiebt man die Gerade nun so parallel, dass die verschobene Gerade die Parabel berührt, so ist der Berührpunkt sicherlich der Punkt mit dem kürzesten Abstand. Damit die verschobene Gerade die Parabel nur berührt, muss sie in dem entsprechenden Punkt Tangente zur Parabel sein. Insbesondere hat sie die gleiche Steigung wie der Berührpunkt bezüglich der Parabel.

Es ist also diejenige Stelle x_1 zu berechnen, für die gilt:

$p'(x_1) = \frac{3}{40} \quad (= g'(x_1))$ d. h.

$$\frac{3}{2500}x_1 - \frac{9}{200} = \frac{3}{40}$$

$$\frac{3}{2500}x_1 = \frac{9}{200} + \frac{15}{200} = \frac{24}{200}$$

$$x_1 = \frac{24}{200} \cdot \frac{2500}{3} = 100$$

Da F die x-Koordinate 100 hat, ist F sogar der Punkt, der global den kleinsten Abstand zur Geraden g hat.

		I	II	III
d)			10	10
	Insgesamt 100 BWE	35	45	20

ANALYSIS 3

I.3 e-Funktion

Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = x \cdot e^x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

a) Berechnen Sie die Extrem- und Wendepunkte von f.
Begründen Sie, dass f keine Nullstellen besitzt.

b) Bestimmen Sie, wie sich f für $x \to -\infty$ und für $x \to \infty$ verhält.
Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall [–6; 1,5] in ein Koordinatensystem ein
(1 LE $\hat{=}$ 2 cm).

c) Bestimmen Sie die Konstante $k \in \mathbb{R}$ so, dass die folgende Funktion F_k eine Stammfunktion von f ergibt.

$$F_k(x) = e^x(x-k) + x, \quad x \in \mathbb{R},$$

Hinweis zum Weiterrechnen: k = 1. Reines Einsetzen und Überprüfen ist hier aber kein zulässiger Lösungsweg.

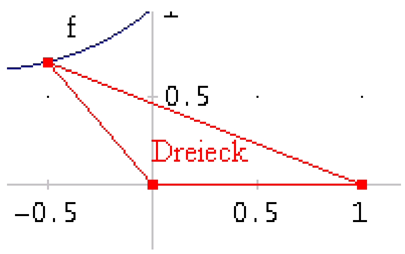
d) Zeigen Sie, dass die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall [0;1] den Flächeninhalt 2 FE hat.

e) Es gibt Ursprungsgeraden, die die Fläche aus d) in zwei Teile zerlegen.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung einer Ursprungsgeraden, für die die Flächeninhalte der beiden Teilflächen im Verhältnis 2:3 stehen.

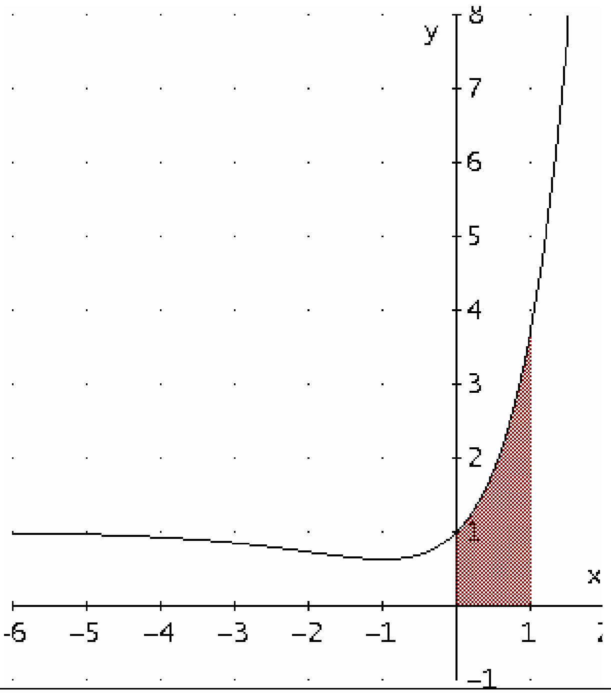
f) Die Punkte $(0\,|\,0)$, $(1|0)$ und $(u\,|\,f(u))$ mit $u \in \mathbb{R}$ bilden ein Dreieck.

Ermitteln Sie den Wert von u, für den der Flächeninhalt des Dreiecks extremal wird. Bestimmen Sie die Art der Extremstelle.

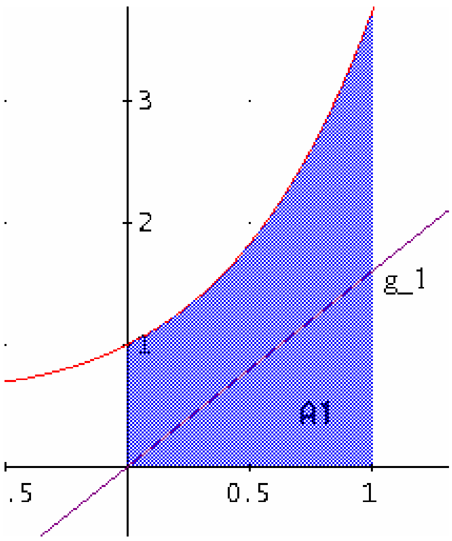


Beispiel für ein Dreieck mit u = –0,5

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Benötigt werden die Funktion und ihre Ableitungen: $f(x) = x \cdot e^x + 1$ $f'(x) = e^x + x \cdot e^x = (x+1) \cdot e^x$ $f''(x) = e^x + (x+1) \cdot e^x = (x+2) \cdot e^x$ $f'''(x) = e^x + (x+2) \cdot e^x = (x+3) \cdot e^x$ Die Nullstellen der ersten Ableitung sind möglichen Extremstellen: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1) \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow x = -1$, da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Einsetzen dieser Stelle in die zweite Ableitung ergibt: $f''(-1) = e^{-1} > 0$, d. h. der Graph von f besitzt nur den Tiefpunkt $(-1 \mid -e^{-1} + 1) \approx (-1 \mid 0{,}63)$ und keine weiteren Extrempunkte. Die Nullstellen der zweiten Ableitung sind mögliche Wendestellen: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2) \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow x = -2$, da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Einsetzen dieser Stelle in die dritte Ableitung ergibt: $f'''(-2) = e^{-2} > 0$. Da die dritte Ableitung an dieser Stelle ungleich 0 ist, besitzt der Graph von f den Wendepunkt $(-2 \mid -2e^{-2} + 1) \approx (-2 \mid 0{,}73)$. Da es keine weiteren lokalen Extremwerte gibt, das Minimum von f aber positiv ist, besitzt f keine Nullstellen.	15	15	
b)	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$, denn e^x überwiegt jede Potenzfunktion. $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, denn es gilt $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$ und $\lim_{x \to \infty} x = \infty$.  	10	10	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>c)</td><td>Damit F_k eine Stammfunktion von f ergibt, muss gelten: $F_k'(x)=f(x)$. Man erhält:
$$\begin{aligned} F_k'(x) &= f(x)\\ e^x(x-k)+e^x+1 &= x\cdot e^x+1\\ x\cdot e^x-k\cdot e^x+e^x+1 &= x\cdot e^x+1\\ e^x-k\cdot e^x &= 0\\ (1-k)\cdot e^x &= 0\\ k &= 1. \end{aligned}$$
F_1 mit $F_1(x)=e^x(x-1)+x$ ist also eine Stammfunktion von f.</td><td></td><td>10</td><td>5</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Da f im Intervall von 0 bis 1 positiv ist, lässt sich der gesuchte Flächeninhalt als Integral über f bestimmen..
$$A=\int_0^1 f(x)dx=\left[F_1(x)\right]_0^1=\left[e^x(x-1)+x\right]_0^1=1-(-1)=2.$$
Der Flächeninhalt beträgt also 2 FE.</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Aus der Zeichnung entnimmt man, dass die gesuchte Gerade im Intervall [0; 1] unterhalb des Graphen von f verlaufen muss. Daher genügt es, den Flächeninhalt der Dreiecksfläche unter der Geraden g mit $g(x)=c\cdot x$ zu berechnen und gleich $\frac{2}{5}\cdot A$ bzw. $\frac{3}{5}\cdot A$ zu setzen, um die Geradensteigung c zu erhalten.

Die Dreiecksfläche A_1 hat (nach der Flächenformel für das Dreieck) den Flächeninhalt $A_1=\frac{c}{2}$.
Weiterhin gilt
$A_1=\frac{2}{5}\cdot 2=\frac{4}{5}$ bzw. $A_1=\frac{3}{5}\cdot 2=\frac{6}{5}$.
1. $\frac{1}{2}c=\frac{4}{5} \Leftrightarrow c=1{,}6$.
2. $\frac{1}{2}c=\frac{6}{5} \Leftrightarrow a=2{,}4$.
Die Geraden g_1 und g_2 mit den Funktionsgleichungen
$g_1(x)=1{,}6x$ bzw.
$g_2(x)=2{,}4x$
teilen also die Fläche in dem geforderten Verhältnis.

</td><td></td><td>10</td><td>5</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
f)	Das beschriebene Dreieck hat eine Grundlinie der Länge 1 mit zugehöriger Höhe der Länge $f(u)$. Der Flächeninhalt des Dreiecks berechnet sich somit zu $F_\Delta(u) = \frac{1}{2} f(u)$. Da f nur genau ein relatives Extremum, nämlich das Minimum an der Stelle $x = -1$, besitzt, hat auch F_Δ dort seine Minimalstelle. Für $u = -1$ wird der Flächeninhalt des Dreiecks minimal.			10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

LA/AG 1

II.1 Pyramide

Gegeben sei eine Pyramide mit dreieckiger Grundseite. Sie hat die Eckpunkte $A(3 \mid 0 \mid 0)$, $B(0 \mid 4 \mid 0)$, $C(\,0 \mid 0 \mid 0\,)$ und $D(\,1 \mid \frac{4}{3} \mid 9\,)$.

a) Zeichnen Sie die Pyramide *ABCD* in das beigefügte Koordinatensystem ein (s. Anlage).

b) Beschreiben Sie die Ebene ***E***, die durch die Punkte *A*, *B* und *C* aufgespannt wird und geben Sie die Koordinatengleichung dieser Ebene an.

c) Geben Sie von den sechs Kanten der Pyramide jeweils deren Mittelpunkte an und bezeichnen Sie diese mit M_{AB}, M_{AC} usw.

d) In der Pyramide *ABCD* sind mehrere Paare von Kanten windschief zueinander.

Nennen Sie diese Paare windschiefer Kanten.

Bestimmen Sie die Gleichungen der Verbindungsgeraden je zweier Mittelpunkte (M_{AB} usw.) windschiefer Kanten.

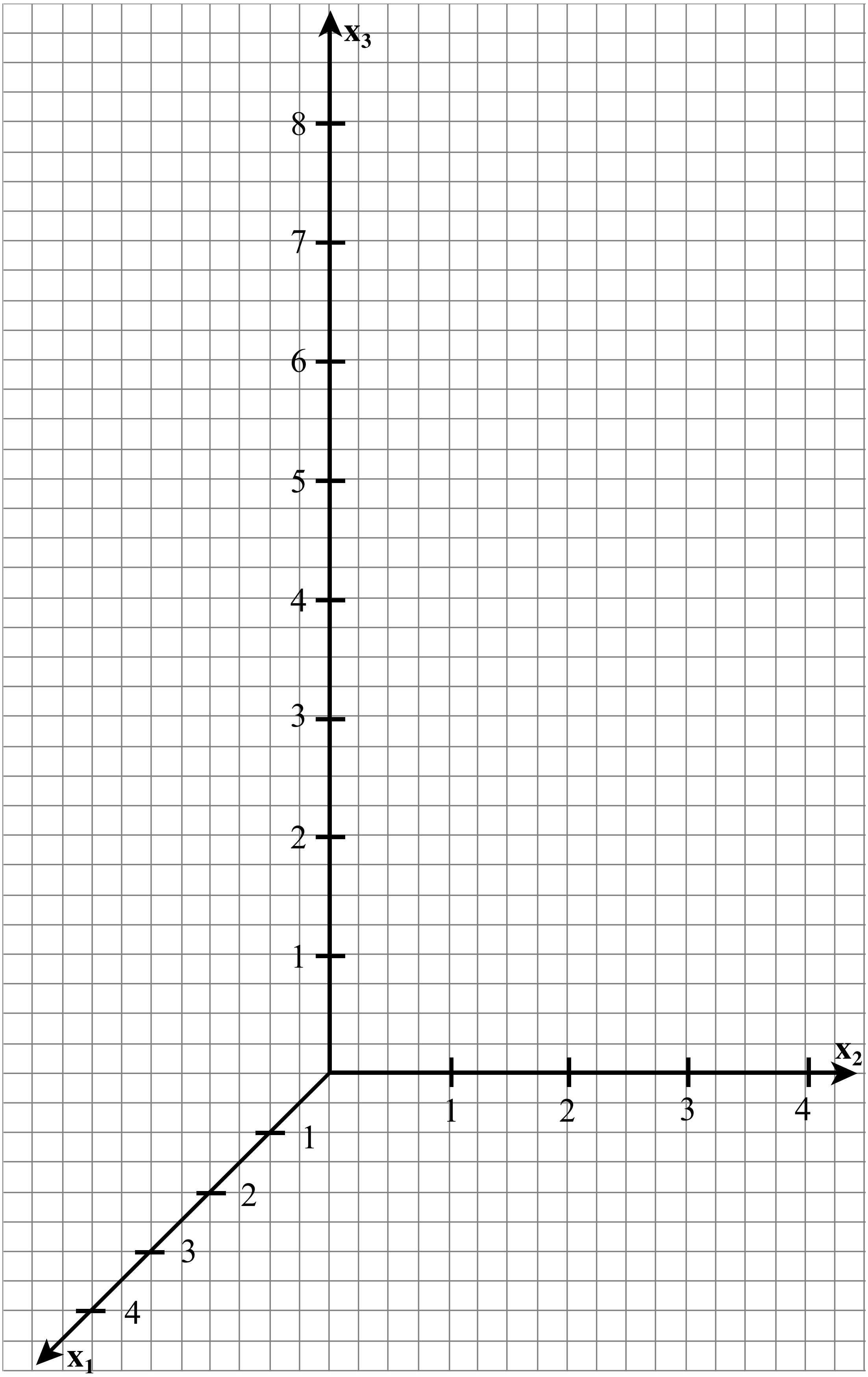
Zeichnen Sie diese drei Geraden in das Koordinatensystem mit ein.

Zeigen Sie, dass sich diese drei Verbindungsgeraden im Punkt $S\left(1 \mid \frac{4}{3} \mid \frac{9}{4}\right)$ schneiden.

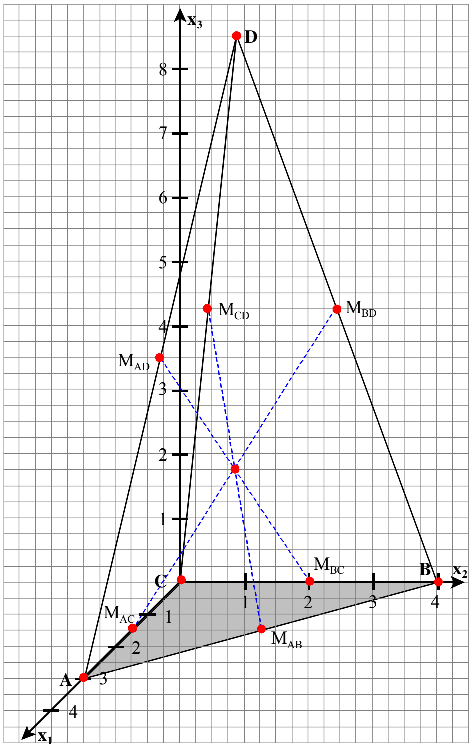
e) Bestimmen Sie den Projektionspunkt S_E von S auf die Ebene ***E*** und zeigen Sie, dass S_E die Strecke $\overline{CM_{AB}}$ im Verhältnis $2:1$ teilt.

f) Durch den Punkt *S* verläuft die zu ***E*** parallele Ebene ***E****. Bestimmen Sie, welchen Anteil am Gesamtvolumen der Pyramide *ABCD* die Pyramide „oberhalb" von ***E**** hat.

Anlage zur Aufgabe „Pyramide“



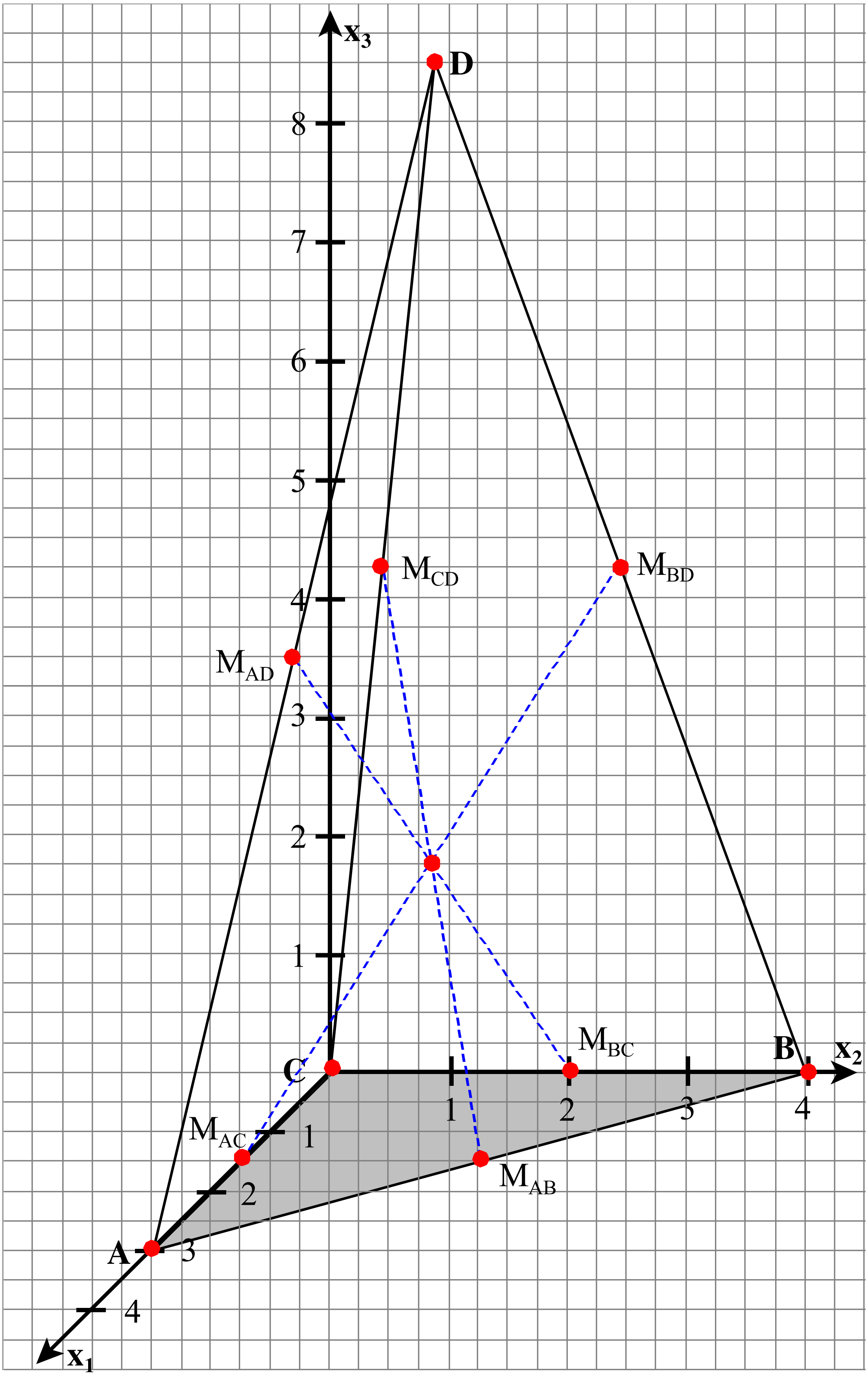
Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	*Korrekturhinweis:* *Im Anschluss an den Erwartungshorizont dieser Aufgabe ist eine Kopiervorlage in Originalgröße beigefügt.* 	5		
b)	$\boldsymbol{E}$ ist die x_1-x_2-Ebene, da x_3 jeweils gleich 0 ist. Daraus folgt sofort die Koordinatengleichung $x_3 = 0$.	5		
c)	$M_{AB} = (1{,}5 \mid 2 \mid 0)$, $M_{AC} = (1{,}5 \mid 0 \mid 0)$, $M_{AD} = \left(2 \mid \frac{2}{3} \mid 4{,}5\right)$, $M_{BC} = (0 \mid 2 \mid 0)$, $M_{BD} = \left(0{,}5 \mid \frac{8}{3} \mid 4{,}5\right)$, $M_{CD} = \left(0{,}5 \mid \frac{2}{3} \mid 4{,}5\right)$.	10		
d)	Paare windschiefer Kanten: $\{\overline{AB} \mid \overline{CD}\}$, $\{\overline{AC} \mid \overline{BD}\}$, $\{\overline{BC} \mid \overline{AD}\}$. g_1 sei die Verbindungsgerade von M_{AB} und M_{CD}, g_2 sei die Verbindungsgerade von M_{AC} und M_{BD}, g_3 sei die Verbindungsgerade von M_{BC} und M_{AD}. $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{4}{3} \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$, $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{8}{3} \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$, $g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{4}{3} \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$, mit $r, s, t \in \mathbb{R}$.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Durch Gleichsetzen von g_1 und g_2 erhält man das folgende Gleichungssystem:
$1{,}5 - r = 1{,}5 - s$
$2 - \frac{4}{3}r = \frac{8}{3}s$
$4{,}5r = 4{,}5s$.
Aus der ersten oder der dritten Gleichung folgt, dass $r = s$ gilt. Aus der zweiten Formel folgt: $r = \frac{1}{2}$. Diesen Wert für r in die Geradengleichung für g_1 eingestzt ergibt den Schnittpunkt $S\left(1 \mid \frac{4}{3} \mid \frac{9}{4}\right)$.
Zu zeigen ist noch, dass S auch auf g_3 liegt. Zu betrachten ist das Gleichungssystem:
$0 + 2t = 1$ (I)
$2 - \frac{4}{3}t = \frac{4}{3}$ (II)
$0 + \frac{9}{2}t = \frac{9}{4}$ (III)
Aus Gleichung (I) folgt $t = \frac{1}{2}$. Dieses in (II) und (III) eingesetzt ergibt $2 - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$ und $\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$. Beides sind wahre Aussagen, also liegt S auch auf g_3 und ist somit gemeinsamer Schnittpunkt aller drei Geraden.</td><td>5</td><td>35</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Da S_E in der x_1-x_2-Ebene liegt, hat S_E die Koordinaten $\left(1 \mid \frac{4}{3} \mid 0\right)$.
Die Verbindungsgerade von C und M_{AB} hat die Gleichung
$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$. Setzt man $k = \frac{2}{3}$, so erhält man, dass S_E auf der Verbindungsgeraden von C und M_{AB} liegt.
Weiterhin gilt: $\frac{\left|\overline{CS_E}\right|}{\left|\overline{S_E M_{AB}}\right|} = \frac{\sqrt{(1-0)^2 + \left(\frac{4}{3} - 0\right)^2}}{\sqrt{(1-1{,}5)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{1}$.</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>f)</td><td>Das Volumen der großen Pyramide lässt sich berechnen durch
$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot h$,
wobei a die Länge von $\overline{CA}$, b die Länge der Strecke $\overline{CB}$ und h die Höhe der Pyramide ist. Das Volumen der Pyramide oberhalb von E^* berechnet sich durch
$V_{Pyramide'} = \frac{1}{3} \cdot G' \cdot h' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a' \cdot b' \cdot h'$ mit $h = 9$ und $h' = (9 - 2{,}25) = 6{,}75 = \frac{3}{4} \cdot h$.
Nach dem zweiten Strahlensatz gilt dann auch $a' = \frac{3}{4} a$ und $b' = \frac{3}{4} b$.
Insgesamt ergibt sich $\frac{V_{Pyramide'}}{V_{Pyramide}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a' \cdot b' \cdot h'}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot h} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$.
Das Volumen der kleinen Pyramide nimmt also $\frac{27}{64}$ vom Volumen der großen Pyramide ein.</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>55</td><td>20</td></tr>
</table>

Kopiervorlage zur Aufgabe „Pyramide“



LA/AG 2

II.2 Wasserturm

Im flachen Texas soll in einer kleinen Stadt ein neuer Wasserturm gebaut werden. Der Behälter (Tank) für das Wasser hat die Form einer regelmäßigen Doppelpyramide (eines Oktaeders), d. h. alle Kanten sind gleich lang und haben die Länge 15 m (siehe Abbildung 1 in der Anlage). Die Doppelpyramide steht auf der Spitze, ihre Raumdiagonale verläuft also vertikal.
Aus hydrodynamischen Gründen muss sich alles Wasser im Tank mindestens 12 Meter über der Ebene befinden: Die untere Spitze U liegt also 12 Meter über dem Boden.
Der Tank ist auf vier geraden, vertikalen Streben aufgestellt, die jeweils einen der seitlichen Eckpunkte der Doppelpyramide senkrecht mit dem Boden verbinden. Die Fußpunkte befinden sich auf den Koordinatenachsen.

Die Zeichnung in der Anlage gibt die Situation nicht maßstabsgetreu wieder.

Gehen Sie für diese Aufgabe davon aus, dass die Tankwand sehr dünn ist und als Ausschnitt von Ebenen idealisiert werden kann. Ebenso können die Streben als Strecken idealisiert werden.

Legen Sie den Ursprung Ihres Koordinatensystems in den Punkt, in dem die senkrechte Symmetrieachse den Boden trifft.

a) Berechnen Sie die Länge der horizontalen Diagonalen (z. B. die Länge der Strecke $\overline{P_1P_3}$).
Bestimmen Sie die Raumhöhe der Doppelpyramide.
Hinweis zum Weiterrechnen: Die Raumhöhe beträgt ca. 21,21 m.

b) Berechnen Sie die Koordinaten aller sechs Eckpunkte der Doppelpyramide.
Hinweis zum Weiterrechnen: Die Koordinaten des Punktes P_1 sind ungefähr (10,61|0|22,61).

c) An der oberen Spitze der Doppelpyramide ist ein 8 m langer, vertikaler Blitzableiter angebracht. An seinem oberen Ende befindet sich ein Rundumlicht im Punkt R.
Berechnen Sie die Höhe, in der sich das Rundumlicht befindet, und geben Sie die Koordinaten des Punktes R an.
Das Rundumlicht kann als punktförmige Lichtquelle aufgefasst werden. Der Punkt P_1 wirft einen Schatten bzgl. des Lichts, das von dem Rundumlicht ausgeht.
Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Schattenpunktes auf dem Boden.
Begründen Sie, dass der Schatten des Tanks, den das Rundumlicht auf den Boden wirft, ein Quadrat bildet, und bestimmen Sie dessen Seitenlänge.

d) Das zentrale Wasserauslaufrohr ist zylinderförmig mit einem Durchmesser von 32 cm und ermöglicht eine Strömungsgeschwindigkeit des Wassers von 2 m/s.
Weisen Sie nach, dass pro Sekunde 0,1608 m³ Wasser aus dem Tank fließen.
Bestimmen Sie, wie lange es unter diesen Bedingungen dauern würde, bis alles Wasser aus dem ursprünglich vollen Tank ausgeflossen wäre (nachlassender Druck bei sinkendem Wasserspiegel bleibt unberücksichtigt).

e) Zusätzlich zu den vier vertikalen Streben gibt es vom obersten Punkt O des Tanks vier gerade Streben durch den Tank auf den Boden. Diese vier Fußpunkte bilden auf dem Boden ein Quadrat, sodass sich die vier Fußpunkte der vertikalen Streben genau in der Mitte der Seiten befinden (siehe Abbildung 2 in der Anlage) .
Bestimmen Sie die Koordinaten der vier Fußpunkte der schrägen Streben.
Zeigen Sie, dass die schrägen Streben eine Länge von etwa 36,44 m aufweisen.
Ermitteln Sie den Winkel, unter dem die Streben auf den Boden aufkommen.
Bestimmen Sie die Länge des Stücks der Streben, die sich im Tank befinden.

Anlage zur Aufgabe „Wasserturm“

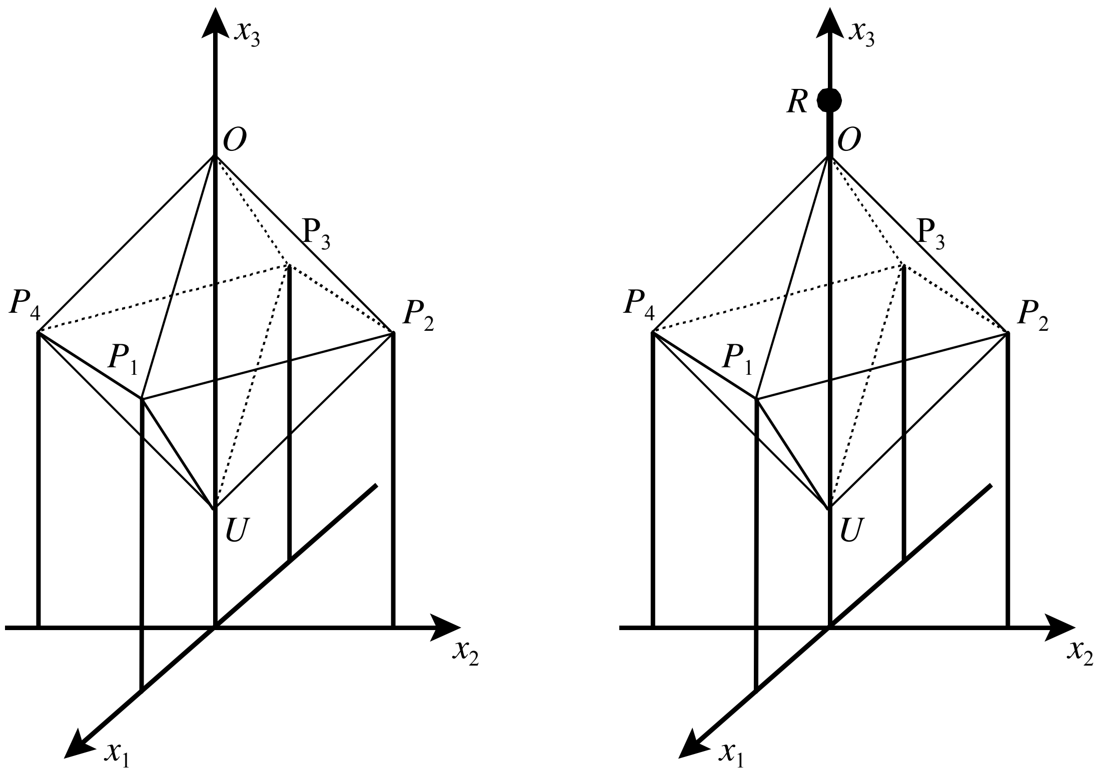


Abbildung 1
(Rechts mit Rundumlicht *R*)

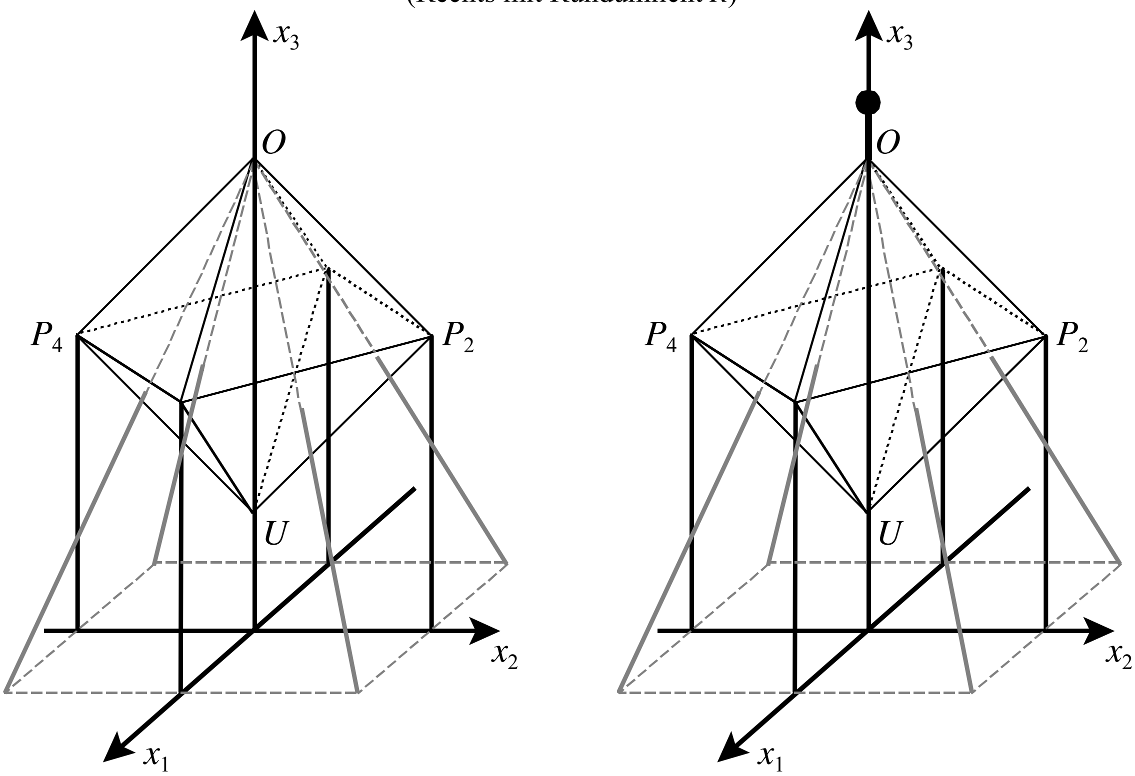


Abbildung 2
(Rechts mit Rundumlicht)

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	In der Doppelpyramide sind alle Kanten gleich lang. Die horizontale Querschnittsfläche ist ein Quadrat. Also folgt mit dem Satz von Pythagoras für die Diagonale d: $d^2 = 15^2 + 15^2 = 2 \cdot 15^2$. Damit gilt: $d = 15 \cdot \sqrt{2} \approx 21{,}21$. Die Doppelpyramide bzw. der Oktaeder ist laut Aufgabenstellung „regelmäßig“, also muss die Raumhöhe ebenso groß sein wie die Diagonale. Mit anderen Worten, ein Schnitt durch den Oktaeder in Richtung z.B. der x_1-x_3-Ebene ergibt ebenfalls ein Quadrat mit der Kantenlänge 15 m. Deshalb ist die Raumhöhe ebenfalls $15 \cdot \sqrt{2}$ m.	5	5	
b)	Aus der Aufgabenstellung folgt für den untersten Punkt U, dass er die Koordinaten (0 | 0 | 12) hat, denn der unterste Punkt soll 12 m hoch liegen. Der Punkt O liegt vertikal über U, und er liegt (siehe gegebenes Resultat aus a)) $15 \cdot \sqrt{2}$ m höher. Also hat O die Koordinaten $(0 \mid 0 \mid 12 + \sqrt{2} \cdot 15) \approx (0 \mid 0 \mid 33{,}213)$. Die Punkte P_1 bis P_4 weisen alle dieselbe Höhe auf, sie liegen in der halben Höhe zwischen U und O. Somit haben sie eine x_3-Koordinate von $x_3 = 12 + 7{,}5\sqrt{2} \approx 22{,}607$. Ihr Abstand von der x_3-Achse ist jeweils die Hälfte der Diagonalen des Querschnittsquadrats, also $7{,}5 \cdot \sqrt{2} \approx 10{,}61$. Somit folgt, da die Punkte „über“ den Koordinatenachsen der x_1-x_2-Ebene liegen: $P_1(7{,}5\sqrt{2} \mid 0 \mid 12 + 7{,}5\sqrt{2}) \approx P_1(10{,}61 \mid 0 \mid 22{,}61)$, $P_2(0 \mid 7{,}5\sqrt{2} \mid 12 + 7{,}5\sqrt{2}) \approx P_2(0 \mid 10{,}61 \mid 22{,}61)$, $P_3(-7{,}5\sqrt{2} \mid 0 \mid 12 + 7{,}5\sqrt{2}) \approx P_3(-10{,}61 \mid 0 \mid 22{,}61)$, $P_4(0 \mid -7{,}5\sqrt{2} \mid 12 + 7{,}5\sqrt{2}) \approx P_4(0 \mid -10{,}61 \mid 22{,}61)$.	15		
c)	Die Höhe setzt sich zusammen aus dem Abstand der unteren Spitze des Tanks vom Boden, der Raumdiagonale des Oktaeders und der Länge des Blitzableiters. Mit dem Länge der Raumdiagonalen $d = 15 \cdot \sqrt{2}$ ergibt sich die Höhe zu $h = 12 + 15 \cdot \sqrt{2} + 8 \approx 41{,}21$. Das Rundumlicht ist also in einer Höhe von etwa 41,2 m angebracht und die Koordinaten des Punktes R sind $(0 \mid 0 \mid 20 + 15 \cdot \sqrt{2}) \approx (0 \mid 0 \mid 41{,}21)$. Die Gerade durch den Punkt R und den Eckpunkt P_1 ergibt sich zu: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 + 15 \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 7{,}5 \cdot \sqrt{2} - 0 \\ 0 - 0 \\ \left(12 + 7{,}5 \cdot \sqrt{2}\right) - \left(20 + 15 \cdot \sqrt{2}\right) \end{pmatrix}$ bzw.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20+15\cdot\sqrt{2} \end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix} 7{,}5\cdot\sqrt{2} \\ 0 \\ -8-7.5\cdot\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden mit der Grundebene.
Es ist also $20+15\cdot\sqrt{2}+k\cdot\left(-8-7{,}5\cdot\sqrt{2}\right)=0$ zu lösen. Es ergibt sich

$k=-\dfrac{20+15\cdot\sqrt{2}}{-8-7{,}5\cdot\sqrt{2}}\approx 2{,}21$, sodass der Schattenpunkt die x_1-Koordinate von $0+k\cdot 7{,}5\cdot\sqrt{2}\approx 23{,}49$ hat. Also hat der Schattenpunkt von P_1 ungefähr die Koordinaten $(23{,}49\,|\,0\,|\,0)$.

Korrekturhinweis: Dieses Ergebnis erhält man bei Berücksichtigung aller TR-Stellen von k. Mit dem gerundeten Wert 2,21 ergibt sich 23,44.

Aus der Rechnung bzw. auch aus Symmetriegründen folgt, dass der Schattenpunkt auf der x_1-Achse liegt. Ebenfalls aus Symmetriegründen folgt, dass auch die Schattenpunkte der anderen Punkte P_2, P_3 und P_4 auf den Koordinatenachsen liegen mit jeweils dem gleichen Abstand zur x_3-Achse. Also bildet der Schatten ein Quadrat auf dem Boden.
Nach dem Satz von Pythagoras hat eine Kante etwa die Länge
$23{,}49\cdot\sqrt{2}\approx 33{,}22$.

Das Schattenquadrat hat also etwa die Kantenlänge 33,22 m.

</td><td>5</td><td>25</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>

Das Rohr ist zylindrisch.

Durch das Rohr können damit pro Sekunde $\pi\cdot 0{,}16^2\cdot 2=0{,}1608...\,\text{m}^3$ Wasser strömen.

Für das Volumen des Oktaeders gilt (siehe Formelsammlung):
$V=\dfrac{\sqrt{2}}{3}a^3\approx 1590{,}990...\ \text{m}^3$.
Damit befinden sich im vollen Tank ca. 1591 m³ Wasser.

Es ist $t_{leer}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot 15^3}{\pi\cdot 0{,}16^2\cdot 2}\approx 9891$.

Also beträgt die Entleerungszeit t_{leer} etwa 9891 s bzw. etwa $2\frac{3}{4}$ Stunden.

</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>

Sei B_1 der Fußpunkt zwischen P_1 und P_2. Dann hat B_1 aufgrund der Konstruktion die Koordinaten $(7{,}5\cdot\sqrt{2}\,|\,7{,}5\cdot\sqrt{2}\,|\,0)\approx(10{,}61|10{,}61|\,0)$. Entsprechend erhält man die anderen Punkte:
$B_2(-7{,}5\cdot\sqrt{2}\,|\,7{,}5\cdot\sqrt{2}\,|\,0)\approx(-10{,}61|10{,}61|\,0)$,
$B_3(-7{,}5\cdot\sqrt{2}\,|-7{,}5\cdot\sqrt{2}\,|\,0)\approx(-10{,}61|-10{,}61|\,0)$ und
$B_4(7{,}5\cdot\sqrt{2}\,|-7{,}5\cdot\sqrt{2}\,|\,0)\approx(10{,}61|-10{,}61|\,0)$.

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

Der Abstand von O z. B. zu B_1 berechnet sich damit durch

$$\sqrt{\left(7{,}5\cdot\sqrt{2}\right)^2+\left(7{,}5\cdot\sqrt{2}\right)^2+\left(12+15\cdot\sqrt{2}\right)^2}\approx 36{,}44\,.$$

Eine schräge Strebe ist also etwa 36,44 m lang.

Um den Winkel zu bestimmen, muss nicht mit dem Skalarprodukt gerechnet werden. Es genügt, das Dreieck B_1ON zu betrachten, wobei N der Koordinatenursprung ist. Aus

$$\tan(\alpha)=\frac{\left|\overline{ON}\right|}{\left|\overline{B_1N}\right|}=\frac{12+15\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{\left(7{,}5\cdot\sqrt{2}\right)^2+\left(7{,}5\cdot\sqrt{2}\right)^2+0}}=\frac{12+15\cdot\sqrt{2}}{15}\approx 2{,}2142...$$

folgt $\alpha\approx 65{,}7°$.

Um die Länge des Strebenteils im Tank zu berechnen, braucht man den Durchstoßungspunkt zwischen Strebe und Außenwand.
Die Strebe durch den Punkt B_1 lässt sich als Gerade mit dem Aufpunkt O und dem Richtungsvektor $\overrightarrow{OB_1}$ durch

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\12+15\cdot\sqrt{2}\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}7{,}5\cdot\sqrt{2}-0\\7{,}5\cdot\sqrt{2}-0\\0-\left(12+15\cdot\sqrt{2}\right)\end{pmatrix},\ k\in\mathbb{R}\ \text{darstellen.}$$

Die Außenwand lässt sich als Ebene mit dem Aufpunkt U und den Richtungsvektoren $\overrightarrow{UP_1}$ und $\overrightarrow{UP_2}$ folgendermaßen darstellen:

$$\boldsymbol{E}:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\12\end{pmatrix}+l\cdot\begin{pmatrix}\left(7{,}5\cdot\sqrt{2}\right)-0\\0-0\\\left(12+7{,}5\cdot\sqrt{2}\right)-12\end{pmatrix}+m\cdot\begin{pmatrix}0-0\\\left(7{,}5\cdot\sqrt{2}\right)-0\\\left(12+7{,}5\cdot\sqrt{2}\right)-12\end{pmatrix},\ l,m\in\mathbb{R}\,.$$

Durch Gleichsetzen der beiden Gleichungen erhält man das folgende Gleichungssystem:

$$k\cdot\left(7{,}5\cdot\sqrt{2}\right)=l\cdot\left(7{,}5\cdot\sqrt{2}\right)\qquad(1)$$

$$k\cdot\left(7{,}5\cdot\sqrt{2}\right)=m\cdot\left(7{,}5\cdot\sqrt{2}\right)\qquad(2)$$

$$12+15\cdot\sqrt{2}-k\cdot\left(12+15\cdot\sqrt{2}\right)=12+l\cdot\left(7{,}5\cdot\sqrt{2}\right)+m\cdot\left(7{,}5\cdot\sqrt{2}\right)\qquad(3)$$

Aus (1) und (2) folgt: $k=l=m$.

In (3) eingesetzt:

$$15\cdot\sqrt{2}-k\cdot\left(12+15\cdot\sqrt{2}\right)=k\cdot\left(7{,}5\cdot\sqrt{2}\right)+k\cdot\left(7{,}5\cdot\sqrt{2}\right).$$

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$15 \cdot \sqrt{2} = k \cdot \left(12 + 30 \cdot \sqrt{2}\right)$ $k = \frac{15 \cdot \sqrt{2}}{12 + 30 \cdot \sqrt{2}} \approx 0{,}3897... \approx 0{,}39$. Dieses k ist zugleich der Faktor, mit dem man die bereits berechnete Länge von $\overrightarrow{OB_1}$ multiplizieren muss, um die gesuchte Länge der Strebe innerhalb des Tanks zu erhalten: $0{,}3897 \cdot 36{,}44 \approx 14{,}20$. Andere (umständlichere) Variante: Dieses k wird z. B. in die Geradengleichung eingesetzt und man erhält $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 + 15 \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{15 \cdot \sqrt{2}}{12 + 30 \cdot \sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 7{,}5 \cdot \sqrt{2} \\ 7{,}5 \cdot \sqrt{2} \\ -12 - 15 \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4{,}13 \\ 4{,}13 \\ 20{,}27 \end{pmatrix}$. Der Schnittpunkt S_E der Ebene $\boldsymbol{E}$ mit der Geraden g hat die (gerundeten) Koordinaten $\left(4{,}13 \mid 4{,}13 \mid 20{,}27\right)$. Der Abstand $\left\lvert \overline{OS_E} \right\rvert$ ergibt sich etwa zu $\sqrt{4{,}13^2 + 4{,}13^2 + \left(20{,}27 - 33{,}21\right)^2} \approx \sqrt{201{,}64} \approx 14{,}20$. Die Länge der im Tank befindlichen Strebe beträgt also etwa 14,20 m.		10	20
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

STOCHASTIK 1

III.1 Lehrstellen

Viele Unternehmen sind nicht nur an der Steigerung ihrer Umsätze interessiert, sie sind sich auch ihrer Verantwortung für die Jugendlichen bewusst. 67 Hamburger Betriebe haben es sich zum Ziel gesetzt, die Quote der Hauptschüler, die nach dem Ende der Schule direkt in die betriebliche Ausbildung übernommen werden, zu erhöhen. Innerhalb von vier Jahren ist es offenbar gelungen, die Ausbildungsquote der Hauptschüler von zehn auf zwanzig Prozent zu erhöhen.

Gehen Sie zunächst von der Voraussetzung aus, dass die Rahmenbedingungen, die zu der Quote von 20 % geführt haben, im Jahr 2006 unverändert bleiben. Gehen Sie außerdem davon aus, dass die mögliche Anzahl X von Hauptschulabgängern, die zu Beginn des folgenden Schuljahres eine Lehrstelle haben, binomialverteilt ist.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von
   - 15 Hauptschülern genau 3,
   - 25 Hauptschülern mehr als 5,
   - 50 Hauptschülern höchstens 5 direkt in die Lehre gehen.

b) Verschiedene Presseartikel und Rundfunkmeldungen behaupten, dass sich die Rahmenbedingungen geändert haben.

   Leiten Sie eine Entscheidungsregel her, mit der ggf. begründet werden kann, dass sich die Rahmenbedingungen geändert haben, mit der also die Nullhypothese „Die Rahmenbedingungen gewährleisten, dass ein Hauptschüler mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % einen Ausbildungsplatz bekommt“ getestet werden kann. Dabei soll die Irrtumswahrscheinlichkeit dafür, dass man zu Unrecht eine Verschlechterung oder eine Verbesserung annimmt, jeweils maximal 5 % betragen. Gehen Sie für das Jahr 2006 von 3700 Schulabgängern mit Hauptschulabschluss aus.

   Interpretieren Sie nach Ihrer Entscheidungsregel das mögliche Ergebnis, dass von diesen 3700 Hauptschülern nur 720 eine Lehrstelle bekommen.

Im folgenden Aufgabenteil geht es darum, die Annahme, dass die Zufallsgröße X binomialverteilt ist, zu hinterfragen.

c) Beschreiben Sie eine Situation, in der keine Binomialverteilung vorliegt, und begründen Sie, warum dies der Fall ist.

Der Otto-Konzern bildet derzeit 268 Lehrlinge aus. Gehen Sie davon aus, dass alle ihre Abschlussprüfungen bestehen und eine Stelle im Unternehmen bekommen können. Gehen Sie ferner von einer jährlichen Fluktuationsrate (Zahl der Austritte, bezogen auf den Personalbestand ohne Ruheständler) von 9 % aus.

d) Bestimmen Sie, wie viele der 268 Auszubildenden danach voraussichtlich ihr 25. Betriebsjubiläum beim Otto-Konzern begehen werden.

Verlässt ein Arbeitnehmer das Unternehmen und muss deshalb ein neuer Mitarbeiter eingearbeitet werden, so entstehen dem Unternehmen zusätzliche Kosten für die Einarbeitung. Gehen Sie davon aus, dass dann pro Arbeitsplatz im Durchschnitt Kosten in Höhe von 20 000 € entstehen. Deshalb ist es im Interesse des Unternehmens, die Fluktuationsrate möglichst zu senken. Zusätzliche soziale Leistungen wie Betriebskindergärten und Sportangebote können dazu beitragen, dass Arbeitnehmer im Unternehmen bleiben.
Die Firmenleitung eines Konzerns mit ca. 50 000 Arbeitnehmern wie der Otto-Konzern überlegt, ob zusätzlich 2 Millionen Euro jährlich für soziale Leistungen bereitgestellt werden sollen.

e) Bestimmen Sie, um wie viel Prozentpunkte die Fluktuationsrate sinken müsste, damit nicht nur die 2 Millionen Euro an zusätzlichen Ausgaben, sondern noch eine weitere Million Euro, insgesamt also 3 Millionen Euro, an Einarbeitungskosten eingespart werden.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Sei X_n die Anzahl der Schüler die aus insgesamt n Hauptschulabgängern eine Lehrstelle gefunden haben. X_k ist binomialverteilt mit $p = 0{,}2$.

Mithilfe der Formel $P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ oder mit den Tabellen zur Binomialverteilung erhält man.

• n = 15: Mit der Formel erhält man $P(X_{15}=3)=\binom{15}{3}\cdot 0{,}2^3\cdot 0{,}8^{12}=0{,}2501$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 3 von 15 Hautschulabgängern eine Lehrstelle erhalten, beträgt etwa 25 %.

• n = 25: Mithilfe der Tafel für summierte Binomialverteilungen erhält man: $P(X_{25}>5)=1-P(X_{25}\le 5)=1-0{,}6167=0{,}3833$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass von 25 Hauptschulabgängern mehr als 5 eine Lehrstelle erhalten, beträgt etwa 38 %.

• n = 50: $P(X\le 5)=0{,}0480$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass von 50 Hauptschulabgängern weniger als 5 direkt eine Lehrstelle erhalten, beträgt etwa 5 %.</td><td>15</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>• Für eine binomialverteilte Zufallsgröße gilt, falls σ > 3:
$\mu=E(X)=n\cdot p$, $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$.
Für n = 3700 und p = 0,2 ergibt sich: $\mu=740$, $\sigma=\sqrt{592}\approx 24{,}3$.
Es handelt sich um einen zweiseitigen Test.
$P(\mu-1{,}64\sigma\le X\le\mu+1{,}64\sigma)\approx 90\%$.
Wegen $\sigma\cdot 1.64\approx 39{,}9$ wird H_0 verworfen, wenn $X\ge 780$ oder wenn $X\le 700$.

Auch wenn in der Aufgabenstellung ausdrücklich die Irrtumswahrscheinlichkeiten bei signifikanten Abweichungen nach oben und nach unten „jeweils maximal 5 %“ betragen sollen, liegt eine andere Interpretation dennoch nahe, die auch als richtig bewertet werden sollte, nämlich dass die Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art insgesamt kleiner als 5 % sein sollte. Danach müsste wie folgt gerechnet werden:
Da $\sigma>3$, gilt: $P(\mu-1{,}96\sigma\le X\le\mu+1{,}96\sigma)\approx 95\,\%$.
Wegen $\sigma\cdot 1{,}96\approx 47{,}7$, wird H_0 verworfen, wenn $X\ge 788$ oder wenn $X\le 692$.

• 720 liegt nicht im Ablehnungsbereich von H_0, es gibt keinen Anlass, H_0 zu verwerfen.
Die Abweichung von μ nach unten kann rein zufällig sein. Andererseits beweist dieses Ergebnis nicht, dass H_0 wahr ist.</td><td>10</td><td>15</td><td>15</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	Es bietet sich an, die Unabhängigkeit zu hinterfragen. Setzt sich z.B. eine Schule oder eine Lehrkraft besonders ein und gelingt es, Schülerinnen und Schülern gut zu beraten, ihnen ihren Fähigkeiten entsprechende Ausbildungsgänge zu empfehlen, können erste Erfolge auch andere aus der Klasse anspornen. Umgekehrt können Misserfolge in den ersten Bewerbungen auch andere „nach unten ziehen“ und evtl. davon abhalten, sich überhaupt um eine Lehrstelle zu bemühen. *Hinweis: Es wird eine „ergebnisoffene“, zusammenhängende Darstellung erwartet.*		15	
d)	Verlassen jährlich im Durchschnitt 9 % der Beschäftigten den Betrieb, so werden von diesen 268 Personen voraussichtlich nach 25 Jahren noch $268 \cdot 0{,}91^{25} \approx$ 25 im Konzern geblieben sein. *Auch Lösungen, in denen die Ausbildungszeiten, also 2 oder 3 Jahre, berücksichtigt werden, sind mit voller Punktzahl zu bewerten.*		10	
e)	Beträgt die Fluktuationsrate 9 %, so entstehen dem Unternehmen jährliche Kosten ungefähr in Höhe von $0{,}09 \cdot 50\,000 \cdot 20\,000$ € = 90 000 000 €. Sinkt die Fluktuationsrate um einen Prozentpunkt, so führt dies zu einer Kostenersparnis in Höhe von 10 000 000 €. Sollen 3 Millionen Euro eingespart werden, so wird dies bereits mit einer Senkung der Fluktuationsrate um 0,3 Prozentpunkte erreicht.		10	10
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

STOCHASTIK 2

III.2 Mediale Begabung

Eine ideale Münze wird 10-mal geworfen. Ideal heißt, dass die Wahrscheinlichkeit für das Werfen von Wappen oder Zahl jeweils 0,5 ist.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden drei Ereignisse:

- Es ist wird genau fünf Mal Wappen geworfen.
- Es ergibt sich höchstens sechs Mal Zahl.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Beim ersten Wurf wird Wappen geworfen, danach kommt noch genau vier Mal Wappen".

b) Was ist wahrscheinlicher: Bei zehn Würfen 5-mal Wappen oder bei zwanzig Würfen 10-mal Wappen? Begründen Sie die Antwort.

Bei einer Fernsehshow geht es um die Frage, ob es „mediale Begabung" gibt.
Um diese Begabungen zu entdecken, wird in der Show vor den 100 Zuschauern im Studio eine Münze 10-mal verdeckt geworfen. Jeder Zuschauer kann einen 10er-Tipp als Vorhersage abgeben. Der Moderator bezeichnet eine Person als „medial begabt", die in ihrer Vorhersage, also bei ihrem 10er-Tipp, mindestens 8 Treffer hat. (Ein solcher 10er-Tipp kann z.B. sein: Zahl, Wappen, Wappen, Zahl, Wappen, Zahl, Zahl, Wappen, Wappen, Zahl.)

c) Berechnen Sie – unter der Annahme, dass es eine solche Begabung überhaupt nicht gibt – die Zahl „medial Begabter", die bei diesem Versuch zu erwarten sind.

d) Ein Zuschauer behauptet: „Die Wahrscheinlichkeit, dass bei diesem Versuch mindestens einer der Zuschauer als „medial begabt" gilt, liegt bei fast 100 %, auch wenn es gar keine mediale Begabung gibt."
Entscheiden Sie, ob diese Aussage richtig ist.

Nach der Werbepause wird bei der Fernsehshow ein Zuschauer ausgelost und auf die Bühne gebeten. Wieder soll eine Münze 10-mal verdeckt geworfen werden und der Zuschauer soll seinen Tipp abgeben. Die Frage, ob eine mediale Begabung vorliegt, soll mit Hilfe eines Signifikanztests auf dem Signifikanzniveau von 5 % entschieden werden. Üblicherweise geht ja jeder davon aus, dass es keine solche „mediale Begabung" gibt, dass also die Wahrscheinlichkeit, den einzelnen Münzwurf richtig vorherzusehen, bei der Ratewahrscheinlichkeit $p = 0,5$ liegt.
Die Nullhypothese H_0 soll deshalb lauten: $p = 0,5$.

e) Begründen Sie, warum eine Wahrscheinlichkeit p kleiner als 0,5 nicht sinnvoll ist.

f) Bestimmen Sie für den beschriebenen (einseitigen) Test die Vorhersageergebnisse (den Ablehnungsbereich), bei denen die Nullhypothese abgelehnt wird.

g) Als unvoreingenommener Beobachter kann man sich aber dennoch fragen: „Was wäre, wenn die Testperson eine Trefferwahrscheinlichkeit von $p > 0,5$ hätte?"
Wir verwenden „Mindestens neun Treffer" als Ablehnungsbereich, also als Bereich zur Bestätigung der „medialen Begabung".
Bestimmen Sie für $p = 0,6$ und für $p = 0,8$ jeweils die Wahrscheinlichkeit $P_{2.Art}$ mit der die Testperson dennoch (zu Unrecht) nicht als „medial begabt" eingeschätzt wird (Fehler 2. Art).
Dieser Zusammenhang soll auch für beliebiges p funktional dargestellt werden: $P_{2.Art} = P_{2.Art}(p)$.
Weisen Sie nach, dass gilt: $P_{2.Art}(p) = 9 \cdot p^{10} - 10 \cdot p^9 + 1$.
Berechnen Sie dann auch $P_{2.Art}(1)$ und interpretieren Sie die drei berechneten Werte für $P_{2.Art}(p)$.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Es sei X die Anzahl der geworfenen Wappen. X ist binomialverteilt mit $p = 0{,}5$. Mithilfe der Tafel zur Binomialverteilung oder der entsprechenden Formel erhält man: $P(X=5)=\binom{10}{5}\cdot 0{,}5^5\cdot 0{,}5^2 = 0{,}2461 \approx 25\%$. Die Wahrscheinlichkeit, beim 10-maligem Werfen genau fünf Mal Wappen zu erhalten, beträgt etwa 25 %. Höchstens 6-mal Zahl bedeutet : $P(X \le 6)$ ist zu berechnen. Mit Hilfe der Tafel zur Binomialverteilung erhält man: $P(X \le 6) \approx 0{,}83$. Man kann auch „zu Fuß" rechnen, dann aber besser über das Gegenereignis: $P(X \le 6) = 1 - P(X > 6)$ $= 1 - \frac{\binom{10}{7}+\binom{10}{8}+\binom{10}{9}+\binom{10}{10}}{2^{10}}$ $= 1 - \frac{120+45+10+1}{1024} = \frac{53}{64} \approx 0{,}83$. Die Wahrscheinlichkeit, bei 10 Würfen höchstens 6-mal Zahl zu erhalten, beträgt etwa 83 %. Die Wahrscheinlichkeit, im ersten Wurf Wappen zu erhalten, beträt 50 %. Danach wird noch 9 Mal geworfen. Es ist also weiterhin die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, in 9 Würfen genau 4-mal Wappen zu erhalten. Beide Ergebnisse werden im Sinne von Wahrscheinlichkeiten von unabhängigen Ereignissen multipliziert. $P(\text{"Wappen, danach 4 Mal Wappen"}) = 0{,}5 \cdot P(X_9 = 4) \approx 0{,}5 \cdot 0{,}2461 \approx 0{,}123$. Die Wahrscheinlichkeit, im ersten Wurf Wappen und danach genau 4 Mal Wappen zu erhalten, beträgt etwa 12 %.	10	5	
b)	Beide Versuche (zehn- bzw. zwanzigstufige Bernoulli-Kette) werden durch eine Binomialverteilung beschrieben. Man kann die Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse entweder direkt ausrechnen, was im zweiten Fall relativ aufwändig ist, oder qualitativ argumentieren: Die hier symmetrische Binomialverteilung wird mit wachsendem n „flacher" auch in der Mitte. Die Gesamtwahrscheinlichkeit Eins verteilt sich auf immer mehr Ausgänge. Also ist die Wahrscheinlichkeit, bei 20 Würfen 10-mal Wappen zu werfen, geringer als bei 10 Würfen 5-mal Wappen zu werfen. (Dies widerspricht scheinbar einem „Gesetz der großen Zahl.)		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	Es ist die $P(X \geq 8)$ zu bestimmen. Mithilfe der Tafel zur Binomialverteilung oder der entsprechenden Formel erhält man: $P(X \geq 8) = \binom{10}{8} \cdot 0{,}5^{10} + \binom{10}{9} \cdot 0{,}5^{10} + \binom{10}{10} \cdot 0{,}5^{10} = 1 - 0{,}9453 = 0{,}0547$. Die Wahrscheinlichkeit, als „medial begabt" zu gelten, ist damit etwa 5,5 %. Bei 100 Zuschauern sind also 5 bis 6 solche „medial Begabte" zu erwarten.	10		
d)	Hier sollte über das Gegenereignis *G*: „Unter den 100 Zuschauern hat niemand mindestens acht Richtige bei seinem Tipp" gerechnet werden: Die Wahrscheinlichkeit für einen Zuschauer, nicht als „medial begabt" zu gelten, ist $1 - 0{,}0547$. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei 100 Zuschauern keiner als „medial begabt" gilt, ist $(1 - 0{,}0547)^{100} \approx 0{,}0036$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass (mindestens) einer als „medial begabt" gilt 1 – 0,0036 = 0,9964. Diese Zahl von 99,64% kann mit gutem Recht im Kontext als „fast 100 %" interpretiert werden, der Zuschauer hat also Recht.		15	
e)	Wahrscheinlichkeiten unterhalb von 0,5 bedeuten „schlechter als reines Raten" und machen bei der Suche nach „medialer Begabung" keinen Sinn. (Es sei denn, medial Begabte wollen den Moderator hereinlegen!)		5	
f)	Es ist die kleinste ganze Zahl *M* zu finden, sodass $P(X \geq M) \leq 0{,}05$ gilt. Wieder mithilfe der Tafel findet man: $P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - 0.9893 = 0{,}0107$ und $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - 0.9453 = 0{,}0547$ Also ist *M* gleich 9 und der Ablehnungsbereich besteht aus allen Ergebnissen, bei denen 9 oder 10 richtige Tipps abgegeben werden.		15	
g)	Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art berechnet sich durch $P_{2.Art} = 1 - \sum_{k \in A} \binom{10}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{10-k}$. Das ergibt hier $P_{2.Art}(0{,}6) = 1 - \binom{10}{9} \cdot 0{,}6^9 \cdot 0{,}4^1 - \binom{10}{10} \cdot 0{,}6^{10} \approx 0{,}954$ bzw. $P_{2.Art}(0{,}8) = 1 - \binom{10}{9} \cdot 0{,}8^9 \cdot 0{,}2^1 - \binom{10}{10} \cdot 0{,}8^{10} \approx 0{,}624$. Verallgemeinert man, wie anfangs gegeben, diese Rechnung, so erhält man $P_{2.Art}(p) = 1 - \binom{10}{9} \cdot p^9 \cdot (1-p) - \binom{10}{10} \cdot p^{10} = 1 - 10p^9(1-p) - p^{10} = 9p^{10} - 10p^9 + 1$, wie gefordert.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Einsetzen liefert $P_{2.Art}(1) = 0$. Die drei Ergebnisse machen deutlich, dass die Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art umso kleiner ist, je deutlicher (größer) die mediale Begabung ist. Die Versuchsanzahl von 10 ist aber so gering, dass eine immerhin deutliche mediale Begabung (p = 0,6) mit über 95% er Wahrscheinlichkeit nicht als signifikant erkannt wird. Auch für p = 0,8 ist der Wert mit ca. 62 % noch sehr hoch. Wenn andererseits der Kandidat sicher vorhersagen kann ($p = 1$), dann gibt er immer einen Tipp mit 10 Richtigen ab. Ein Fehler 2. Art kann dann gar nicht auftreten.		10	20
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20