Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis

Medikament

Einem menschlichen Körper wird z.B. durch eine Infusion kontinuierlich ein Medikament mit einer Dosierung von einem Milliliter pro Minute (ml/min) zugeführt. Das Medikament wird im Körper ebenfalls kontinuierlich abgebaut, und zwar so, dass pro Minute jeweils 5% des dann im Körper vorhandenen Medikaments abgebaut werden.
In der Abbildung 1 des Materials wird der zeitliche Verlauf der Menge $f(t)$ des im Körper vorhandenen Medikaments dargestellt, t in Minuten, $f(t)$ in ml.
Abbildung 2 des Materials zeigt die zugehörige momentane Änderungsrate $f'(t)$ in ml/min.

a) Begründen Sie, warum es sich in Abb. 1 um den Graphen von f und nicht um den Graphen von f' und in Abb. 2 um den Graphen von f' und nicht um den Graphen von f handeln muss.

b) Die Funktion f hat die Funktionsgleichung $f(t) = a - a \cdot e^{-kt}$ mit $a = 20$ in ml.
Berechnen Sie den Parameter k in $f(t)$ so, dass nach 60 Minuten 19 ml vom Medikament im Körper vorhanden sind. Runden Sie den Wert k auf zwei Nachkommastellen.
Bestätigen Sie durch Ableiten von f die Gleichung $f'(t) = e^{-0,05t}$.
Versehen Sie die Markierungsstriche an der $f(t)$ - und der $f'(t)$-Achse in den Abbildungen mit geeigneten Werten.
Berechnen Sie, wie viele ml des Medikamentes nach 90 Minuten im Körper sind.
Berechnen Sie, nach welcher Zeit sich 10 ml im Körper befinden.

c) Berechnen Sie $\int_0^x (e^{-0,05t})\,dt$ für $x = 30$.
Veranschaulichen Sie den Wert des Integrals an beiden Graphen in Abb. 1 und Abb. 2.
Erläutern Sie seine Bedeutung im Sachkontext.

Betrachten Sie die Kurvenschar f_a mit $f_a(t) = a - a \cdot e^{-0,05t}$, $t \geq 0$ für $a > 0$.

d) Bestimmen Sie die 1. Ableitung von f_a für beliebige $a > 0$.
Erstellen Sie eine Gleichung, in der Sie $f_a'(t)$ für beliebige $a > 0$ mit Hilfe von $f_{20}'(t)$ ausdrücken.
Skizzieren Sie die Graphen von f_a und f_a' für $a = 15$ und $a = 25$ in den Abbildungen 1 und 2, stellvertretend für Werte von $a > 0$, die kleiner bzw. größer als 20 sind.
Beschreiben und erläutern Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Graphen.
Berücksichtigen Sie dabei $f_a(0)$, $f_a'(0)$ und $\lim\limits_{t\to\infty} f_a'(t)$.
Beschreiben Sie dabei auch, welche Auswirkungen die Eigenschaften der Graphen von f_a' auf die Graphen von f_a haben.

e) Berechnen Sie die Größe der Fläche zwischen dem Graphen von f_a' und der t-Achse für $t \geq 0$ für beliebige $a > 0$.
Zeigen Sie, dass dieser Wert $\lim\limits_{t\to\infty} f_a(t)$ entspricht und erläutern Sie die Bedeutung des Wertes im Sachkontext.
Ermitteln Sie die Dosierung des Medikaments in ml/min in Abhängigkeit von $a > 0$.

Material zur Aufgabe Medikament

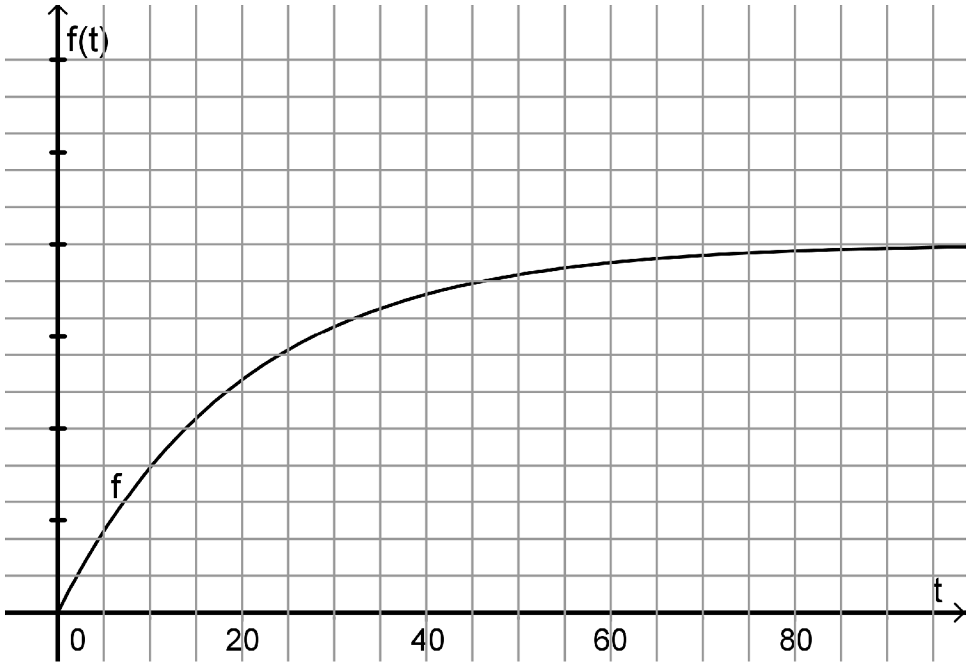


Abbildung 1

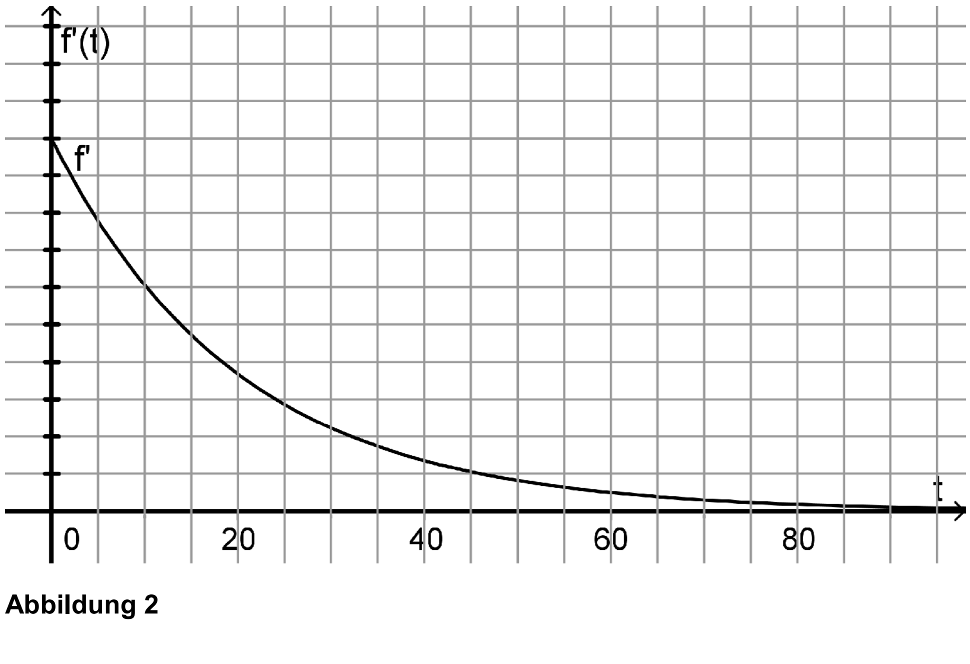


Abbildung 2

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 1**

<table>
<tr><th rowspan="2" colspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1a</td><td>Mögliche Antworten sind etwa folgende, nur eine ist nötig.

Mathematisch argumentiert:
Der Graph in Abb. 1 hat abnehmende positive, anscheinend gegen 0 konvergierende Steigungen, daher ist der Graph von Abb. 2 sein Ableitungsgraph. Der Graph von Abb. 1 kann nicht der Ableitungsgraph für Abb. 2 sein, da seine Funktionswerte positiv sind, der Graph von Abb. 2 jedoch fällt.

Von der Sache her argumentiert: die Medikamentenmenge steigt zunächst stark an und wegen des im Körper stattfindenden prozentualen Abbaus schwächt sich der Zuwachs ab und deswegen besteht nur die Möglichkeit, dass der Graph von f der von Abb. 1 ist und entsprechend der andere Graph der von f'.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>1b</td><td>$f(60)=19=20-20\cdot e^{-k\cdot 60}$ führt zu $k=\frac{\ln(0,05)}{-60}\approx 0,05$
$f'(t)=-20\cdot(-0,05)\cdot e^{-0,05t}=e^{-0,05t}$
Markierungen auf den Achsen: bei der $f(t)$-Achse stehen die großen Teilstriche für Schritte von 10, bei der $f'(t)$-Achse für $0,2$.
$f(90)=20-20\cdot e^{-0,05\cdot 90}\approx 19,78$ in ml,
$f(t)=10=20-20\cdot e^{-0,05t}$ führt zu $t\approx 13,86$ in min.</td><td>5</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>1c</td><td>$\int_0^{30}(e^{-0,05t})dt\approx 15,54$, in der Abb.2 ist mit dem Integralwert das Maß des Flächeninhalts zwischen dem Graphen von f' und der t-Achse in den Grenzen $t=0$ und $t=30$ erfasst, was dem Funktionswert $f(30)$ (vgl. Punkt P in Abb. 1 unten) entspricht. Inhaltlich wird damit die nach 30 Minuten im Körper vorhandene Medikamentenmenge in ml beschrieben.

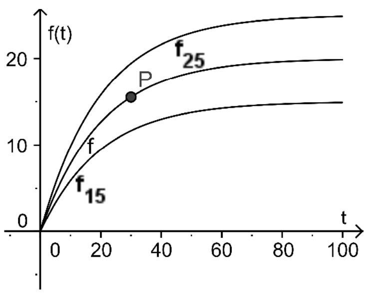



Abb. 1

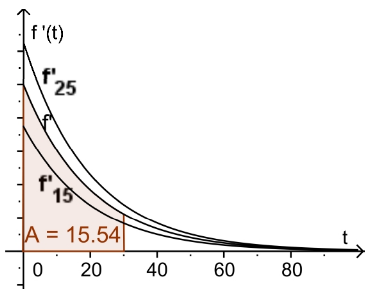



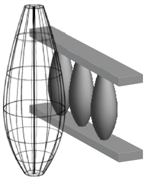
Abb. 2

Die Graphen von f_{15}, f_{25} bzw. f'_{15}, f'_{25} gehören zu Aufgabenteil d), dort werden die Punkte dafür vergeben.</td><td>3</td><td>2</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
1d	$f_a{}'(t) = 0{,}05 \cdot a \cdot e^{-0{,}05t} = 0{,}05 \cdot a \cdot f_{20}{}'(t)$. Skizzen siehe Abbildungen in c). Für $a > 20$ vgl. f_{25} mit $a = 25$ unter c) in Abb. 1 (bzw. für $0 < a < 20$ vgl. f_{15} mit $a = 15$ in Abb. 1) ist der Graph von f_a, startend bei $f_a(0) = 0$, schneller (bzw. langsamer) ansteigend als der von $f = f_{20}$. Entsprechend laufen die Graphen oberhalb (bzw. unterhalb) vom Graphen in Abb. 1 bzw. Abb. 2, wobei der Graph von f_a' bei $f_a'(0) = 0{,}05 \cdot a$ startet, also bei $f_{15}'(0) = 0{,}75$ und $f_{25}'(0) = 1{,}25$. Da $\lim\limits_{t\to\infty} f_a'(t) = \lim\limits_{t\to\infty}(0{,}05 \cdot a \cdot e^{-0{,}05t}) = 0$, streben die Funktionswerte $f_a(t)$ gegen eine Grenze. Diese liegt oberhalb, für $a > 20$, bzw. unterhalb, für $a < 20$, derjenigen vom Graphen von f_{20}.	5	6	
1e	Da $\int_0^x (0{,}05 \cdot a \cdot e^{-0{,}05t})\,dt = a - a \cdot e^{-0{,}05x} = f_a(x)$, ist $\lim\limits_{t\to\infty} \int_0^x (0{,}05 \cdot a \cdot e^{-0{,}05t})\,dt = \lim\limits_{t\to\infty} f_a(t) = \lim\limits_{x\to\infty}(a - a \cdot e^{-0{,}05x}) = a$. Geometrisch ist a das Maß des Flächeninhalts zwischen dem Graphen von f_a' und der t-Achse für $t \geq 0$. Inhaltlich ist a ml die Gesamtmenge des Medikaments, die im Körper höchstens vorhanden sein kann. Zur Berechnung der Dosierung kann argumentiert werden, dass die Menge gesucht wird, die für große t-Werte dem 5%-igen Abbau jeweils im Körper entspricht, d.h. wenn höchstens a ml im Körper sein können, sind das $0{,}05 \cdot a$ ml/min. Man kann auch mit Hilfe von $f_a'(0) = 0{,}05 \cdot a$ die Dosierung in [ml/min] bestimmen.		3	3
	Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	**13**	**17**	**3**

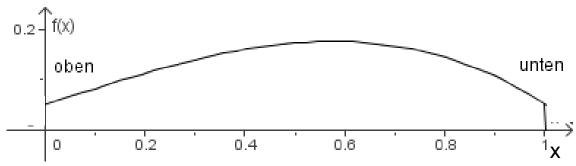
Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis

Balkongeländer



Ein Zimmermannsbetrieb stellt Balkon- und Treppengeländer im Landhausstil her. Die senkrechten Pfosten des Geländers werden in einer Drechselmaschine hergestellt, indem ein Holzklotz unter einem Messer rotiert. Das Messer bewegt sich dabei entsprechend einer eingegebenen mathematischen Funktion. Diese Funktion gibt für jeden Querschnitt des Pfostens seinen Radius in Metern an. Der entstehende horizontale Holzpfosten wird später so aufgestellt, dass sich das linke Ende oben und das rechte unten befindet.

a) Ein $1m$ langer Pfosten soll an beiden Enden einen Radius von jeweils $0,05m$ besitzen. Auf der Höhe von 50 cm soll sein Radius $0,175\,m$ betragen. Die Funktion f, deren Graph das Messer in der Maschine durchläuft, soll eine ganz-rationale Funktion dritten Grades sein. Um eine bestimmte Form des Bauches zu erhalten, wird das Krümmungsverhalten am rechten Ende durch $f''(1) = -2$ festgelegt.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f in Abhängigkeit von x.



Die Maschine ist in der Lage, Pfosten mit den Randfunktionen f_k mit der Gleichung

$$f_k(x) = -\tfrac{1}{3}x^3 + kx + \tfrac{1}{20}$$

herzustellen. Dabei kann k aus dem Intervall $\left[0,33\,;0,50\right]$ gewählt werden. Die Aufgabenteile b) bis e) sollen stets in Abhängigkeit von k gelöst werden.

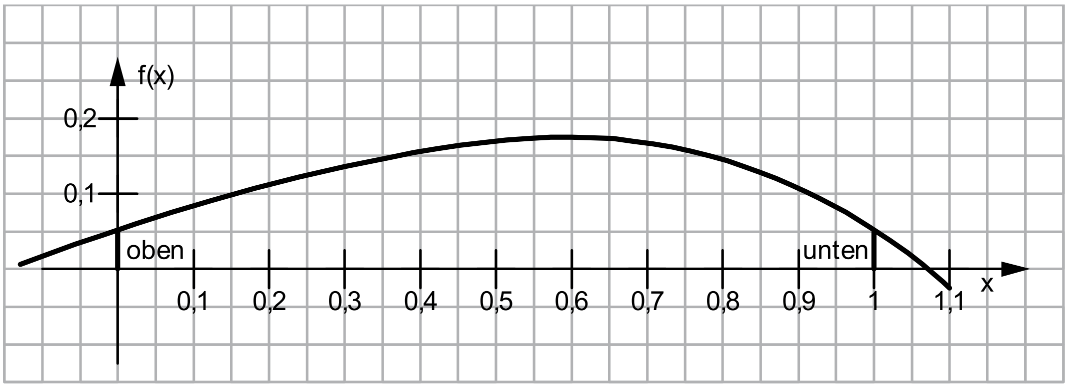
b) Skizzieren Sie die Kurvenschar f_k für $k = 0,37; k = 0,41; k = 0,45;$ und $k = 0,49$ in ihrem wesentlichen Verlauf, in dem Sie die von Ihrem Rechner dargestellten Graphen in das vorgegebene Koordinatensystem übertragen.
Erläutern Sie, welche Bedeutung k für die Form und das Volumen des Pfostens hat.

c) Berechnen Sie den Radius des Pfostens sowohl an seinem Fußpunkt als auch an seinem oberen Ende. Geben Sie jeweils den größten und kleinsten Wert an, der aufgrund des Intervalls für k möglich ist.

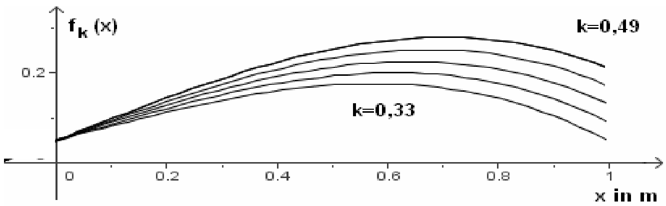
d) An der Stelle $x_{\max} = \sqrt{k}$ beträgt der Radius $f_k(x_{\max}) = \tfrac{2}{3}k\sqrt{k} + \tfrac{1}{20}$. Zeigen Sie, dass an dieser Stelle der Pfosten seinen größten Durchmesser erreicht.

e) Zeigen Sie, dass alle Hochpunkte (vgl. Teil d) der Kurvenschar f_k auf dem Graphen einer Funktion h liegen. Geben Sie die Gleichung dieser Funktion an.

f) Bestimmen Sie das Volumen des Holzpfostens für $k = \tfrac{1}{3}$, damit der Hersteller abschätzen kann, wie viel Abfall produziert wird.
Ermitteln Sie den Abfall, wenn das Rohmaterial ein Balken der Maße $1m \times 0,36m \times 0,36m$ ist.
Vergleichen Sie die beiden Volumina miteinander.


f(x)
0,2
0,1
oben
unten
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
1,1
x

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 2**

	Lösungsskizze	Bewertung		
		I	II	III
2a	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad ; \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad ; \quad f''(x) = 6ax + 2b$ Drei vorgegebene Punkte liefern $f(0) = 0{,}05$ und somit $d = 0{,}05$, $f(1) = 0{,}05 = a + b + c + d$ sowie $f(0{,}5) = 0{,}175 = 0{,}125a + 0{,}25b + 0{,}5c + d$ Das Krümmungsverhalten ergibt $f''(1) = -2 = 6a + 2b$. Zu lösen bleibt das LGS $\begin{bmatrix} 0 & = & a+b+c \\ 0{,}125 & = & 0{,}125a + 0{,}25b + 0{,}5c \\ -2 & = & 6a + 2b \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} c & = & \frac{1}{3} \\ b & = & 0 \\ a & = & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ Funktionsgleichung: $f(x) = -\frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{3} \cdot x + 0{,}05$.	3	7	
2b	 Mit steigendem k wird der Pfosten bauchiger und das Maximum verschiebt sich nach unten. Das Volumen steigt.	5	2	
2c	$f_k(0) = \frac{1}{20}$ und $f_k(1) = k - \frac{17}{60}$, also beträgt der Radius am oberen Ende 5 cm und am unteren zwischen 4,7 cm und 21,7 cm.	4		
2d	Für die angegebene Stelle gilt: $f_k'(\sqrt{k}) = -\sqrt{k}^2 + k = 0$ und $f_k''(\sqrt{k}) = -2\sqrt{k} < 0$, somit liegt hier ein Maximum vor. Der Radius berechnet sich zu $f_k(\sqrt{k}) = -\frac{1}{3}k\sqrt{k} + k \cdot \sqrt{k} + \frac{1}{20} = \frac{2}{3}k\sqrt{k} + \frac{1}{20}$.	1	3	
2e	Für die Hochpunkte $H(\sqrt{k} \mid \frac{2}{3}k\sqrt{k} + \frac{1}{20})$ ergibt sich durch Einsetzen von $x = \sqrt{k}$ in $y = \frac{2}{3}k\sqrt{k} + \frac{1}{20}$ die Funktionsvorschrift $h(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{20}$.		2	1
2f	Volumen des Pfostens: $V_1 = \pi \int_0^1 (-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{20})^2 \, dx \approx 0{,}0606$ Volumen des Balkens: $V_2 = 1 \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}36 = 0{,}1296$ Abfall: $V_3 = V_2 - V_1 = 0{,}0690$ Es ergeben sich als Volumina für den Pfosten $0{,}0606\text{m}^3$, für den Balken $0{,}1296\text{m}^3$ und für den Abfall $0{,}0690\text{m}^3$. Das Volumen des Abfalls ist größer als das Volumen des Pfostens.		3	2
Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**13**	**17**	**3**

Aufgabe 3 - zum Themenbereich Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Vertiefung Lineare Algebra

Fahrradverleih auf der Insel Hiddensee

Auf der Insel Hiddensee stellte der Touristikverband durch eine Befragung fest, dass insbesondere die Tagestouristen beim Erkunden der lang gestreckten Insel gern eine Strecke zu Fuß laufen und eine mit dem Fahrrad fahren würden. Ein Fahrradverleih mit zwei Verleihgeschäften konnte seinen Kunden dies ermöglichen, da sich eines der Geschäfte am Fähranleger Vitte (V) im Nord-Osten und eines am Fähranleger Neuendorf (N) im Süden des befahrbaren Teils der Insel befindet. Zu Beginn waren an jedem der beiden Fähranleger 300 Fahrräder vorhanden. Nach mehreren Wochen wird festgestellt, dass sich inzwischen die Anzahlen der Fahrräder in Vitte auf 240 und in Neuendorf auf 360 eingependelt haben. In diesen Wochen wurden täglich alle Fahrräder verliehen und von den Kunden in V oder N beliebig abgegeben und dort belassen. Der Fahrradverleih vermutet daraufhin, dass täglich 30% der Fahrräder aus Vitte in Neuendorf und 10% der Fahrräder aus Neuendorf in Vitte abgegeben werden.

a) Stellen Sie die Vermutung des Verleihs in einem geeigneten Übergangsdiagramm dar und geben Sie dazu eine Matrix M an, die mit dem Vektor $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \end{pmatrix}$ multipliziert angibt, wie viele Räder nach Ablauf eines Tages dann in V (1. Komponente) und in N (2. Komponente) vorgefunden würden. Begründen Sie, warum die Vermutung des Fahrradverleihs nicht zutreffen kann. Berechnen Sie dazu zwei weitere Räderverteilungen mit Hilfe von M .

Eine Bremer Praktikantin (Abiturientin mit Mathe LK!) behauptet, dass die Übergangsmatrix $U = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ den Prozess angemessen beschreibt. Die 1. Komponente bezieht sich wieder auf V. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgabenteile, um so ihre Argumentation zu unterstützen:

b) Berechnen Sie, ausgehend von $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \end{pmatrix}$, die Räderverteilungen $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ nach dem 1., 2. und 3. Tag und geben Sie ein Verfahren an, wie man $\vec{v}_n$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ berechnet.

c) Zeigen Sie, ohne ein lineares Gleichungssystem zu lösen, dass die oben angegebene Räderverteilung $\vec{v}_s = \begin{pmatrix} 240 \\ 360 \end{pmatrix}$ eine stationäre Verteilung der Übergangsmatrix U ist.

d) Skizzieren Sie für $\vec{v}_s = \begin{pmatrix} 240 \\ 360 \end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Gerade $g: \vec{x} = \vec{v}_s + r \cdot \vec{u}$, $r \in \mathbb{R}$.

(100 Räder entsprechen mind. 2 cm)

Berechnen Sie $r_0 \in \mathbb{R}$, so dass für den Vektor $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \end{pmatrix}$ aus b) gilt: $\vec{v}_0 = \vec{v}_s + r_0 \cdot \vec{u}$.

Zeigen Sie, dass dann für $\vec{v}_1 = U * \vec{v}_0$ und $\vec{v}_2 = U * \vec{v}_1$ gilt:

$\vec{v}_1 = \vec{v}_s + (-0,5) r_0 \cdot \vec{u}$ und $\vec{v}_2 = \vec{v}_s + (-0,5)^2 r_0 \cdot \vec{u}$.

Zeichnen Sie $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ als Ortsvektoren in die Skizze ein.

Erläutern Sie die Bedeutung folgender Gleichungen für die Folge $\vec{v}_n$ der Verteilungen aus b) für $n \to \infty$.

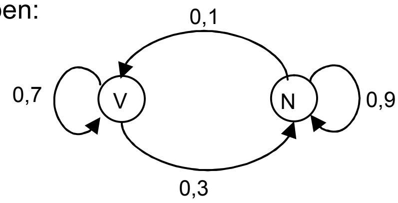
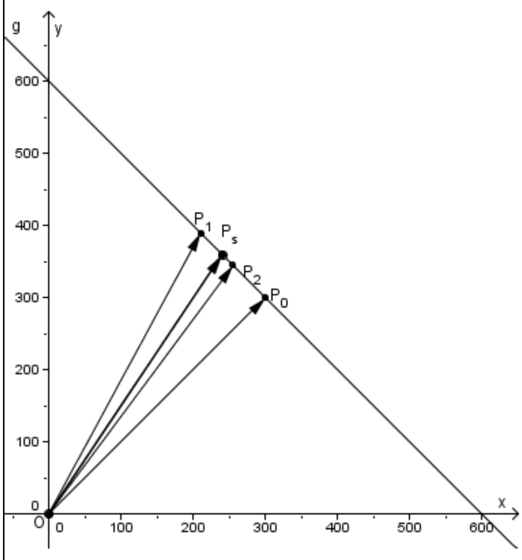
$U^2 * \vec{v}_0 = \vec{v}_s + (-0,5)^2 r_0 \cdot \vec{u}$, $U^3 * \vec{v}_0 = \vec{v}_s + (-0,5)^3 r_0 \cdot \vec{u}$, ..., $U^n * \vec{v}_0 = \vec{v}_s + (-0,5)^n r_0 \cdot \vec{u}$.

In Kloster (ein Ort weiter im Norden) will der Händler eine weitere Fahrradstation eröffnen.

e) Aufgrund einer Umfrage geht er davon aus, dass die folgenden Übergänge über einen langen Zeitraum unverändert bleiben und außerdem die Nachfrage so groß ist, dass er bei jeder Aufteilung alle Fahrräder verleihen wird.
Ermitteln Sie nicht nur experimentell eine möglichst günstige Verteilung der 600 Fahrräder auf die drei Stationen und begründen Sie Ihre Entscheidung.

nach \ von	Vitte (V)	Neuendorf (N)	Kloster (K)
Vitte (V)	$0,3$	$0,4$	$0,7$
Neuendorf (N)	$0,5$	$0,2$	$0,3$
Kloster (K)	$0,2$	$0,4$	$0,0$

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 3**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
3a	Das Übergangsdiagramm gemäß Vorgaben:  Ist $M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}9 \end{pmatrix}$, dann gilt $\vec{v}_1 = M * \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 210+30 \\ 90+270 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 \\ 360 \end{pmatrix}$. Die Vermutung kann nicht korrekt sein, da die Verteilung nach 2 Wochen nicht mit der gegebenen übereinstimmt: $\vec{v}_2 = M^2 * \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 204 \\ 396 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 240 \\ 360 \end{pmatrix}$. Alternativ: $M * \begin{pmatrix} 240 \\ 360 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 204 \\ 396 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 240 \\ 360 \end{pmatrix}$, die vorgefundene Verteilung ist nicht stationär.	3	3	
3b	Berechnung der Fahrradverteilungen: $\vec{v}_1 = U * \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 210 \\ 390 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_2 = U * \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 255 \\ 345 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_3 = U * \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 232{,}5 \\ 367{,}5 \end{pmatrix}$. Da es natürlich weder in V noch in N halbe Räder geben kann, gilt entweder $\vec{v}_3 \approx \begin{pmatrix} 233 \\ 367 \end{pmatrix}$ oder $\vec{v}_3 \approx \begin{pmatrix} 232 \\ 368 \end{pmatrix}$. Allgemein lässt sich $\vec{v}_n$ entweder rekursiv als $v_n = U * \vec{v}_{n-1},\ n \geq 1$ oder über die Multiplikation von Matrixpotenzen mit $\vec{v}_0$ durch $\vec{v}_n = U^n * \vec{v}_0,\ n \geq 1$ angeben.	4		
3c	Es reicht aus zu zeigen, dass $\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 240 \\ 360 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 \\ 360 \end{pmatrix}$ gilt und $240 + 360 = 600$ ist.	3		
3d	 $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 \\ 360 \end{pmatrix} + r_0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 300 = 240 - r_0 \\ 300 = 360 + r_0 \end{bmatrix}$ $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 60 = -r_0 \\ -60 = r_0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow r_0 = -60$ $\vec{v}_0 = \vec{v}_s + (-60) \cdot \vec{u}$ Wegen $U \cdot \vec{v}_s = \vec{v}_s$ und $U * \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}1+0{,}6 \\ -0{,}9+0{,}4 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} = -0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$			

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>gilt: $\vec{v}_1 = U * \vec{v}_0 = \vec{v}_s + (-0{,}5) r_0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und
$\vec{v}_2 = U * \vec{v}_1 = \vec{v}_s + (-0{,}5) r_0 U * \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{v}_s + (-0{,}5)^2 r_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Die auf der Geraden g liegenden $\vec{v}_n$ streben für $n \to \infty$ gegen die stationäre Verteilung $\vec{v}_s$, da mit $(-0{,}5)^n$ auch $(-0{,}5)^n \cdot (-60)$ gegen 0 strebt. Damit ist gezeigt, dass der Prozess mit der Anfangsverteilung $\vec{v}_0$ gegen die (stationäre) Räderverteilung $\vec{v}_s$ strebt.</td><td>2</td><td>8</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3e</td><td>Die Übergangsmatrix $N = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}0 \end{pmatrix}$ besitzt die stationäre Verteilung
$\vec{v}_s = \begin{pmatrix} 255 \\ 210 \\ 135 \end{pmatrix}$. Sie kann über das zu $(N - E_3) * \vec{v}_s = \vec{0}$ und $x_s + y_s + z_s = 600$ gehörige LGS bestimmt werden. Sie scheint auch Grenzverteilung zu sein, da z. B. $N^{15} * \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 255 \\ 210 \\ 135 \end{pmatrix}$ und $N^{20} * \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 255 \\ 210 \\ 135 \end{pmatrix}$ (ganzzahlig gerundet). Wird $\vec{v}_s$ zunächst experimentell als Grenzverteilung ermittelt, so muss noch
$N * \begin{pmatrix} 255 \\ 210 \\ 135 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 255 \\ 210 \\ 135 \end{pmatrix}$ gezeigt oder auf einen entsprechenden Satz verwiesen werden.
Wählt er als Aufteilung eine stationäre Verteilung der Übergangsmatrix, so hat er morgens und abends gleich viele Räder an jeder Station, wählt er eine andere, so pendelt sich diese Verteilung nach einiger Zeit ein.</td><td>1</td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>13</td><td>17</td><td>3</td></tr>
</table>

Aufgabe 4 - zum Themenbereich Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Vertiefung Analytische Geometrie

Weltraumsonde

Im Sonnensystem ist ein rechtwinkliges Koordinatensystem platziert. Dabei entspricht der Koordinatenursprung der Sonne und die xy-Ebene stellt die sogenannte Ekliptik dar. Der Zwergplanet Pluto befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Punkt $P(24|18|6)$ und bewegt sich um die Sonne in der Bahnebene E_P. In dieser Ebene liegt die Gerade g_P, die Sonne und Pluto verbindet.

Eine Weltraumsonde bewegt sich näherungsweise auf der Geraden $g_W : \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$.

Der Parameter t in der obigen Geradengleichung von g_W steht für die Zeit in Jahren.
Alle Koordinaten sind in Astronomischen Einheiten angegeben (1 AE = mittlerer Abstand zwischen Sonne und Erde).

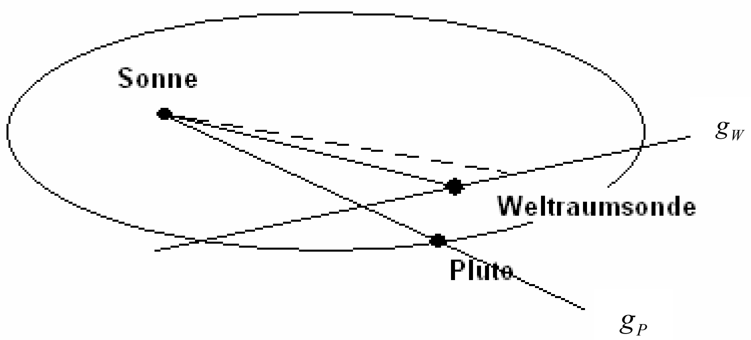
a) Geben Sie eine Gleichung der Geraden g_P in Parameterform an.
Zeigen Sie, dass die Geraden g_P und g_W windschief sind.

b) Um Beeinflussungen durch andere Himmelskörper zu verringern, wurde der Weg der Weltraumsonde so programmiert, dass er parallel zur Bahnebene E_P des Zwergplaneten verläuft.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Bahnebene in Koordinatenform.
Bestimmen Sie den Abstand, den die Weltraumsonde von der Bahnebene E_P des Pluto hat.

c) Um zu ermitteln, wie nahe der Zwergplanet Pluto an die geplante Bahn der Weltraumsonde herankommen kann, werden verschiedene Berechnungen durchgeführt. Hier soll eine solche Berechnung für den Zeitpunkt $t = 0$ näher betrachtet werden:
Ermitteln Sie eine Gleichung für die Ebene F, die senkrecht zur Bahn der Weltraumsonde steht und die Position $P(24|18|6)$ des Pluto enthält. Erläutern Sie ohne Rechnung, wie mit Hilfe der Ebene F der minimale Abstand zwischen P und der Geraden g_W bestimmt werden kann.

d) Bestimmen Sie den spitzen Schnittwinkel der Ebene E_P mit der xy-Ebene, um die Bahnneigung des Zwergplaneten zur Ekliptik zu erhalten.
(Falls Teil b) nicht gelöst wurde, benutzen Sie zur Bestimmung des Winkels $E_P : -x + 5y - 11z = 0$.)

e) Berechnen Sie die Standorte der Weltraumsonde für die Zeiten $t = 0$ und $t = 0{,}25$.
Berechnen Sie anschließend die Länge der zurückgelegten Strecke.
Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die die Verbindungslinie zwischen Sonne und Weltraumsonde in diesem Vierteljahr überstreicht.[1]



[1] Berücksichtigt man, dass die hier als geradlinig angenommene Bahn nur ein kleines Teilstück einer Ellipsenbahn um die Sonne darstellt, liefert das Maß dieser Fläche Informationen über den Drehimpuls der Weltraumsonde.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 4**

Lösungsskizze		Bewertung I	II	III
4a	Eine Geradengleichung für g_P lautet $g_P : \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix}$. Da die Richtungsvektoren linear unabhängig sind, sind die beiden Geraden nicht parallel. Der Ansatz $s \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ führt mit den ersten beiden Zeilen zu $s = \frac{10}{11}$ und $t = -\frac{20}{11}$, was zum Widerspruch mit der dritten Zeile führt. Es gibt also keinen Schnittpunkt und die Geraden sind windschief.	3	3	
4b	Ein Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E_P steht senkrecht auf den beiden Richtungsvektoren der Geraden. Dies liefert: $24x_n + 18y_n + 6z_n = 0$ und $-x_n + 2y_n + z_n = 0$. Ein möglicher Normalenvektor ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -11 \end{pmatrix}$ (Alternative: Normalenvektor als Vektorprodukt der Richtungsvektoren). Einsetzen des Nullvektors als Stützvektor von g_P in den Ansatz $-x + 5y - 11z = d$ liefert die Ebene $E_P : -x + 5y - 11z = 0$ bzw. in Hessescher Normalform: $E_P : \frac{1}{\sqrt{147}} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -11 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$. Der Abstand berechnet sich mit E_P und dem Stützvektor von g_W: $Abst(E_P; \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}) = \left\| \frac{1}{\sqrt{147}} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -11 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \frac{25}{\sqrt{147}} \approx 2{,}06$ Der Abstand beträgt ca. $2{,}06$ AE.	4	3	2
4c	Die Ebene F senkrecht zur Bahn der Weltraumsonde, die den Planetenstandort enthält, besitzt die Gleichung: $F : \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} \right) = 0$ bzw. $F : -x + 2y + z = 18$. Es muss der Schnittpunkt S zwischen F und g_W berechnet werden. Der minimale Abstand ergibt sich als Länge der Strecke $\overline{SP}$. Berechnung z.B. auch über Normalprojektion und Pythagoras möglich.	2	3	1

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>4d</td><td>$\cos\alpha = \left| \frac{1}{\sqrt{147}} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -11 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{-11}{\sqrt{147}} \right| \approx 0{,}907$ ergibt den Schnittwinkel: $\alpha = 24{,}9°$.</td><td>1</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>4e</td><td>Die Weltraumsonde legt den Weg von $S_0(20|20|5)$ bis $S_1(19{,}75|20{,}5|5{,}25)$ zurück.
Wegen $\left|\overrightarrow{S_0S_1}\right| \approx \sqrt{0{,}375} \approx 0{,}61$ beträgt die Länge dieser Strecke $0{,}61\,AE$. Die Maßzahl der überstrichenen Fläche errechnet sich z.B. mit dem Vektorprodukt
$A = \frac{1}{2}\left| \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 19{,}75 \\ 20{,}5 \\ 5{,}25 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}\left| \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -6{,}25 \\ 15 \end{pmatrix} \right| \approx 8{,}22$. Die Fläche beträgt $8{,}22\,AE^2$</td><td>3</td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche</td><td>13</td><td>17</td><td>3</td></tr>
</table>

Aufgabe 5 - zum Themenbereich Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik

Alkohol und Verkehrsunfälle

Aus einer Unfallstatistik 2006 der Polizei in Baden-Württemberg für Unfälle entnimmt man folgende Schätzwerte für Wahrscheinlichkeiten von Unfällen außerhalb von Ortschaften:

$P($ ein Unfall ist ein Unfall unter Alkoholeinfluss $) = 0,075$

$P($ ein Unfall unter Alkoholeinfluss endet für eine daran beteiligte Person tödlich $) = 0,052$

$P($ ein Unfall ohne Alkoholeinfluss endet für eine daran beteiligte Person tödlich $) = 0,015$

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Unfall außerhalb von Ortschaften für eine daran beteiligte Person tödlich endet.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Unfalltod außerhalb von Ortschaften durch Alkohol verschuldet ist. (Runden Sie bei den Zwischenergebnissen auf 4 Stellen genau.)

Aus Verkehrskontrollen in Deutschland nimmt man an, dass ca. 5% aller Fahrten unter Alkoholeinfluss stattfinden.

b) Erläutern Sie, unter welchen Annahmen man die Kontrolle von Autofahrern und -fahrerinnen auf Alkoholgenuss als einen mehrstufigen Bernoulli-Versuch auffassen kann und nennen Sie ein Beispiel dafür, wann diese Bedingungen verletzt sind.

Gehen Sie bei den folgenden Aufgabenteilen von einem mehrstufigen Bernoulli-Versuch aus.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass bei 10 durchgeführten Kontrollen
- genau 1 „Alkoholsünder" ermittelt wird.
- mehr als 2 „Alkoholsünder" ermittelt werden.

Alkoholgenuss verlängert die Reaktionszeiten. Doch viele Autofahrerinnen und -fahrer sagen: „Ein Bier kann ich trinken." Um zu untersuchen, ob bereits ein Glas Bier ($0,5l$) die Reaktionszeit verlängert, sollen bei 180 Personen an einem Simulator die Reaktionszeiten vor und eine gewisse Zeit nach dem Genuss von $0,5l$ Bier gemessen werden. Es wird notiert, ob die zweite Reaktionszeit kürzer („–") oder länger („+") als die erste war. Gleiche Reaktionszeiten kommen wegen der genauen Messung praktisch nicht vor.

d) Es soll auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden. Ermitteln Sie eine Entscheidungsregel, in der festgelegt wird, bei welchen Testergebnissen die folgende Hypothese H_0 als widerlegt angesehen wird:

H_0: „Der Genuss von $0,5l$ Bier verlängert die Reaktionszeit nicht. Die längere (+) oder kürzere (-) Reaktionszeit kommt zufällig zustande, d.h. $p_0 = 0,5$."

e) Gehen Sie nun von der von Aufgabenteil d) verschiedenen Entscheidungsregel aus:

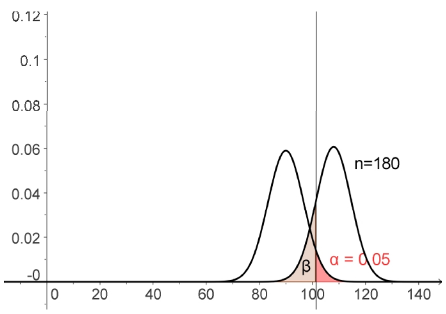
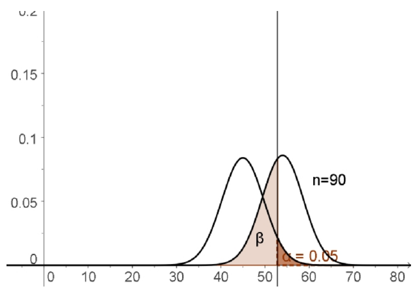
„Falls im Test mehr als 105 der Testpersonen eine längere Reaktionszeit hatten, nimmt man an, dass der Genuss von $0,5l$ Bier zu einer Verlängerung der Reaktionszeit führt."

Erläutern Sie, was der Fehler 2. Art (β-Fehler) in diesem Beispiel konkret bedeutet und geben Sie an, bei welchen Versuchsergebnissen er eintreten kann.
Bestimmen Sie seine Wahrscheinlichkeit bei einem angenommenen Wert von $p_1 = 0,6$. Dabei gibt p_1 die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass eine Person verlängerte Reaktionszeit zeigt.

f) Aus Kostengründen soll nur die Hälfte der 180 Personen getestet werden, die Versuchsanordnung und $\alpha = 5\%$ aber beibehalten werden. Leiten Sie aus den Eigenschaften der Binomialverteilung her, welche Auswirkungen diese Stichprobenverkleinerung auf die Wahrscheinlichkeiten für die beiden Fehlermöglichkeiten hat, die Hypothese H_0 irrtümlich abzulehnen bzw. irrtümlich beizubehalten. Veranschaulichen Sie Ihre Argumentation mit Skizzen geeigneter Verteilungen.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen **Aufgabe 5**

<table>
<tr><th rowspan="2" colspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>5a</td><td>Lösungen mit Vierfeldertafel oder Baumdiagramm
$P(Unfalltod) = 0,075 \cdot 0,052 + 0,925 \cdot 0,015 \approx 0,0178$
$P(Unfalltod\ unter\ Alkohol - Genuss) = \frac{0,075 \cdot 0,052}{0,075 \cdot 0,052 + 0,925 \cdot 0,015} = \frac{52}{237} \approx 22\%$</td><td>4</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>5b</td><td>1. Annahme: Die Kontrollen werden als Zufallsversuch mit zwei Ausgängen aufgefasst: Ein Fahrer/ eine Fahrerin hat getrunken oder nicht.
2. Annahme: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrer kontrolliert wird, der unter Alkoholeinfluss steht, ist bei jeder Kontrolle gleich (hier: 5%).
Diese Annahme ist nicht mehr gerechtfertigt, wenn zum Beispiel nur bestimmte Personen kontrolliert werden (junge Männer gelten als besonders alkoholgefährdet), zu Freimarktzeiten oder Samstag Nacht in der Nähe von Diskotheken, wenn die Kontrolle bekannt und umfahren wird o.ä. .</td><td>1</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>5c</td><td>X: Anzahl der entdeckten Alkoholsünder unter den Kontrollierten
$p = 0,05;\quad n = 10\ .\quad P(X = 1) \approx 0,315\ ;$
$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) \approx 1 - 0,9885 = 0,0115$</td><td>4</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>5d</td><td>X: Anzahl der Personen, bei denen eine verlängerte Reaktionszeit notiert wird
$n = 180;\quad p_0 = 0,5$
Die Lösung ist sowohl mit Hilfe der Normalverteilung als auch mit Hilfe der Binomialverteilung möglich.
X ist binomialverteilt mit n und p_0 (zwei Versuchsausgänge, nämlich verlängerte / verkürzte Reaktionszeit, die Reaktionszeit einer Person ist unabhängig von den Ergebnissen der anderen)..
Es liegt ein rechtsseitiger Test vor, da verlängerte Reaktionszeiten unter Alkoholeinfluss vermutet werden.
Gesucht ist also das kleinste k mit $P(X \ge k) \le 5\%$.
Da $n \cdot p \cdot q > 9$, kann näherungsweise mit der $1,65\sigma$ -Umgebung gerechnet werden. Damit ist $k \approx 1,65\sigma + \mu \approx 101$.
Überprüfung mit Binomialverteilung: $P(X \le 100) = 0,941$; $P(X \le 101) = 0,957$; $P(X \le 102) = 0,969$. Damit ist $k = 102$ das gesuchte k .
Entscheidungsregel: Wenn 102 oder mehr Personen nach dem Alkoholgenuss eine längere Reaktionszeit haben, wird H_0 verworfen. Es wird angenommen, dass der Genuss von $0,5l$ Bier die Reaktionszeit verlängert.</td><td>2</td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
5e	Fehler 2.Art: Es wird nicht angenommen, dass der Genuss von $0,5l$ Bier die Reaktionszeit verlängert, obwohl es so ist. Der Fehler kann bei Versuchsergebnissen aus $\overline{V}=\{0,...,105\}$ eintreten. X: Anzahl der Personen, bei denen eine verlängerte Reaktionszeit notiert wird $n=180,\ \ p_1=0,6$ X ist binomialverteilt mit n und p_1 $P(\beta-Fehler)=P(X\leq 105)=0,350$ Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2.Art beträgt bei den gegebenen Voraussetzungen ca. 35%.	2	4	
5f	In der Argumentation sollte erfasst werden, dass bei binomial verteilten Zufallsgrößen sich die Versuchsausfälle wachsendem n relativ zu n gesehen zunehmend um den Erwartungswert konzentrieren (die $\sigma-$ Umgebung wächst nur um den Faktor $\sqrt{a}$, wenn n um den Faktor a wächst) Damit werden bei kleinerem n die Bereiche, in denen sich die Histogramme der Verteilungen zu p_0 und z.B. p_1 überlappen, größer. In der Skizze sollte der Zusammenhang von α und β und die zunehmende Überlappung der Histogramme der Verteilungen zu p_0 und p_1 bei kleiner werdendem n erfasst werden (genaue Zeichnungen wie in den folgenden Grafiken sind nicht nötig).  $n=180;\ \ p_0=0,5;\ \ p_1=0,6$  $n=90;\ \ p_0=0,5;\ \ p_1=0,6$ Für den Fehler 1. Art (H_0 irrtümlich abgelehnt) ändert sich kaum etwas, da er durch das Signifikanzniveau $\alpha=5\%$ begrenzt und damit nahezu gleich bleiben wird. Der Fehler 2. Art dagegen wird bei gleich bleibendem Signifikanzniveau und verkleinertem n größer.		2	3
Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**13**	**17**	**3**