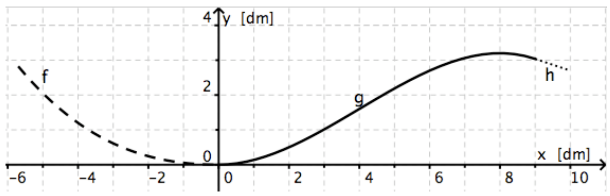
Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis

Balance

Stefan Heiliger ist ein bekannter Produktdesigner für Relax-Sessel, Sitzmöbel und Liegen. Er hat sowohl bei dem berühmten Designer Wilhelm Wagenfeld als auch im Automobil-Design bei Daimler–Benz gearbeitet. Formen, die er für seine Sessel benutzt, können an Sportwagen-Kurven oder an mathematische Kurven erinnern.

Einer seiner Sessel, den es in unterschiedlichen Ausführungen gibt, heißt „Balance". Ein Modell sieht man im Bild oben.[1] Es besteht aus einem Metallgestell, einer Liegefläche und einem Kopfteil. Für die Aufgabenteile a) bis c) wird davon ausgegangen, dass sich der Sessel im Gleichgewichtszustand wie oben abgebildet befindet.

Die untere Linie des Metallgestells kann näherungsweise mit Hilfe von drei Funktionen f, g und h beschrieben werden. Man legt den Ursprung des Koordinatensystems in den tiefsten Punkt des Gestells (siehe Skizze rechts). Die Achsen werden in Einheiten unterteilt, die einem Dezimeter entsprechen.



a) Das Gestell kann im Bereich $0 \le x \le 9$ durch eine Funktion g beschrieben werden. Diese hat in $P(0|0)$ eine waagerechte Tangente und für positive x-Werte ihren höchsten Punkt 8 dm weiter rechts mit der Höhe $3{,}2$ dm.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung für die Funktion g.
Weisen Sie nach, dass mit Ihrer gefundenen Lösung an der gewünschten Stelle tatsächlich ein Hochpunkt liegt.
(Zur Kontrolle: $g(x) = -0{,}0125x^3 + 0{,}15x^2$)

(8 Punkte)

b) Die Funktion f mit $f(x) = -0{,}0073x^3 + 0{,}0478x^2$ beschreibt den linken Teil des Gestells im Bereich $-5{,}7 \le x \le 0$. Die beiden Funktionen f und g sollen knickfrei aneinander anschließen.
Zeigen Sie, dass dies zutrifft.

Auf dem Bild des Sessels sieht man, dass die linke Seite des Gestells linksgekrümmt ist.
Zeigen Sie, dass dies für den Graphen der Funktion f zutrifft.

(5 Punkte).

c) Will man den Sessel für verschiedene Körperlängen anpassen, muss auch die Gestellform variieren. Im Folgenden wird nur der durch g beschriebene Teil des Gestells betrachtet.
Auf der Ebene der Funktionsgleichung besteht eine Möglichkeit, die Länge des Gestells zu verändern, darin, die Funktion g_k mit $g_k(x) = -0{,}0125x^3 + kx^2,\ \ 0 \le x \le x_H + 1$ zu betrachten, wobei $k > 0$ ein reeller Parameter und x_H der x – Wert des Hochpunkts der Funktion g_k ist.

Zeigen Sie, dass jeder Funktionsgraph zu g_k in $T(0|0)$ einen Tiefpunkt hat.

Bestimmen Sie die Hochpunkte der Graphen von g_k. (Zur Kontrolle: $H\left(\frac{160k}{3}\middle|\frac{25600k^3}{27}\right)$)

[1] Bildquelle: Volker Fischer, Ulrich Schneider, Stefan Heiliger Design, Ausstellungskatalog zur gleichnamigen Ausstellung im Museum für angewandte Kunst Frankfurt am Main, Edition Menges Stuttgart/London 2007

Bestimmen Sie für k einen Bereich so, dass zwischen Hochpunkt und Tiefpunkt auf dem Boden eine Entfernung von mindestens 7 dm und höchstens 8 dm liegt.

Geben Sie die Ortskurve der Hochpunkte an.
Geben Sie für den Bereich $7 \le x_H \le 8$ die Werte für die kleinste und die größte Höhe der Hochpunkte an.

(10 Punkte)

d) Der Sessel kann höchstens so weit nach vorne schwingen, bis das Fußende des Sessels auf den Boden kommt – siehe Abbildung 1. In Abbildung 2, die den Sessel im Gleichgewichtszustand zeigt, befindet sich dieses Fußende in $F(10|2,7)$.
(Im Gleichgewichtszustand liegt F auf der Funktion h, die an die Funktion g nach rechts knickfrei anschließt.)

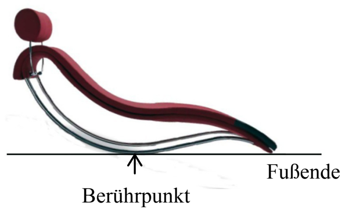


Abb. 1

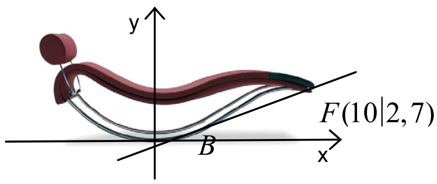


Abb. 2

Wie weit der Sessel nach vorne kippen kann, lässt sich mit Hilfe der Tangente vom Fußpunkt F an den Graphen von g ermitteln. Der Berührpunkt B der Tangente mit dem Graphen hat die Koordinaten $B(x_B|g(x_B))$.

Leiten Sie aus der Situation mit der Tangente und dem Graphen von g, die im rechten Bild gezeigt ist, möglichst viele unterschiedliche Gleichungen her (mindestens drei Gleichungen).

Nutzen Sie im Folgenden die Funktionsgleichung $g(x) = -0,0125x^3 + 0,15x^2$ aus Aufgabenteil a).
Leiten Sie zur Ermittlung der Berührstelle x_B aus den angegebenen Bedingungen eine Gleichung der Form $ax_B^3 + bx_B^2 + cx_B + d = 0$ her.

Für das gesuchte x_B ergibt sich als Lösung dieser Gleichung $x_B \approx 1,10$. Ermitteln Sie hiermit den Winkel α, um den der Sessel höchstens nach vorne kippen kann.

(10 Punkte)

Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis

Skatebahn

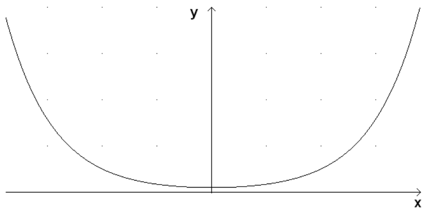
Hinweis: Runden Sie alle Ergebnisse auf zwei Dezimalstellen hinter dem Komma.

Skate-Parks stellen Bahnen zur Verfügung, die mit Skateboards, Inlinern oder BMX-Rädern befahren werden können.

Der Betreiber eines Skate-Parks schreibt einen Wettbewerb aus. Jugendliche sollen einen Vorschlag für die Konstruktion einer Bahn einreichen.

Eine Gruppe von Jugendlichen nimmt an dem Wettbewerb teil. Sie stellen Skatebahnen im Profil als Graphen von Funktionen dar (Siehe Grafik und Profil).

In dieser Aufgabe werden die Modellierungen einer Skatebahn durch unterschiedliche Funktionen untersucht. Das Koordinatensystem wird dabei so gewählt, dass der Tiefpunkt der Bahn auf der y – Achse und die x – Achse auf der Höhe des Erdbodens liegt.



Eine Bahn im Profil

a) Der Betreiber des Skate-Parks gibt bestimmte Eckdaten für eine Bahn vor. An der tiefsten Stelle soll die Bahn $0{,}1$ m über dem Erdboden liegen. In einem Abstand von 4 m zur tiefsten Stelle muss die Bahn eine Höhe von 5 m aufweisen.

Eine erste Modellierung, die sich nur auf den Bereich $0 \le x \le 4$ beschränkt, wird mit der Funktion f vom Typ $f(x) = a \cdot e^{kx}$ vorgenommen.

Ermitteln Sie aus den oben genannten Anforderungen an den *rechten* Teil der Bahn den Wert der Parameter a und k und die Funktionsgleichung.
(Kontrollergebnis: $f(x) = 0{,}1e^{0{,}98x}$ für $0 \le x \le 4$)

(3 Punkte)

b) Skizzieren Sie den *linken* Teil der Bahn mit Hilfe der Funktion g mit $g(x) = 0{,}1e^{-0{,}98x}$ für $-4 \le x \le 0$ in das Koordinatensystem im Anhang.
Geben Sie die Gleichungen der Ableitungen f' und g' an. In der Darstellung muss die Basis e verwendet werden.
Begründen Sie unter Verwendung der Steigungen $f'(0)$ bzw. $g'(0)$, weshalb es nicht sinnvoll ist, die Bahn mit Hilfe der Funktionen f und g zu konstruieren.

(5 Punkte)

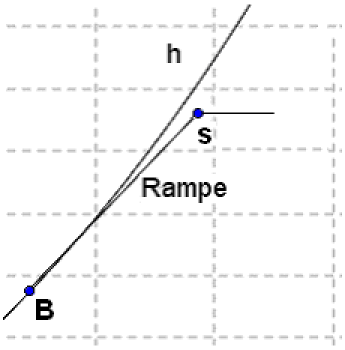
Eine weitere Modellierung verwendet eine Funktion h mit $h(x) = 0{,}05\,(e^{1{,}15x} + e^{-1{,}15x})$ für $-4 \le x \le 4$.

c) Entscheiden Sie mit Hilfe einer Überprüfung der Funktionswerte, ob die Bahn unter Verwendung der Funktion h im gesamten Intervall die geforderten Kriterien näherungsweise erfüllt.

Ermitteln Sie die Gleichung der Ableitung h'. In der Darstellung muss die Basis e verwendet werden.
(Zur Kontrolle: $h'(x) \approx 0{,}06\,(e^{1{,}15x} - e^{-1{,}15x})$)
Ermitteln Sie rechnerisch den Tiefpunkt der Bahn.

(8 Punkte)

d) Die Bahn mit der Funktion h für $x > 0$ hat im *rechten* Teil eine Rampe. Sie ermöglicht einen leichten Einstieg in die Bahn. Die Rampe, welche als Stück einer Geraden beschrieben werden kann, wird im Punkt B tangential in die Bahn geführt. Sie hat eine Steigung von $m = 2$ und ist 1 Meter lang. Sie beginnt im Punkt S.



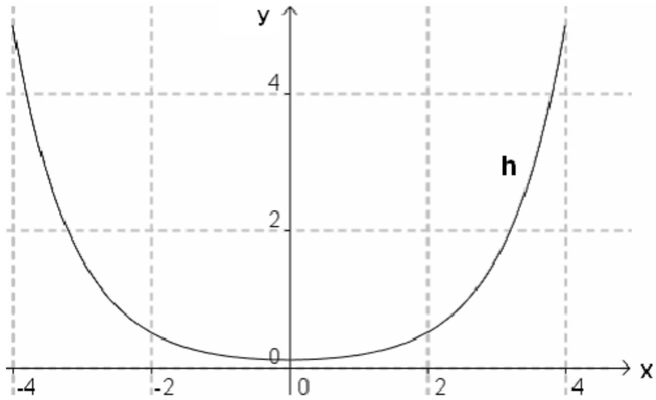
Berechnen Sie unter Verwendung Ihres Rechners den Eintrittspunkt B der Rampe in die Bahn.

Ermitteln Sie die Geradengleichung der Rampe.

Berechnen Sie die Koordinaten des Startpunkts S der Rampe.

(Hinweis: Nutzen Sie ggfs. h' aus Aufgabenteil c) (10 Punkte)

e) Die Bahn mit der Funktion h für $-4 \le x \le 4$ soll von der Seite mit Holz verkleidet werden.



Ermitteln Sie eine Stammfunktion zu h. In der Darstellung muss die Basis e verwendet werden.

Berechnen Sie die Fläche der Holzverkleidung zwischen dem Graphen und der x-Achse über dem angegebenen Intervall.

(4 Punkte)

f) Die Bogenlänge l einer Kurve f kann mit der Formel $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$ für $a \le x \le b$ errechnet werden, sofern die Funktion f differenzierbar ist.

Geben Sie die Berechnungsvorschrift an mit deren Hilfe sich die Bogenlänge l der Kurve h berechnen lässt.

Berechnen Sie unter Einsatz Ihres Rechners die Bogenlänge l der Kurve h im Intervall $-4 \le x \le 4$.

(3 Punkte)

Aufgabe 3 - zum Themenbereich Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik

Bürgerpark-Tombola

Die Bürgerpark-Tombola in Bremen gibt es seit über fünfzig Jahren. Während eines Jahres werden drei Monate lang in der Stadt Lose verkauft. Das Geld, das mit der Lotterie eingenommen wird, trägt wesentlich dazu bei, dass der Bürgerpark und der Stadtwald ohne die Verwendung von Steuergeldern gepflegt werden können.

a) Eine Erhebung der Bürgerpark-Tombola- Betreiber ergab:
Ca. 68% der Loskäuferinnen und –käufer kommen aus Bremen, etwa 19% aus dem Bremer Umland mit bis zu 30 km Entfernung, ca. 13% wohnen noch weiter von Bremen entfernt.
Diese statistischen Daten sollen im Folgenden als Wahrscheinlichkeiten für die entsprechenden Merkmale in einem Zufallsversuch „Ziehen einer Person aus allen Loskäuferinnen und -käufern“ aufgefasst werden. Außerdem beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Hauptgewinn an eine *weibliche* Person aus Bremen geht, $39{,}5\%$.

Ermitteln Sie aus diesen Angaben den Anteil der weiblichen und männlichen Personen, die ein Los der Bürgerpark-Tombola kaufen unter der Annahme, dass das zahlenmäßige Verhältnis der Geschlechter unter den Loskäuferinnen und –käufern in allen Regionen gleich ist.

(3 Punkte)

Laut Angaben der Betreiber gewinnt bei der Bürgerpark-Tombola jedes $4.$ Los.

b) Jemand kauft 6 Lose. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Gewinnlose unter den 6 gekauften Losen.

Begründen Sie, warum die Binomialverteilung eine geeignete Verteilung der Zufallsgröße ist.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse auf 4 Stellen genau:

- Genau zwei Lose sind Gewinnlose.
- Mindestens 4 Lose sind Nieten.

Ermitteln Sie, wie viele Lose eine Person kaufen muss, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens ein Gewinnlos hat.

(10 Punkte)

c) Eine Person kauft während der Bürgerpark-Tombola 12 Lose.
Bestimmen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Gewinnlose unter den 12 gekauften Losen.

Die Person kauft diese 12 Lose jedoch nicht auf einmal, sondern viermal je drei Lose. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie jedes Mal mindestens einen Gewinn erhält.

(5 Punkte)

Die Bürgerpark-Tombola umfasst mehrere Lotterien hintereinander. Pro Lotterie werden $40\,000$ Lose verkauft.

d) Jede Lotterie der Bürgerpark-Tombola hat einen unterschiedlichen Hauptgewinn (Autos, Traumreisen, Sparbücher, ...) und unterschiedliche Gewinne in den verschiedenen Gewinnklassen, aber in jeder Lotterie werden 80% der Los-Einnahmen von $40\,000$ € als Gewinn wieder ausgeschüttet, bei einem Lospreis von 1 € beträgt der Erwartungswert für den Gewinn durch die Loseinnahmen also durchschnittlich $0{,}80$ €.
Tatsächlich liegt der Erwartungswert für die Gewinnsumme pro Los durch Sonderveranstaltungen, bei denen Bremer Firmen zusätzliche Gewinne ins Spiel bringen, bzw. durch Firmenspenden sogar höher, nämlich zwischen $1{,}10$ € und $1{,}20$ €.

Bestimmen Sie mit Hilfe dieses Erwartungswerts einen Bereich, in dem die Geld- bzw. Sachspenden der Bremer Firmen pro Lotterie liegen.

Ermitteln Sie für den folgenden Gewinnplan den fehlenden Wert in der Tabelle, wenn der Erwartungswert für den Gewinn pro Los $1{,}10$ € beträgt. (Die Wahrscheinlichkeit, irgendetwas zu gewinnen, beträgt hier nicht genau , sondern nur ungefähr 0,25.)

Gewinnklasse	Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn	Wert des Gewinns
Hauptgewinn	$\frac{1}{40000}$	6000 €
1000 € bis 3000 €	$0{,}0001$	durchschnittlich 2000 €
100 € bis 500 €		durchschnittlich 250 €
Kleinstgewinne	$0{,}248$	durchschnittlich 1 €

(6 Punkte)

e) Die Anschuldigung, dass bei der Bürgerparktombola weniger als 25% Gewinne ausgeschüttet werden, soll mit Hilfe eines Tests mit 100 Losen überprüft werden.
Entwerfen Sie für diese Situation einen Hypothesentest und stellen Sie eine Entscheidungsregel auf dem Signifikanzniveau von 5% auf.

Für $n = 20$ und ein Signifikanzniveau von 5% lautet eine mögliche Entscheidungsregel: „Wenn von 20 Losen weniger als 2 Gewinnlose sind, nehme ich an, dass der Gewinnanteil unter 25% liegt.“
Erklären Sie mit einer Beispielrechnung und einer kurzen Erläuterung zur Rechnung, warum ein Hypothesentest mit dieser Entscheidungsregel für eine Person, die den starken Verdacht hat, dass die Gewinnchancen niedriger sind, unbefriedigend ist.

(9 Punkte)

Aufgabe 4 - zum Themenbereich Lineare Algebra

Marienkäfer

Marienkäfer (Coccinellidae) sind eine weltweit verbreitete Insektenfamilie. In Europa findet man über 250 Arten und Unterarten, darunter die bekannten Siebenpunkt-Marienkäfer. Sie haben grob den folgenden Entwicklungszyklus: Nach ihrer Überwinterung im Frühjahr paaren sich die Altkäfer (Anzahl K). Anschließend legen die Weibchen pro Monat etwa 80 Eier, von denen sich ein Fünftel zu Larven (Anzahl L) entwickelt. Während des nächsten Monats sterben 90% der Larven. Die übrigen verpuppen sich und werden zu neuen Käfern (Anzahl N), die aber im gleichen Jahr noch keine Eier legen.

Vom Frühjahr bis Herbst gilt: Multipliziert man den Populationsvektor $\vec{v}$ mit der Matrix A von links, erhält man den Populationsvektor für den Folgemonat. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 16 \\ 0{,}1 & 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} L \\ N \\ K \end{pmatrix}.$$

a) Zeichnen Sie ein Übergangsdiagramm.

Geben Sie die Überlebensrate eines Altkäfers und die Überlebensrate eines Neukäfers pro Monat an.

Begründen Sie anhand der Matrix oder ihres Übergangsdiagramms, warum nach diesem unvollständigen Modellansatz, der nicht die Überwinterung enthält, die Marienkäferpopulation langfristig aussterben müsste. (8 Punkte)

b) In einem Garten haben nach dem Winter eine Anzahl Marienkäfer überlebt und beginnen Anfang April mit der Paarung. Anfang Juni, also nach zwei Monaten, gibt es dann 320 Larven, 40 Neukäfer und 16 Altkäfer. Geben Sie für diesen Zeitpunkt den Populationsvektor $\vec{v}_2$ an.

Berechnen Sie die Vektoren $\vec{v}_3$ und $\vec{v}_4$, die die Population nach drei bzw. vier Monaten beschreiben.

Bestimmen Sie den Vektor $\vec{v}_0$, der die Population zu Beginn der Paarungszeit beschreibt. (7 Punkte)

c) Die Matrix A hat das charakteristische Polynom $p(x) = x^3 - 1{,}7 \cdot x^2 + 0{,}72 \cdot x$. Bestimmen Sie damit die beiden positiven Eigenwerte k_1 und k_2 , sowie jeweils einen zugehörenden Eigenvektor $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$. Benutzen Sie nicht die Eigenwert/Eigenvektor-Funktionen ihres Taschenrechners.

Begründen Sie mit Hilfe Ihres Ergebnisses, ob theoretisch eine stabile Verteilung der Marienkäferpopulation möglich ist. Falls sie möglich ist, geben Sie sie an. (7 Punkte)

Ab jetzt wird die Matrix B betrachtet, die den Übergang von einem Jahresende zum nächsten Jahresende beschreibt. Wir unterscheiden Neukäfer (Anzahl N), die sich im laufenden Jahr entwickelt haben und Altkäfer (Anzahl K), die bereits einmal überwintert haben. Larven werden nicht betrachtet. Für den Siebenpunkt-Marienkäfer sei

$$B = \begin{pmatrix} 1{,}4 & 0{,}9 \\ 0{,}8 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} N \\ K \end{pmatrix}.$$

d) Geben Sie an, welcher Anteil der Altkäfer und welcher Anteil der neuen Käfer innerhalb eines Jahres sterben.

Erläutern Sie, welchem biologischen Vorgang das Matrixelement $1{,}4$ entspricht. (4 Punkte)

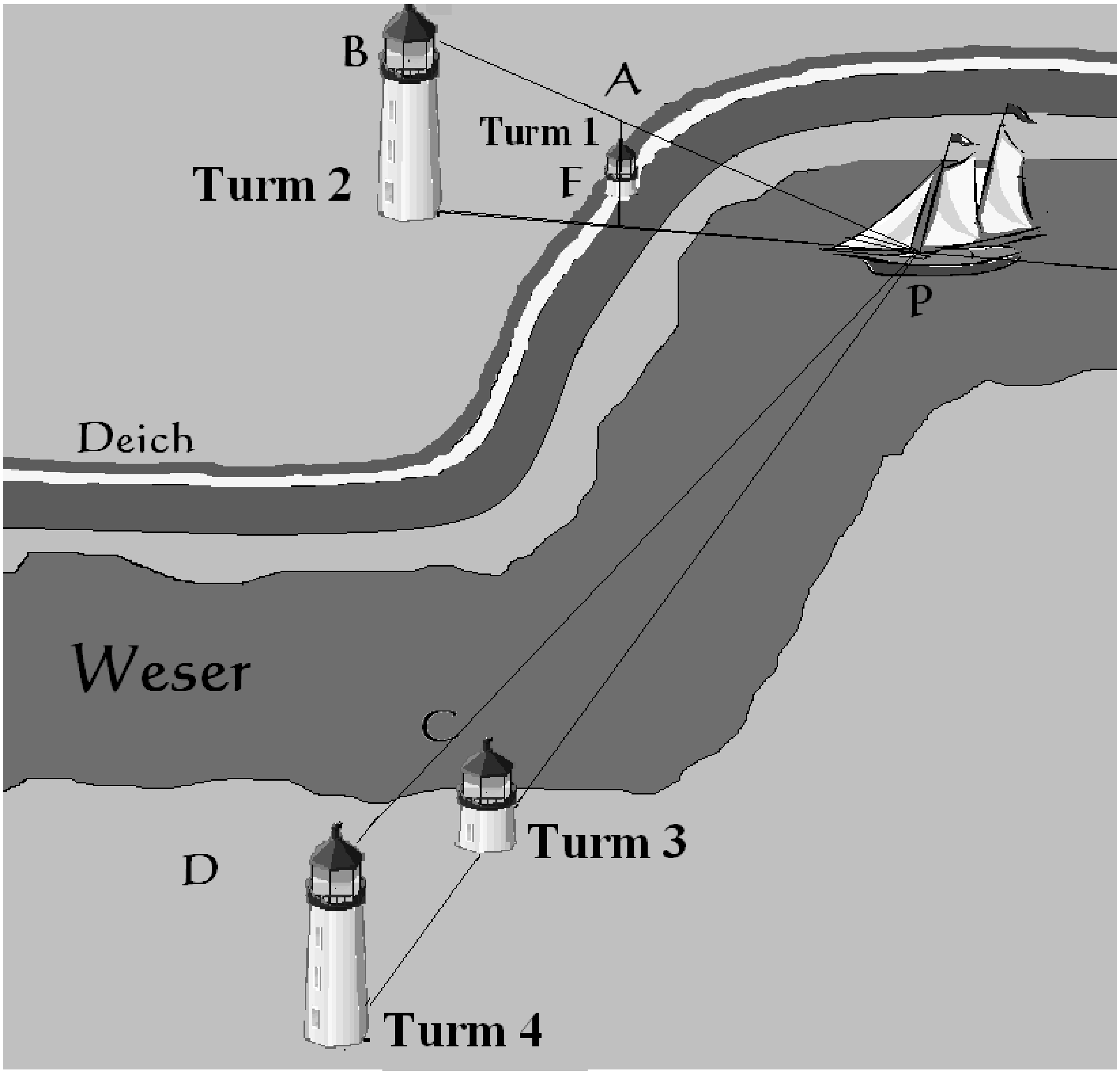
e) Zeigen Sie, dass $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren der Matrix B sind und bestimmen sie die zugehörigen Eigenwerte k_1, k_2. Stellen Sie eine Anfangspopulation $\vec{v}_0$ von 130 Neukäfern und 70 Altkäfern als Linearkombination $r \cdot \vec{u}_1 + s \cdot \vec{u}_2$ der beiden Eigenvektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ dar.

Berechnen Sie $\vec{v}_6$, also die Population nach 6 Jahren, ohne Matrizenmultiplikation, sondern unter Verwendung der Eigenwertgleichung $B * \vec{u} = k \cdot \vec{u}$.

Geben Sie ohne Verwendung einer Matrixmultiplikation einen Ausdruck für $\vec{v}_n$ an, d.h. für den Populationsvektor nach n Jahren. (7 Punkte)

Aufgabe 5 - zum Themenbereich Analytische Geometrie

Leuchttürme an der Weser



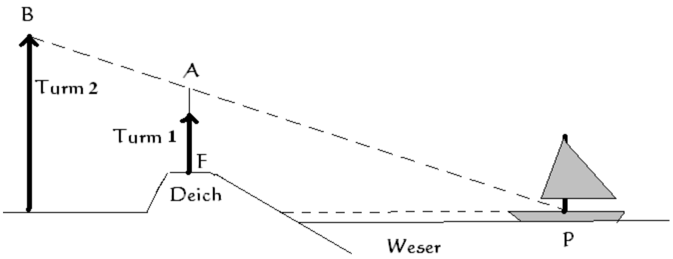
Entlang der Weser stehen zahlreiche Leuchttürme zur Orientierung der Schifffahrt. Ein Schiff muss stets so gelenkt werden, dass es auf zwei hintereinander stehende Leuchttürme zufährt, ein niedriger Turm mit dem Unterfeuer und dahinter ein hoher Turm mit dem Oberfeuer. Wenn das Schiff eine Stelle erreicht, aus deren Sicht zwei weitere Leuchttürme hintereinander stehen, wendet der Steuermann das Schiff in diese neue Richtung[1]. In der Abbildung oben fährt ein Schiff in Richtung der Türme 1 und 2. Wenn es die Stelle P erreicht, fährt es in Richtung der Türme 3 und 4 weiter.

[1] Dass diese Stelle durch ein Quermarkenfeuer signalisiert wird, lassen wir hier außer Acht.

Wir legen ein rechtwinkliges Koordinatensystem so zugrunde, dass die x_1-x_2-Ebene dem Erdboden entspricht und die x_3-Achse senkrecht zum Himmel zeigt. Die Stelle, an der das Schiff dreht, wird dann durch den Punkt $P(-700|500|0)$ beschrieben. Die Punkte $B(-700|-500|40)$ und $D(1300|-500|30)$ stellen jeweils die Mitten der Oberfeuer der Türme 2 und 4 dar. Die Augen des Steuermannes befinden sich ungefähr auf Höhe des Erdbodens.

Alle Koordinaten sind dabei in Meter angegeben.

a) Der Blick des Steuermannes zum Oberfeuer soll durch eine Gerade beschrieben werden. Geben Sie eine Geradengleichung für die Gerade g an, die durch die Punkte P und B geht.
Das Unterfeuer darf nicht so hoch sein, dass es aus Sicht des Steuermannes das Oberfeuer verdeckt. Bestimmen Sie den Parameter z so, dass der Punkt $A(-700|-100|z)$ auf der Geraden g liegt.
Das Unterfeuer steht auf dem Deich mit dem Fußpunkt $F(-700|-100|10)$.
Geben Sie die Höhe des Deiches an.
Geben Sie an, wie hoch der Turm 1 sein darf. (6 Punkte)



b) Beim Drehmanöver des Schiffes geht der Blick des Steuermannes mehrfach vom Leuchtturm 2 zum Leuchtturm 4 und beschreibt damit den Ausschnitt einer Ebene.
Bestimmen Sie eine Ebenengleichung in Parameterform und in Normalenform für die Ebene E, die die Punkte P, B und D enthält.
Ermitteln Sie den Neigungswinkel α zwischen der Blickebene E des Steuermannes und dem Boden.
Der Steuermann sieht die beiden Oberfeuer unter verschiedenen Winkeln gegenüber dem Erdboden. Geben Sie ohne Rechnung an, welche Größe diese Winkel gegenüber dem Winkel α haben. (12 Punkte)

c) Eine Möwe fliegt ausgehend vom Punkt $Q(300|400|135)$ geradlinig nach Westen mit 20% Gefälle, d.h. auf jeden Meter in Richtung Westen sinkt sie $0{,}2$ m (Hinweis: Die x_1-Achse zeigt nach Süden, die x_2-Achse nach Osten).
Bestimmen Sie den Punkt S, an dem die Möwe nur noch 15 m über dem Boden fliegt.
Die Möwe fliegt also entlang einer Geraden h während der Steuermann gerade zum Oberfeuer des Turmes 4 blickt.
Untersuchen Sie die Parallelität der Geraden h und der Geraden durch D und P.
Ermitteln Sie den geringsten Abstand zwischen diesen beiden Geraden .
Begründen Sie anschließend, warum die beiden Geraden windschief sind. (11 Punkte)

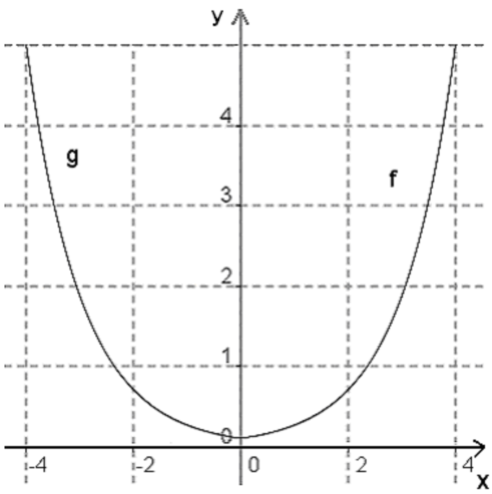
d) Bestimmen Sie den Abstand des Schiffes beim Drehmanöver in P vom Fußpunkt des Turmes 4, der in der x_1-x_2-Ebene liegt.
Bestimmen Sie den Punkt, an dem sich das Schiff befindet, wenn es eine Minute lang mit einer Geschwindigkeit von 12 km/h von P auf den Turm 4 zufährt.
(Hinweis: Rechnen Sie um auf Meter und Minuten.) (4 Punkte)

Aufgabe 1 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
a)	$g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $g'(x)=3ax^2+2bx+c$ $g''(x)=6ax+2b$ $g(0)=0 \quad \Rightarrow \quad d=0$ $g'(0)=0 \quad \Rightarrow \quad c=0$ $g(8)=3{,}2 \quad \Rightarrow \quad 3{,}2=a\cdot 8^3+b\cdot 8^2$ $g'(8)=0 \quad \Rightarrow \quad 0=3\cdot a\cdot 8^2+2\cdot b\cdot 8$ Die Lösung des linearen Gleichungssystems $\left\lvert\begin{matrix}512a+64b=3{,}2\\ 192a+16b=0\end{matrix}\right\rvert$ liefert $a=-0{,}0125$ und $b=0{,}15$ Damit ist $g(x)=-0{,}0125x^3+0{,}15x^2$ eine mögliche Lösung. Wegen $g''(8)<0$ liegt an der in der Aufgabe geforderten Stelle ein Hochpunkt. Also ist $g(x)=-0{,}0125x^3+0{,}15x^2$ die geforderte Funktionsgleichung.	8		
b)	$f'(x)=-0{,}0219x^2+0{,}0956x$ $f''(x)=-0{,}0438x+0{,}0956$ Knickfreier Übergang: $f(0)=g(0)=0$ und $f`(0)=g`(0)=0$ Gilt $f''(x)>0$ für alle x mit $-5{,}7\le x\le 0$, so liegt in dem Bereich eine Linkskrümmung vor. Da $f''(x)>0$ für $x\le 0$, ist der Graph zu f für $-5{,}7\le x\le 0$ linksgekrümmt.	1	4	
c)	$g_k'(x)=-0{,}0375x^2+2kx$ $g_k''(x)=-0{,}075x+2k$ Da $g_k'(0)=-0{,}0375\cdot 0^2+2k\cdot 0=0$ und $g_k''(0)=-0{,}075\cdot 0+2k>0$ wegen $k>0$, befindet sich bei $x=0$ ein Tiefpunkt. Da außerdem $g_k(0)=0$, hat jeder Funktionsgraph zu $g_k(x)=-0{,}0125x^3+kx^2$ in $T(0/0)$ einen Tiefpunkt. Hochpunkt: Aus $g_k'(x)=0$ erhält man $x_T=0$ und $x_H=\frac{160}{3}k$. $g_k''(\frac{160k}{3})=-2k<0$ wegen $k>0$. Also liegt bei $x_H=\frac{160}{3}k$ ein Hochpunkt. Funktionswert von x_H: $g_k(\frac{160}{3}k)=\frac{25600}{27}k^3$			

	Für $x_H = 7$ ist $k = \frac{21}{160} = 0{,}13125$, für $x_H = 8$ ist $k = \frac{3}{20} = 0{,}15$ k muss zwischen $0{,}013125$ und $0{,}15$ gewählt werden. Ortslinie $o(x)$: Mit $k = \frac{3}{160} x_H$ hat die Ortslinie für die Hochpunkte die Gleichung $o(x) = \frac{1}{160} x^3$. Es gilt $o(7) \approx 2{,}1$ und $o(8) = 3{,}2$. Da $o(x)$ monoton steigend ist, sind dies die Werte der Hochpunkte mit der kleinsten und der größten Höhe. (Die Gestellhöhe variiert beim rechten Teil des Gestells zwischen 21 cm bei der kürzesten Variante und 32 cm bei der längsten Variante.)	4	6	
d)	Mit $F(10/2{,}7)$; $B(x_B / g(x_B))$ mindestens drei der folgenden Gleichungen (sind in einer Gleichung mehrere Beziehungen enthalten, können sie auch mehrfach gewertet werden) : Tangentengleichung $t(x) = m \cdot x + b$, $g(x_B) = t(x_B)$, $m = g'(x_B)$, $t(10) = 2{,}7$ $g'(x_B) = \frac{2{,}7 - g(x_B)}{10 - x_B}$, $t(x) = g'(x_B) \cdot x + b$, $b = 2{,}7 - g'(x_B) \cdot 10$ Bestimmung der Gleichung: $\frac{2{,}7 - g(x_B)}{10 - x_B} = g'(x_B) = -0{,}0375 x_B^{\,2} + 0{,}3 x_B$ $\Rightarrow 0{,}025 x_B^{\,3} - 0{,}525 x_B^{\,2} + 3 x_B - 2{,}7 = 0$ Alternativer Ansatz: $g(x_B) = -0{,}0125 x_B^{\,3} + 0{,}15 x_B^{\,2} = t(x_B)$ $= (-0{,}0375 x_B^{\,2} + 0{,}3 x_B) \cdot x_B + 2{,}7 - (-0{,}0375 x_B^{\,2} + 0{,}3 x_B) \cdot 10$ $\Rightarrow\ 0 = -0{,}025 x_B^{\,3} + 0{,}525 x_B^{\,2} - 3 x_B + 2{,}7$ Der Sessel kann höchstens um den Winkel α gekippt werden, den die Tangente mit der x-Achse einschließt. Tangentensteigung $m = g'(x_B) = g'(1{,}10) = \frac{2277}{8000} = 0{,}284625$ $\tan\alpha = m \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 15{,}9°$ Der Sessel kann um einen Winkel von ca. $16°$ gekippt werden.		7	3
Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**13**	**17**	**3**

Aufgabe 2 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>$f(0)=0{,}1 \Leftrightarrow a=0{,}1 \qquad f(4)=5 \Leftrightarrow k \approx 0{,}98$
Die Werte der Parameter stimmen überein.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Skizze des Graphen g für $-4 \le x \le 0$:


Gleichungen der Ableitungen unter Berücksichtigung der Rundungen:
$f'(x)=0{,}1\cdot 0{,}98\, e^{0{,}98x}$
$f'(x)=0{,}098\, e^{0{,}98x} \approx 0{,}10\cdot e^{0{,}98x}$
$g'(x)=0{,}1\cdot(-0{,}98)\, e^{-0{,}98x}$
$g'(x)=-0{,}098 e^{0{,}98x} \approx -0{,}10 e^{0{,}98x}$
Funktionswert der Ableitung an der Stelle $x=0$:
$f'(0)\approx 0{,}1$
$g'(0)\approx -0{,}1$
Die Bahn hätte einen Knick. Aus Gründen der Symmetrie müsste aber $m=0$ gelten.</td><td>1</td><td>3</td><td>1</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$h(0)=0{,}1$, $h(4)\approx 4{,}97$, $h(-4)\approx 4{,}97$
An der Stelle $x=0$ wird der geforderte Wert eingehalten. An den Stellen $x=4$ bzw. $x=-4$ liegt man sehr nahe am gewünschten Wert.
Der Funktionsgleichung der Ableitung lautet unter Berücksichtigung der Rundung:
$h'(x)\approx 0{,}06\,(e^{1{,}15x}-e^{-1{,}15x})$
$solve(h'(x_E)=0, x_E) \Leftrightarrow x_E=0$
Wegen $h''(x_E)=0{,}14>0$ handelt es sich um einen Tiefpunkt $T(0\,|\,0{,}1)$.</td><td>5</td><td>3</td><td></td></tr>
</table>

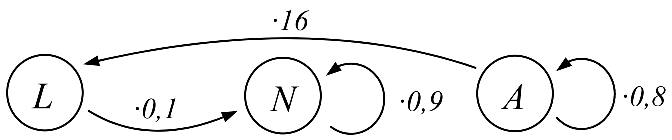
d)	Berechnung des Eintrittspunkts der Rampe in die Bahn: $solve(h'(x)=2,x) \Leftrightarrow x \approx 3,05$ $h(3,05) \approx 1,67$ Die Rampe berührt bei $B(3,05 \mid 1,67)$ die Bahn. Die Gerade hat die Funktionsgleichung $t(x) = m \cdot x + b$: $1,67 = 2 \cdot 3,05 + b \Leftrightarrow b = -4,43$ $t(x) = 2x - 4,43$. Die Rampe hat eine Länge von 1 m; Lösungsansatz mit Hilfe des Satzes vom Pythagoras, wobei das Steigungsdreieck verwendet werden kann mit $\Delta x = a,\ \Delta y = 2 \cdot a$ (alternativ wäre auch ein trigonometrischer Ansatz möglich): $1 = a^2 + (2a)^2 \Leftrightarrow a_{1,2} = \pm\sqrt{0,2} \Leftrightarrow a_{1,2} \approx \pm 0,45$ Nur $a_1 = 0,45$ ist die gesuchte Lösung, weil die Rampe sonst unterhalb der Bahn verliefe. $x_S = 3,05 + 0,45 \Leftrightarrow x_S = 3,50$ $t(3,50) = 2,57$. Der Startpunkt hat die Koordinaten $S(3,50 \mid 2,57)$.	4	4	2
e)	Eine Stammfunktion zu h wird mittels H angegeben: $H(x) = \int h(x)dx \Leftrightarrow H(x) = \frac{1}{23}\left(e^{1,15x} - e^{-1,15x}\right) + c; c \in \mathbb{R}$ $H(4) - H(-4) \approx 8,65$. Die Fläche der seitlichen Holzverkleidung beträgt ca. $8,65$ m².	2	2	
f)	$l = \int_{-4}^{4} \sqrt{1 + (0,06\,(e^{1,15x} - e^{-1,15x}))^2}\,dx \approx 14,21$ Die Bahn hat eine Länge von ungefähr $14,21$ m.	1	2	
Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**13**	**17**	**3**

Aufgabe 3 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

<table>
<tr><th rowspan="2" colspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Lösung zum Beispiel mit einem (verkürzten) Baumdiagramm:
$0,68 \cdot p = 0,395 \;\Rightarrow\; p \approx 0,58$
Der Anteil der Loskäuferinnen beträgt ca. 58%, der der Loskäufer ca. 42%.</td><td>1</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Es gibt zwei Ausgänge pro Losziehung: Gewinn oder Niete . Die Gewinnchance der einzelnen Lose kann als unabhängig voneinander angesehen werden. (p bleibt wegen der großen Anzahl der Lose im Topf (40000) und dem dazu verschwindend kleinen Anteil der gekauften Lose gleich.)
$n = 6;\; p = 0,25$
$P(X = 2) \approx 0,2966$
$P(X \le 2) \approx 0,8306$
$P(X \ge 1) \ge 0,95 \Leftrightarrow 1 - 0,75^n \ge 0,95 \;\Rightarrow n \ge 11$
Man muss mindestens 11 Lose kaufen, um mit mindestens 95% iger Wahrscheinlichkeit mindestens ein Gewinnlos dabei zu haben.</td><td>7</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$n = 12$, Erwartungswert $\mu = n \cdot p = 3$
$n = 3;\; X, p$ wie in b) ; $P(X \ge 1) = \frac{37}{64} \approx 0,5781$
$P($ jedes Mal mindestens einen Gewinn $) = \left(\frac{37}{64}\right)^4 \approx 0,1117$</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Unterschied zwischen den Erwartungswerten mit und ohne Spenden: $0,30$ € bis $0,40$ €.
Spendenaufkommen: $0,30 \cdot 40000 = 12000$
$0,40 \cdot 40000 = 16000$
Das Spendenaufkommen liegt zwischen 12000 € und 16000 € pro Lotterie.
Gewinnwahrscheinlichkeit für einen Gewinn zwischen 100 € und 500 €:
$1,1 - \left(\frac{1}{40000} \cdot 6000 + 0,0001 \cdot 2000 + 0,248 \cdot 1\right) = p \cdot 250$
$\Rightarrow\; p \approx 0,002$
Die Wahrscheinlichkeit, ein Los mit Gewinn zwischen 100 € und 500 € zu ziehen, beträgt ca. 0,2%.</td><td>3</td><td>3</td><td></td></tr>
</table>

e)	Hypothese H_1 : Die Gewinnchance liegt unter 25%, $p_1 < 0,25$ Hypothese H_0 : Die Gewinnchance ist 25% oder liegt darüber, $p_0 \geq 0,25$ Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ Testgrößen: X : Anzahl der Gewinnlose, binomialverteilt mit $n = 100$; $p_0 = 0,25$ Linksseitiger Test, da $p_1 < 0,25$ (oder Begründung z.B. über Skizze) Bestimmung des Verwerfungsbereichs: $V = \{0;...,17\}$, da $P(X \leq 17) \leq 0,05$ und $P(X \leq 18) \geq 0,05$ für n und p_0. Entscheidungsregel: Wenn von 100 Losen 17 oder weniger Lose Gewinnlose sind, nehme ich an, dass der Gewinnanteil unter 25% liegt. Die Wahrscheinlichkeit β für einen Fehler 2.Art, also den Fehler, dass die Hypothese H_1 irrtümlicherweise nicht angenommen wird, ist bei dem Test mit $n = 20$ auch noch bei größeren Abweichungen von p_0 sehr hoch. Zum Beispiel: $p_1 = 20\%$ Dann gilt $\beta = P(X \geq 2) = 0,931$ (Auch Argumentationen über Trennschärfe oder die Gütefunktion sind möglich.)		6	3
Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**13**	**17**	**3**

Aufgabe 4 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
a)	 Überlebensrate für Altkäfer $p_K = 0{,}8$ und für Neukäfer $p_N = 0{,}9$. Da nur Altkäfer für Larven sorgen, die Altkäfer aber allmählich sterben und keine hinzukommen können, werden auch weniger Neukäfer hinzukommen. Da die Neukäfer allmählich sterben, stirbt auch die ganze Population.	4	3	1
b)	$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 320 \\ 40 \\ 16 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = A * \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 256 \\ 68 \\ 12{,}8 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_4 = A * \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 204{,}8 \\ 86{,}8 \\ 10{,}24 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix}$ Da zu Beginn der Paarungszeit nur Altkäfer vorhanden sind und von diesen pro Monat 80% überleben, erhält man $16 \cdot \left(\frac{1}{0{,}8}\right)^2 = 25$.	3	4	
c)	Aus dem Polynom folgen die Eigenwerte $k_1 = 0{,}8$ und $k_2 = 0{,}9$. Durch Einsetzen in die Eigenwertgleichung und Umformen in Dreiecksgestalt erhält man als Eigenvektoren zum Beispiel $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ -20 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die stabile Verteilung gehört zum dominanten Eigenwert $k_2 = 0{,}9$ und besteht nur aus Neukäfern. Der zweite Eigenvektor kommt wegen der unterschiedlichen Vorzeichen in den Komponenten nicht in Frage.	2	4	1
d)	Es sterben 20% der Neukäfer und alle Altkäfer. Die Neukäfer eines Jahres werden im folgenden Jahr zu Altkäfern und bringen dann wieder Neukäfer hervor. Aus jedem Neukäfer entstehen im Folgejahr durchschnittlich 1,4 Neukäfer.	2	2	
e)	Multiplikation der Matrix B mit den vorgegebenen Eigenvektoren ergibt $\begin{pmatrix} 1{,}4 & 0{,}9 \\ 0{,}8 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ -0{,}8 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1{,}4 & 0{,}9 \\ 0{,}8 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16{,}2 \\ 7{,}2 \end{pmatrix}$. Daraus erhält man die Eigenwerte $k_1 = -0{,}4$ und $k_2 = 1{,}8$. Mittels eines Gleichungssystems $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 130 \\ 70 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$ erhält man als Lösung $r = 5$, $s = 15$. Mit Hilfe der Eigenwertgleichung bekommt man $B^6 * \left(5 \cdot \vec{u}_1 + 15 \cdot \vec{u}_2\right) = 5 \cdot B^6 * \vec{u}_1 + 15 \cdot B^6 * \vec{u}_2 = 5 \cdot (-0{,}4)^6 \cdot \vec{u}_1 + 15 \cdot 1{,}8^6 \cdot \vec{u}_2$ und damit $\vec{v}_6 = 0{,}02 \cdot \vec{u}_1 + 510{,}18 \cdot \vec{u}_2 \approx \begin{pmatrix} 4592 \\ 2041 \end{pmatrix}$. Allgemein ist $\vec{v}_n = 5 \cdot (-0{,}4)^n \cdot \vec{u}_1 + 15 \cdot 1{,}8^n \cdot \vec{u}_2$.	2	4	1
	Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	**13**	**17**	**3**

Aufgabe 5 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

Lösungsskizze		Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
a)	Mit P als Stützvektor und $\overrightarrow{PB}$ als Richtungsvektor ergibt sich die Geradengleichung $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-700\\500\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-1000\\40\end{pmatrix};t\in\mathbb{R}$. Der Ansatz $\begin{pmatrix}-700\\500\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-1000\\40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-700\\-100\\z\end{pmatrix}$ führt zu $t=\frac{3}{5}=0,6$ und $z=24$. Die dritte Komponente des Fußpunktes F legt die Deichhöhe auf 10 m fest. Punkt A liegt in 24 m Höhe, also muss der Turm kleiner als 14 m sein.	2	4	
b)	Mit dem Stützvektor P und den Spannvektoren $\overrightarrow{PB}$ und $\overrightarrow{PD}$ erhält man die Parametergleichung $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}-700\\500\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\-1000\\40\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2000\\-1000\\30\end{pmatrix};\quad r,s\in\mathbb{R}$. Unterschiedliche Verfahren (z.B. über das Kreuzprodukt der Spannvektoren und Einsetzen des Punktes P) führen zu der Normalenform $\vec{x}*\begin{pmatrix}1\\8\\200\end{pmatrix}-3300=0$. Für den Winkel zwischen den Normalenvektoren der beiden Ebenen gilt: $\cos(\alpha)=\frac{\begin{pmatrix}1\\8\\200\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\8\\200\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}=\frac{200}{\sqrt{40065}}\approx 0,9992$, $\alpha\approx 2,3°$. Rundung kann zu abweichenden Ergebnissen führen. Die Winkel, unter denen der Steuermann die Oberfeuer gegenüber dem Erdboden sieht, sind kleiner als α.	5	6	1

c)	Die Möwe fliegt entlang der Geraden $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 135 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$. Der Ansatz $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 135 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}$ führt zu $s = 600$ und $S(300 \mid -200 \mid 15)$. Für den Abstand der Geraden h von der Geraden durch die Punkte P und D prüfen wir zunächst die Parallelität: Der Ansatz $k \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ -1000 \\ 30 \end{pmatrix}$ für die Richtungsvektoren führt zu dem Widerspruch $0 = 2000$. Die Geraden sind also nicht parallel. Dann benötigen wir einen Vektor $\vec{n}$, der senkrecht auf beiden Geraden steht. Er lässt sich z.B. als Vektorprodukt der Richtungsvektoren bestimmen: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2000 \\ -1000 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -230 \\ -400 \\ 2000 \end{pmatrix}$ mit der Länge $\lvert\vec{n}\rvert = \sqrt{4212900} \approx 2053$. Für den Abstand der Geraden ergibt sich dann ca. $38{,}98$ m: $a = \dfrac{\left(\begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 135 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -700 \\ 500 \\ 0 \end{pmatrix}\right) * \begin{pmatrix} -230 \\ -400 \\ 2000 \end{pmatrix}}{\lvert\vec{n}\rvert} = \dfrac{80000}{\lvert\vec{n}\rvert} \approx 38{,}98$ Da der Abstand größer als Null ist, existiert kein Schnittpunkt. Die Richtungsvektoren der Geraden sind nicht parallel, folglich sind die Geraden windschief.	5	5	1
d)	Für den Fußpunkt des Turmes 4 gilt $F_4(1300 \mid -500 \mid 0)$. Der Abstand zum Punkt P beträgt ca. $2236m$ (wegen $a = \lvert\overrightarrow{PF_4}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix} 2000 \\ -1000 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{5000000} \approx 2236$). Das Schiff legt in einer Stunde 12000 m, in einer Minute also 200 m zurück. Für die neue Position Z gilt: $\vec{z} = \overrightarrow{OZ} = \vec{p} + \frac{200}{2236}\overrightarrow{PF_4} = \begin{pmatrix} -700 \\ 500 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{200}{2236}\begin{pmatrix} 2000 \\ -1000 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -521 \\ 411 \\ 0 \end{pmatrix}$. Das Schiff erreicht also den Punkt $Z(-521 \mid 411 \mid 0)$.	1	2	1
	Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	**13**	**17**	**3**