Inhaltsverzeichnis

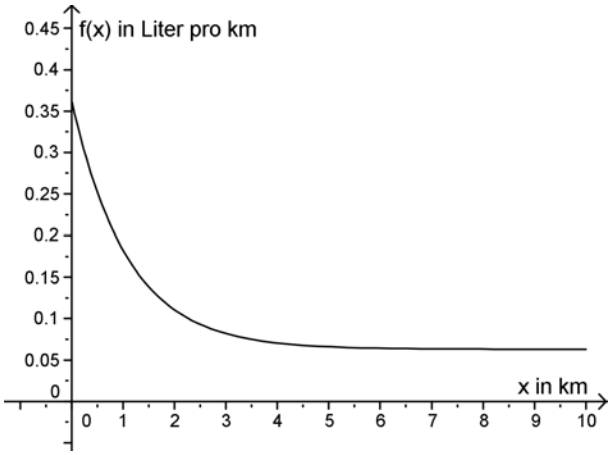
*) Für eine übersichtliche Zuordnung von Download-Optionen aus den entsprechenden Verzeichnissen von www.portal.schule.bremen.de bzw. www.bildungsplattform.bremerhaven.de sind die Dateibezeichnungen nach folgendem Beispiel systematisiert:

08RAna_Benzin
- Prüfungsjahr 20***08***
- zugelassenes Hilfsmittel GT***R***/CAS/TC
- Themenbereich ***Ana****lysis* (Leistungskurs)
- Kurzform des Aufgabentitels ***Benzin****verbrauch*

Hilfsmittel: wissenschaftlicher Taschenrechner, Formelsammlung

Aufgabe: Untersuchungen zum Benzinverbrauch

Die Abbildung rechts ist einer PKW-Broschüre entnommen. Sie stellt den Benzinverbrauch des PKWs in Liter pro km für die ersten 10 km nach einem Kaltstart dar. Dabei werden eine gemäßigte Fahrweise und eine Außentemperatur von ca. 15°C vorausgesetzt.



Die zugehörige Funktion f hat die allgemeine Funktionsgleichung

$$f(x) = a \cdot e^{-kx} + c,\ x > 0$$

(x in km, $f(x)$ in Liter pro km), dabei wurden $a = 0{,}3$ und $k = 0{,}92$ gewählt.

a) Welchen Wert hat c, wenn in der Broschüre als Verbrauch bei langen Fahrstrecken 6,3 Liter pro 100 km angegeben wird? **Begründen** Sie!

b) Zur Motorschonung sollen kurze Fahrstrecken vermieden werden. Der PKW soll noch mindestens 5 km mit warm gelaufenem Motor fahren. Der Motor ist ab einem Verbrauch von 0,064 Liter pro km warm gelaufen. **Berechnen** Sie, wie viele Kilometer eine Fahrstrecke mindestens betragen sollte.

c) **Bestimmen** Sie für $f(x) = 0{,}3 \cdot e^{-0{,}92x} + 0{,}063$ den Funktionsterm $V(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ und **zeichnen** Sie den zugehörigen Graphen.

Erläutern Sie seinen Verlauf in Abhängigkeit von dem Graphen von f (siehe oben).

(Kontrolle: $V(x) = -0{,}326e^{-0{,}92x} + 0{,}063x + 0{,}362$)

d) **Berechnen** Sie, wie viele Liter Benzin der PKW insgesamt für eine 2 km lange Strecke verbraucht

- nach einem Kaltstart,
- nachdem er bereits 8 km gefahren ist.

Interpretieren Sie die berechneten Werte geometrisch und **veranschaulichen** Sie die Werte in der obigen Abbildung.

Berechnen Sie, wie viele Liter Benzin der PKW auf den ersten 100 km verbraucht, wenn diese ohne Unterbrechung gefahren werden.

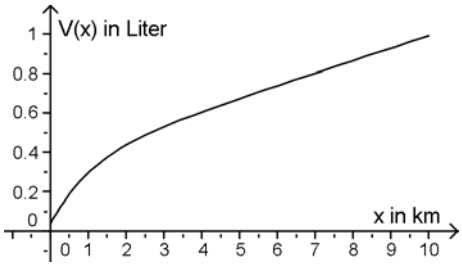
Berechnen Sie, wie viele Liter Benzin der PKW für 100 km verbraucht, wenn jemand immer nur 2 km von seiner Wohnung zur Arbeit und zurück fährt.

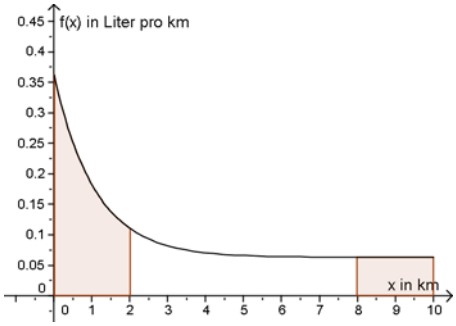
Vergleichen Sie den jeweiligen Benzinverbrauch.

e) Der Bord-Computer des PKWs gibt während der Fahrt den durchschnittlichen Verbrauch seit Fahrtantritt an. **Geben** Sie den Funktionsterm $d(x)$ der Funktion d **an**, die diesen durchschnittlichen Verbrauch bei unveränderter gemäßigter Fahrweise berechnet.

Eine Überprüfung der Verbrauchswerte hat ergeben, dass zu Beginn und auf lange Sicht der Literverbrauch pro km korrekt war, er aber erst nach 10 km auf 0,064 Liter/km abgesunken ist. **Bestimmen** Sie die Werte, die sich jetzt für die Parameter a, c und k ergeben.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen

	Lösungsskizze	Bewertung/ Zuordnung		
		I	II	III
a)	Verbraucht der PKW auf langen Strecken 6,3 Liter pro 100 km, so sind das 0,063 Liter pro km, der Graph von f verläuft asymptotisch gegen c, also gilt: $c = 0{,}063$ in l/km.	2		
b)	Der Motor ist warm gelaufen, wenn gilt: $f(x) = 0{,}064 \Leftrightarrow 0{,}3e^{-0{,}92x} = 0{,}001 \Leftrightarrow e^{-0{,}92x} \approx 0{,}0033 \Leftrightarrow$ $x \approx \frac{\ln(0{,}0033)}{-0{,}92} \approx 6{,}2\,[km]$, zusammen mit der 5 km langen Fahrt bei warm gelaufenem Motor ergibt sich eine Gesamtstrecke von gut 11 km.	3		
c)	$V(x) = -\frac{0{,}3}{0{,}92}e^{-0{,}92x} + 0{,}063x + c \approx -0{,}326e^{-0{,}92x} + 0{,}063x + c$ Da $\lim\limits_{x\to 0} V(x) = 0$ gelten muss, muss der Wert $c = \frac{0{,}3}{0{,}92} \approx 0{,}362$ addiert werden: $V(x) = -0{,}326e^{-0{,}92x} + 0{,}063x + 0{,}362$  Zur Zeichnung gehört eine Wertetabelle. Eine mögliche Erläuterung: Da f die Ableitungsfunktion von V ist und die Werte von f anfänglich kleiner werden und dann praktisch konstant bleiben, muss die Steigung von V (von 0,363 auf 0,063) abnehmen und ab ca. $x = 6$ (warm gelaufener Motor) konstant werden, der Verbrauch ist dann linear. (Für große x erhält man die Gerade $g(x) = 0{,}063x + 0{,}326$ als Asymptote.) Oder: Da die Fläche unter dem Graphen von f monoton wächst, muss V eine monoton wachsende Funktion sein, da f für große x (fast) parallel zur x-Achse verläuft, muss V für große x (fast) linear verlaufen.	3	7	

d)	$\int_0^2 f(x)dx = F(2) - F(0) = 0,074 + 0,326 \approx 0,40$ (die Zwischenwerte beziehen sich auf die Stammfunktion F mit $c = 0$), die Einheit vom Integral ist Liter, der Wert entspricht also dem Verbrauch auf den ersten 2 km nach dem Start. Geometrisch entspricht der Wert der Flächengröße unter dem Graphen (siehe Schraffur in der Abbildung).  Nach 8 km ist der Motor warm gelaufen, anschließend braucht man ca. 2·0,063≈0,13 oder $\int_8^{10} f(x)dx \approx 0,630 - 0,504 \approx 0,13$ Liter. Geometrisch ist das die entsprechende Fläche unter dem Graphen, durch Schraffur gekennzeichnet. $\int_0^{100} f(x)dx \approx 6,30 + 0,326 \approx 6,63$, Verbrauch in Litern für die ersten 100 km. Bei 0,40 Liter für die ersten 2 km verbraucht man für 100 km verteilt auf 50 dieser Kurzstreckenfahrten ca. 20 Liter, das ist gut das Dreifache des Verbrauchs bei einer Langstreckenfahrt.	4	4	
e)	Da $V(x)$ den Verbrauch (seit Fahrtantritt) nach x km berechnet, ergibt sich für den durchschnittlichen Verbrauch nach x km $d(x) = \frac{V(x)}{x} = -0,32\frac{e^{-0,92x}}{x} + 0,063 + \frac{0,362}{x}, \quad x > 0$.		2	2
f)	Da Anfangs- und Langzeitverbrauch unverändert bleiben, braucht nur der Parameter k im Exponenten angepasst zu werden: $0,3e^{(-k)\cdot 10} + 0,063 = 0,064 \Leftrightarrow 0,3e^{-10k} = 0,001 \Leftrightarrow e^{-10k} \approx 0,0033 \Leftrightarrow$ $k \approx -\frac{\ln(0,0033)}{10} \approx 0,57\left[\frac{1}{km}\right]$. Je größer k, desto schneller erreicht der PKW seinen optimalen Verbrauch.		4	2
	Insgesamt 33 Bewertungseinheiten, verteilt auf die Anforderungsbereiche	**12**	**17**	**4**
	Prozentuale Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	36%	52%	12%

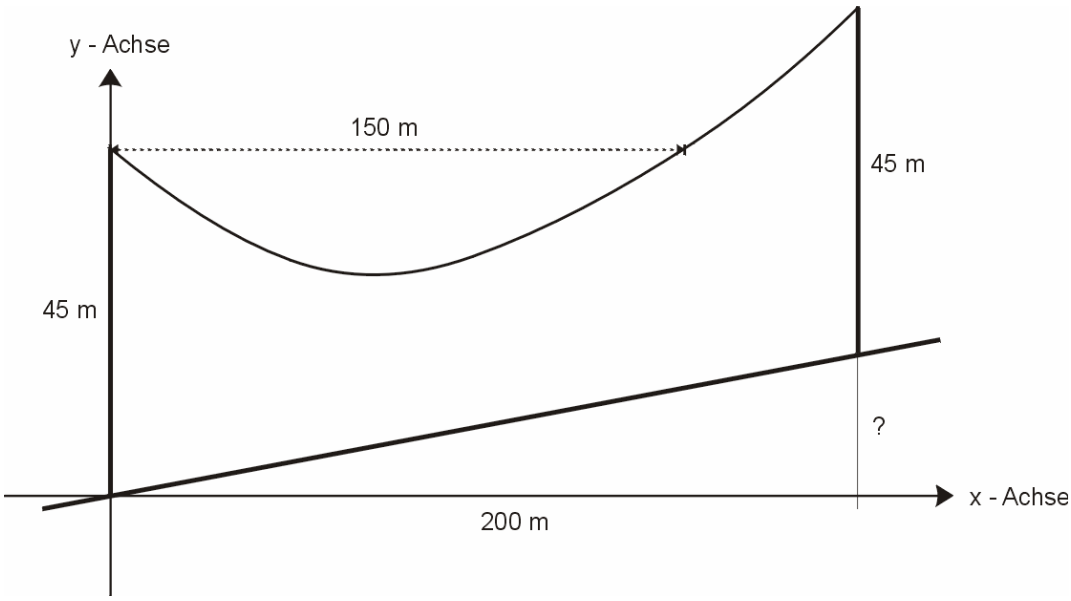
Allgemeine Bemerkungen zur Bewertung:

Die in c) abverlangte Erläuterung zum Funktionsverlauf soll den Schüler/innen auch dazu dienen, evtl. Fehler bei $V(x)$ aufzuspüren. Bemerkungen, die auf eine Unstimmigkeit zwischen der Skizze von V und dem sich aus der Abbildung von f ergebenden qualitativen Verlauf von V hinweisen, sollen positiv bewertet werden. Der Graph von V soll als vollständig richtig bewertet werden, wenn er den ermittelten Funktionsterm $V(x)$ korrekt darstellt, aber auch dann, wenn er die verlangte Stammfunktion von f qualitativ richtig wiedergibt, sofern deutlich wird, aus welcher Vorgabe der Graph gewonnen wurde.

Hilfsmittel: wissenschaftlicher Taschenrechner, Formelsammlung

Aufgabe: **Leitung zwischen zwei Strommasten**

Skizze:



An einem Hang mit der Steigung $0{,}15$ sollen zwei $45\,m$ hohe Strommasten aufgestellt werden. Zwischen den Strommasten soll eine Leitung gespannt werden, die nach $150\,m$ Entfernung vom linken Mast wieder die Höhe der linken Aufhängung erreicht. Aus einer Karte liest man einen horizontalen Abstand der Fußpunkte der Strommasten von $200\,m$ ab.

a) Der Kabelverlauf soll näherungsweise durch eine quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ beschrieben werden. **Bestimmen** Sie den Funktionsterm.
(Lösung: $f(x) = 0{,}003x^2 - 0{,}45x + 45$)

b) **Berechnen** Sie die Stelle, an der das Kabel am stärksten durchhängt. **Geben** Sie an, wie tief das Kabel dort gegenüber dem Aufhängepunkt am linken Mast hängt. **Bestimmen** Sie den Winkel, den das Kabel am linken Mast mit der Verbindungslinie der beiden Mastspitzen bildet.

c) **Bestimmen** Sie die Stelle, an der die senkrechte Entfernung zwischen Hang und Leitung minimal ist. **Bestimmen** Sie die Höhe, bis zu der die Bäume dort wachsen dürften, wenn die senkrechte Entfernung zwischen Leitung und Baumkrone mindestens $7\,m$ betragen muss.

d) In der Realität wird der Verlauf des Kabels durch eine so genannte Kettenlinie mit der Funktionsgleichung $k(x) = 6{,}2 \cdot e^{0{,}01223x} + 38{,}8 \cdot e^{-0{,}01223x}$ beschrieben. **Zeigen** Sie, dass diese Funktion die zu Beginn der Aufgabe beschriebenen Bedingungen näherungsweise erfüllt.

e) **Zeigen** Sie, dass die Kettenlinie durch den Punkt $T(74{,}974 \mid 31{,}0199)$ geht und dort eine waagerechte Tangente hat. **Vergleichen** Sie die Koordinaten von T mit dem Ergebnis von Teilaufgabe b).

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen

	Lösungsskizze	Bewertung/ Zuordnung		
		I	II	III
a)	Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$; $f(0) = 45;\ f(150) = 45;\ f(200) = 75 \Rightarrow c = 45;\ b = -\frac{9}{20};\ a = \frac{3}{1000}$	3	2	
b)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 75$ $a > 0 \Rightarrow$ Die Parabel ist linksgekrümmt. $\Rightarrow$ $x = 75$ ist Minimalstelle. $f(75) = 28{,}125$; gegenüber dem linken Aufhängepunkt hängt das Kabel um $45\,m - 28{,}13\,m = 16{,}87\,m$ durch. $f'(0) = -0{,}45$; gegenüber der Verbindungslinie der Mastspitzen (Steigung $0{,}15$) bildet das Kabel einen Winkel von $\lvert\arctan(-0{,}45)\rvert + \lvert\arctan 0{,}15\rvert = 24{,}2° + 8{,}5° = 32{,}7°$.	2	5	2
c)	Hanggerade: $g(x) = 0{,}15x$; Differenzfunktion $h(x) = f(x) - g(x) = 0{,}003x^2 - 0{,}6x + 45$; $h'(x) = 0 \Rightarrow x = 100$; $h(100) = 15$. D.h., minimale Entfernung zwischen Leitung und Hang bei $100\,m$; der Abstand beträgt $15\,m$. Die Bäume dürfen höchstens $8\,m$ hoch werden.	2	5	
d)	Es gilt $k(0) = 45;\ k(150) = 45{,}02;\ k(200) = 74{,}92$. Die Bedingungen in der Aufgabenstellung sind näherungsweise erfüllt.	3		
e)	Es gilt $k(74{,}974) = 31{,}0199$ und $k'(74{,}974) = -0{,}0000013 \approx 0$. Der Graph von k geht durch T und hat dort eine waagerechte Tangente. Vergleich mit dem Ergebnis von b): Der Tiefpunkt der Kettenlinie liegt an derselben Stelle wie der der Parabel, aber etwa $2{,}90\,m$ höher.	3	5	1
	Insgesamt 33 Bewertungseinheiten, verteilt auf die Anforderungsbereiche	**13**	**17**	**3**
	Prozentuale Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	39%	52%	9%

Hilfsmittel: wissenschaftlicher Taschenrechner, Formelsammlung

Aufgabe: Untersuchungen zu den Weltkupferreserven

1966 betrug der Welt-Jahres-Kupferverbrauch $5{,}40$ Mio. Tonnen. Die jährliche Zuwachsrate für diese Größe betrug zu der Zeit ungefähr $4{,}6\%$. Diese Angaben wurden damals verwendet, um den Kupferverbrauch für die nachfolgenden Jahre zu prognostizieren.

a) Angesetzt wurde eine Funktionsvorschrift $f(t)$ für den Jahres-Kupfer-Verbrauch im t-ten Jahr nach 1966 ($t = 0$). Begründen Sie, in wie weit die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = 5{,}4 \cdot e^{0{,}045t} \text{ (in Mio. Tonnen Kupfer/Jahr)}$$

die Entwicklung modelliert. Berücksichtigen Sie dazu folgende Punkte:

- Herleitung des Terms aus den gegebenen Daten,
- zu Grunde liegende Annahmen,
- Grenzen der Modellierung.

Verwenden Sie für b) und c) die Modellierung durch $f(t)$.

b) **Bestimmen** Sie den Jahresverbrauch für das Jahr 2016.
Berechnen Sie die Verdopplungszeit.
Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Verdopplungszeit 3 weitere Punkte des Grafen und **skizzieren** Sie ihn für $0 \le t \le 50$.

c) Gegeben ist die Funktion F mit

$$F(t) = \int_0^t f(x)\,dx.$$

Berechnen Sie $F(5)$. **Interpretieren** Sie $F(5)$ auf das Problem bezogen.
Berechnen Sie ohne Integralrechnung einen entsprechenden Wert, d.h. einen Wert, der denselben Sachverhalt erfasst.

Vergleichen Sie die beiden verschieden ermittelten Werte und **beurteilen** Sie beide Verfahren.

d) Man macht solche Prognosen, um vorauszusagen, wann Vorräte erschöpft sind.
Zu Beginn des Jahres 1966 konnte man von 600 Mio. Tonnen an Kupferreserven ausgehen.

Untersuchen Sie die Zeiträume, die der Vorrat ausreicht, unter folgenden drei unterschiedlichen Annahmen:

- bei gleich bleibendem jährlichen Verbrauch von $5{,}4$ Mio. Tonnen,
- bei einem jährlichen schon oben verwendeten Verbrauchszuwachs von $4{,}6\%$ ab 1966,
- bei einer jährlichen Absenkung des Verbrauchs um $0{,}5\%$ ab 1966.

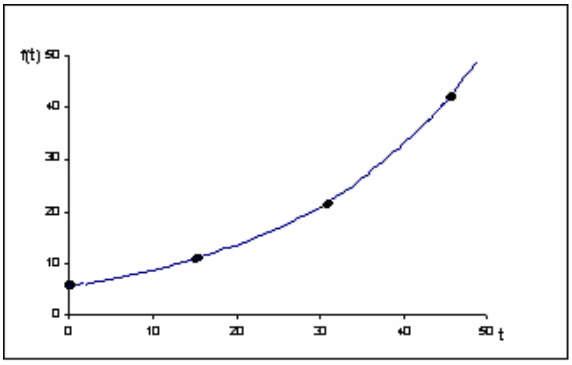
e) **Erstellen** Sie eine passende Frage zu folgender Gleichung, die im obigen Sachzusammenhang steht:

$$F(x) = \int_0^x 5{,}4 \cdot 0{,}99^t\,dt = 600.$$

Untersuchen Sie die Gleichung hinsichtlich ihrer Lösungsmenge. **Interpretieren** Sie ihre Ergebnisse auf das Problem bezogen.

Veranschaulichen Sie die Situation mit Hilfe eines Diagramms.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung/ Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Zuwachs von $4,6\%$ pro Jahr bedeutet Anwachsen um Faktor $1,046$ pro Jahr, d.h. $f(t) = 5,4 \cdot 1,046^t = 5,4 \cdot e^{\ln 1,046 \cdot t} \approx 5,4 \cdot e^{0,045 \cdot t}$ könnte als Herleitung gelten.
Zur Beurteilung des Modells z.B.
● Konstanzannahme ist idealisierend
● Prognosezeiträume nur zeitnah zum Jahr 1966
● Begrenzung des Wachstums durch Endlichkeit der Ressourcen</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$f(50) = 5,4 \cdot e^{0,045 \cdot 50} \approx 51,23$ (Mio.t); Verdopplungszeit $t_d \approx \ln 2 / 0,045 \approx 15,4$ (Jahre).
 

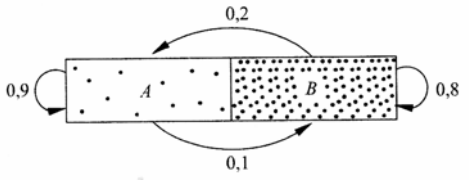
Wertepaare mit Hilfe von t_d gebildet:
<table><tr><th>t</th><th>$f(t)$</th></tr><tr><td>0</td><td>$5,4$</td></tr><tr><td>$15,4$</td><td>$10,8$</td></tr><tr><td>$30,8$</td><td>$21,6$</td></tr><tr><td>$46,2$</td><td>$43,2$</td></tr></table></td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$\int_0^5 f(t)\,dt = \left[5,4/0,045 \cdot e^{0,045t}\right]_0^5 \approx 30,28$ (Mio. Tonnen Gesamtverbrauch an Kupfer von 1966 bis Ende 1970).
Die entsprechende Schraffur muss in die Skizze von b) eingetragen werden.
Die Ermittlung des Gesamtverbrauchs als Summe der Jahresverbrauchsmengen von 1966-1970:
$5,4 + 5,4 \cdot e^{0,045} + 5,4 \cdot e^{0,045 \cdot 2} + 5,4 \cdot e^{0,045 \cdot 3} + 5,4 \cdot e^{0,045 \cdot 4} \approx 29,6$ (Mio. Tonnen).
Dieser Wert ist kleiner als der Wert, der über die Integralrechnung gewonnen wurde. Ein grafischer Vergleich mit Hilfe der Flächeninhalte der Rechtecke, die für die Jahresverbräuche im obigen Grafen eingezeichnet werden könnten, macht den Unterschied plausibel und lässt zusätzlich zur Rechnung den Integralwert als Näherungswert erkennen.</td><td>2</td><td>4</td><td>1</td></tr>
</table>

d)	Bei gleichbleibendem Verbrauch wären die 600 Mio.t nach $600:5,4\approx 111$ Jahren verbraucht. Bei dem jährlichen Verbrauchszuwachs von $4,6\%$ ab 1966 führt $600=\int_0^x f(t)\,dt=\left[\frac{5,4}{0,045}\cdot e^{0,045t}\right]_0^x=120\cdot\left(e^{0,045x}-1\right)$ zu $x=\ln(600/120+1)/0,0045\approx 39,8$ (Jahre), Ende 2005 würde es zu einer Erschöpfung der Reserven gekommen sein. (Bei geeignetem TR darf die Gleichung mit dem Solver gelöst werden.) Bei einer jährlichen Absenkung des Verbrauchs um $0,5\%$ ab 1966 führt $\int_0^x 5,4\cdot 0,995^t\,dt=\left[\frac{5,4}{\ln(0,995)}\cdot e^{\ln 0,995t}\right]_0^x\approx -1077,3\left(e^{-0,005x}-1\right)=600$ zu $x\approx\ln(600/-1077,3+1)/-0,005\approx 162,8$ (Jahre), d.h. im Jahre 2128 käme es zur Erschöpfung.	5	4	2
e)	Eine mögliche Fragestellung: Wie viele Jahre reichen die Kupferreserven von 600 Mio. Tonnen, wenn man davon ausgeht, dass im Anfangsjahr 5,4 Mio. Tonnen verbraucht werden und von Jahr zu Jahr eine Verbrauchsreduktion um 1% erfolgt? $F(x)=\int_0^x 5,4\cdot 0,99^t\,dt=600$ hat keine Lösung, da $x=\ln(600/(5,4/\ln 0,99)+1)/\ln 0,99$ nicht existiert, da $600/(5,4/\ln 0,99)+1<0$ ist. Als Erklärungen können, neben diesem formalen Grund, Betrachtungen zum Grenzverhalten der Verbrauchsfunktion F, rechnerisch und grafisch am Grafen von F erklärt, hinzugezogen werden. $\lim_{x\to\infty}F(x)=5,4/\ln 0,99\approx 537,3$ (Mio. t), da $e^{\ln 0,99x}$ für $x\to\infty$ gegen 0 strebt., d.h. hätte man eine solche Verbrauchsreduktion dauerhaft erwirkt, würde der gesamte Verbrauch die Menge von etwa 540 Mio. t Kupfer niemals übertreffen.	2	4	1
	Insgesamt 33 Bewertungseinheiten, verteilt auf die Anforderungsbereiche	**13**	**16**	**4**
	Prozentuale Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	39%	49%	12%

Hilfsmittel: wissenschaftlicher Taschenrechner, Formelsammlung

Aufgabe: Untersuchungen zum Diffusionsprozess

Diffusion ist die durch thermische Bewegung verursachte Verteilung der Moleküle eines Stoffes in einem anderen. Wir betrachten als Beispiel für einen solchen Vorgang das folgende vereinfachte Modell einer Diffusion.



Diffusion zwischen A und B

Ein mit 12000 Molekülen gefüllter Kasten ist durch eine durchlässige Wand in zwei Hälften A, B geteilt. Wir betrachten die Verteilung der Moleküle auf die beiden Hälften jeweils nach Ablauf einer festen Zeiteinheit: 10% der Moleküle in A sind nach B gelangt (die restlichen 90% bleiben in A) und 20% der Moleküle in B sind nach A gelangt (die restlichen 80% bleiben in B). Zu Beginn der Untersuchung sind $x_0 = 3000$ Moleküle in A und $y_0 = 9000$ in B. Es soll untersucht werden, wie sich die anfängliche Verteilung der zusammen 12000 Moleküle auf die beiden Hälften entwickelt.

a) **Begründen** Sie, dass die Übergangs-Matrix $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$ diesen Diffusionsprozess beschreibt und **berechnen** Sie, ausgehend von $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3000 \\ 9000 \end{pmatrix}$, die Verteilungen $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ nach einer bzw. zwei Zeiteinheiten.

b) **Zeigen** Sie, dass es eine so genannte stationäre Verteilung $\vec{v}_s = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $M * \vec{v}_s = \vec{v}_s$ und $x + y = 12000$ gibt und **berechnen** Sie diese.

c) Für die Verteilung $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ nach n Zeiteinheiten gilt: $x_n = 0,7x_{n-1} + 2400$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Leiten Sie diese Berechnungsformel und eine entsprechende für y_n ($n \in \mathbb{N}^*$) her und **berechnen** Sie den jeweiligen Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Interpretieren Sie die beiden Grenzwerte im Zusammenhang mit b).

d) **Zeichnen** Sie in ein Koordinatensystem die Punkte P_i mit $\overrightarrow{OP_i} = \vec{v}_i$, $i = 0,1,2,3$ und den Punkt P mit $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 8000 \\ 4000 \end{pmatrix}$. **Zeigen** Sie, dass die Punkte auf einer gemeinsamen Geraden g liegen. **Geben** Sie die Gleichung der Geraden g **an**, sowohl als Funktionsvorschrift $g(x) = mx + b,\ x \in \mathbb{R}$, als auch in Parameterdarstellung $g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u},\ r \in \mathbb{R}$. Welche Ergebnisse von b) und c) werden in dieser Zeichnung veranschaulicht (**begründen Sie!**)?

Das Beispiel mit der Abbildung wurde entnommen aus:
Kroll u.a.: Analytische Geometrie / Lineare Algebra, Grund- und Leistungskurs, Dümmler Verlag 1997

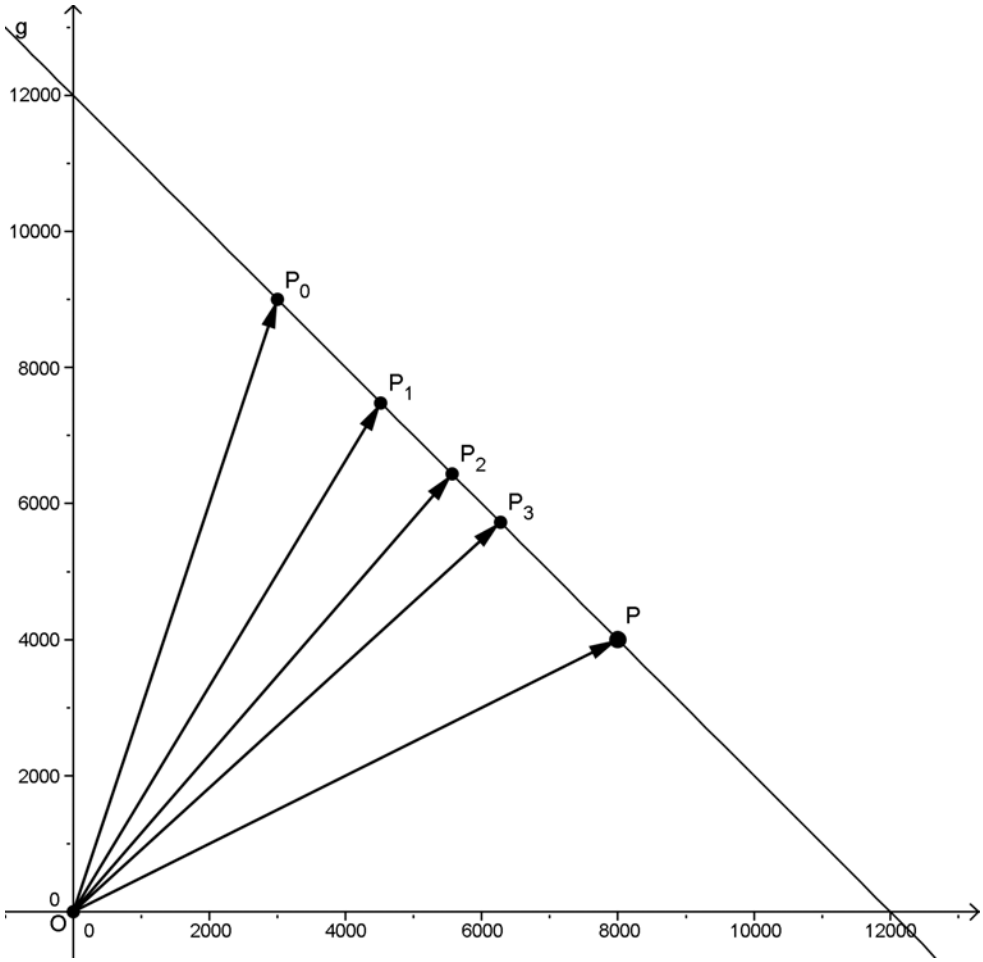
Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen

Bemerkung:

Einige Aufgabenteile lassen sich ohne Vorkenntnisse elementar lösen. Das Aufstellen von Übergangsmatrizen soll aus dem Unterricht bekannt sein.

	Lösungsskizze	Bewertung/ Zuordnung		
		I	II	III
a)	Begründung für die Korrektheit der Matrix: Bei Matrix-Vektor Multiplikation muss in der ersten Komponente vom Ergebnisvektor die Anzahl der Moleküle in A und in der zweiten die in B stehen: $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 \cdot x_{n-1} + 0,2 \cdot y_{n-1} \\ 0,1 \cdot x_{n-1} + 0,8 \cdot y_{n-1} \end{pmatrix}$ Daraus ergibt sich $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = M * \begin{pmatrix} 3000 \\ 9000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4500 \\ 7500 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = M * \begin{pmatrix} 4500 \\ 7500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5550 \\ 6450 \end{pmatrix}$.	3	3	
b)	Für eine stationäre Verteilung $\vec{v}_s = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit Gesamtanzahl $x + y = 12000$ muss gelten $M * \vec{v}_s = \vec{v}_s$: $\left[\begin{matrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,8 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ x + y = 12000 \end{matrix}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} 0,9x + 0,2y = x \\ 0,1x + 0,8y = y \\ x + y = 12000 \end{matrix}\right] \Leftrightarrow$ $\left[\begin{matrix} -0,1x + 0,2y = 0 \\ 0,1x - 0,2y = 0 \\ y = 12000 - x \end{matrix}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} -0,1x + 0,2y = 0 \\ 0 = 0 \\ y = 12000 - x \end{matrix}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} y = 0,5x \\ y = 12000 - x \end{matrix}\right]$ $\Leftrightarrow \left[\begin{matrix} y = 0,5x \\ 0 = 12000 - 1,5x \end{matrix}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} y = 0,5x \\ x = 8000 \end{matrix}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} y = 4000 \\ x = 8000 \end{matrix}\right]$ $\vec{v}_s = \begin{pmatrix} 8000 \\ 4000 \end{pmatrix}$ ist die stationäre Verteilung. *Bemerkung: Das LGS darf auch über eine erweiterte Matrix mit dem TR gelöst werden.*	6		

c)	Die beiden Folgen lassen sich "entkoppeln", für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt: $\left.\begin{array}{l} x_n = 0{,}9 \cdot x_{n-1} + 0{,}2 \cdot y_{n-1} \\ y_n = 0{,}1 \cdot x_{n-1} + 0{,}8 \cdot y_{n-1} \end{array}\right\} x_n + y_n = x_{n-1} + y_{n-1} = \ \ldots = x_0 + y_0 = 12000 \Rightarrow$ $x_{n-1} = x_0 + y_0 - y_{n-1}$ und $y_{n-1} = x_0 + y_0 - x_{n-1}$ $x_n = 0{,}9 \cdot x_{n-1} + 0{,}2 \cdot y_{n-1} = 0{,}9 \cdot x_{n-1} + 0{,}2 \cdot (x_0 + y_0 - x_{n-1})$ $= 0{,}7 \cdot x_{n-1} + 0{,}2 \cdot (x_0 + y_0) = 0{,}7 \cdot x_{n-1} + 2400$ $y_n = 0{,}1 \cdot x_{n-1} + 0{,}8 \cdot y_{n-1} = 0{,}1 \cdot (x_0 + y_0 - y_{n-1}) + 0{,}8 \cdot y_{n-1}$ $= 0{,}7 \cdot y_{n-1} + 0{,}1 \cdot (x_0 + y_0) = 0{,}7 \cdot y_{n-1} + 1200$ *1. Lösungsansatz über Iterationsfolgen:* $\langle x_n \rangle$ bzw. $\langle y_n \rangle$ sind somit rekursiv definierte Iterationsfolgen mit der linearen Iterationsfunktion g_1 mit $g_1(x) = 0{,}7x + 2400$ bzw. g_2 mit $g_2(x) = 0{,}7x + 1200$. Da in beiden Fällen die Steigung kleiner 1 ist, ist der jeweilige Fixpunkt ($x_1{}^* = 8000$ bzw. $x_2{}^* = 4000$) attraktiv und die Folgen konvergieren dagegen. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 8000$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 4000$. *2. äquivalenter Lösungsansatz über geometrische Reihen und deren expliziter Darstellung:* $x_n = 0{,}7 \cdot x_{n-1} + 2400 = 0{,}7(0{,}7x_{n-2} + 2400) + 2400 = \ldots.$ $= 0{,}7^n \cdot 3000 + 2400 \cdot \sum\limits_{k=0}^{n-1} 0{,}7^k = 0{,}7^n \cdot 3000 + 2400 \dfrac{1 - 0{,}7^n}{0{,}3}$ $= 0{,}7^n \cdot 3000 + 8000 \cdot (1 - 0{,}7^n) = 0{,}7^n \cdot (-5000) + 8000$ $y_n = 0{,}7 \cdot y_{n-1} + 1200 = 0{,}7 \cdot (0{,}7y_{n-2} + 1200) + 1200 = \ldots.$ $= 0{,}7^n \cdot 9000 + 1200 \cdot \sum\limits_{k=0}^{n-1} 0{,}7^k = 0{,}7^n \cdot 9000 + 1200 \cdot \dfrac{1 - 0{,}7^n}{0{,}3}$ $= 0{,}7^n \cdot 9000 + 4000 \cdot (1 - 0{,}7^n) = 0{,}7^n \cdot 5000 + 4000$ Nach den bekannten Sätzen über geometrische Folgen ergeben sich die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 8000$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 4000$. Die stationäre Verteilung ist somit auch die Grenzverteilung. Die Verteilung pendelt sich bei 8000 Molekülen in A und 4000 in B ein.		8	4

d)	Da für die Punkte $P_i(x_i \mid y_i)$ gilt: $x_i + y_i = 12000$, liegen sie auf der Geraden mit der Gleichung $g(x) = -x + 12000$. In der Parameterdarstellung kann $P(8000 \mid 4000)$ für den Ortsvektor und $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Richtungsvektor verwendet werden: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8000 \\ 4000 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$.  Aus der Zeichnung wird bereits deutlich, dass die Punktfolge auf den Punkt P zuläuft, was in c) durch Berechnung des Grenzwertes als stationäre Verteilung gezeigt wurde.	4	4	
	Insgesamt 32 Bewertungseinheiten, verteilt auf die Anforderungsbereiche	**13**	**15**	**4**
	Prozentuale Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	41%	47%	13%

Hilfsmittel: wissenschaftlicher Taschenrechner, Formelsammlung

Hinweis: Geben Sie stets Ihre Ergebnisse auf drei Nachkommastellen gerundet an.

Aufgabe: Untersuchungen zur Buchstabenverteilung

Sprachwissenschaftler beschäftigen sich unter anderem mit typischen Eigenschaften von Sprachen, dazu gehört auch die Abfolge von Konsonanten und Vokalen in einer Sprache. In einem Roman folgt auf einen Konsonanten in 48% der Fälle wieder ein Konsonant, auf einen Vokal in 17% der Fälle wieder ein Vokal; Interpunktionen und Zwischenräume werden nicht beachtet.

a) Betrachten Sie die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0,480 & 0,830 \\ 0,520 & 0,170 \end{pmatrix}$ im Zusammenhang zur oben beschriebenen Abfolge.

Erstellen Sie dazu das entsprechende Übergangsdiagramm.
Interpretieren Sie die Werte $0,520$ und $0,830$ in diesem Zusammenhang.

b) In einem Roman wird eine beliebige Stelle herausgegriffen; der ausgewählte Buchstabe ist ein Vokal.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass

- der erste nachfolgende Buchstabe wieder ein Vokal ist,
- der zweite nachfolgende Buchstabe wieder ein Vokal ist.

Begründen Sie, dass es sinnvoll ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Startvektor zu benutzen?

c) **Erläutern** Sie die Bedeutung der Ergebnisse bei (1) und (2):

(1) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0,480 & 0,830 \\ 0,520 & 0,170 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,480 \\ 0,520 \end{pmatrix}$ (2) $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0,480 & 0,830 \\ 0,520 & 0,170 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0,480 \\ 0,520 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,662 \\ 0,338 \end{pmatrix}$

Welche **Vermutung** ergibt sich aus den weiteren Rechnungen?

(3) $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0,480 & 0,830 \\ 0,520 & 0,170 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0,662 \\ 0,338 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,598 \\ 0,402 \end{pmatrix}$ (4) $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0,480 & 0,830 \\ 0,520 & 0,170 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0,598 \\ 0,402 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,621 \\ 0,379 \end{pmatrix}$

(5) … (6) …

(7) $\vec{v}_7 = \begin{pmatrix} 0,480 & 0,830 \\ 0,520 & 0,170 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0,616 \\ 0,384 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,615 \\ 0,385 \end{pmatrix}$ (8) $\vec{v}_8 = \begin{pmatrix} 0,480 & 0,830 \\ 0,520 & 0,170 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0,615 \\ 0,385 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,615 \\ 0,385 \end{pmatrix}$

d) **Zeigen** Sie, dass es zu M eine stationäre Verteilung $\vec{v}_s = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $M * \vec{v}_s = \vec{v}_s$ und $x + y = 1$ gibt und **berechnen** Sie diese. **Vergleichen** Sie diese mit den Ergebnissen unter c).

e) **Skizzieren** Sie für $\vec{v}_s = \begin{pmatrix} 0,615 \\ 0,385 \end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Gerade $g: \vec{x} = \vec{v}_s + r \cdot \vec{u}$, $r \in \mathbb{R}$. (1 LE mind. 5 cm)

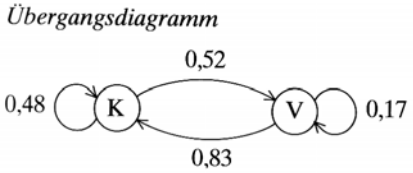
Zeigen Sie: Jeder Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \end{pmatrix}$ mit $x_w + y_w = 1$ erfüllt die Geradengleichung von g.

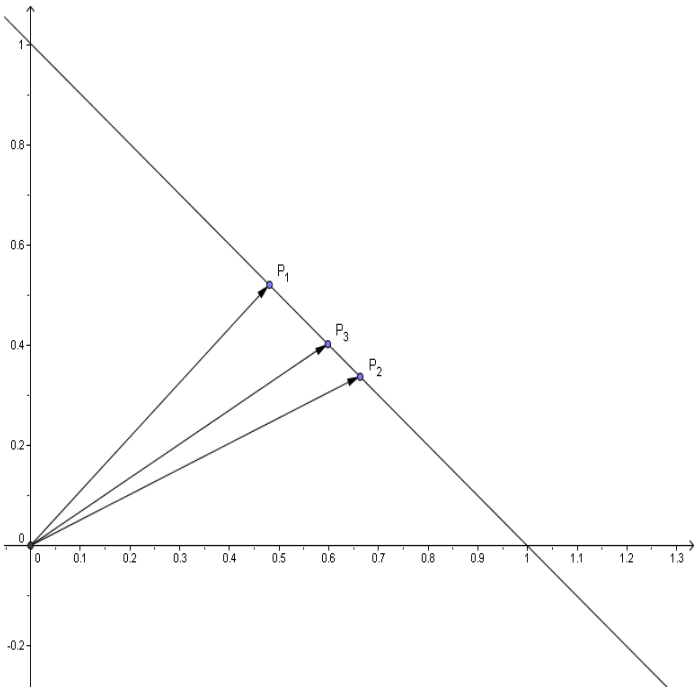
Berechnen Sie r_1, so dass für den Vektor $\vec{v}_1$ aus c) gilt: $\vec{v}_1 = \vec{v}_s + r_1 \cdot \vec{u}$.
Tragen Sie die ersten drei Vektoren aus c) als Ortsvektoren in Ihre **Skizze** ein.

f) **Zeigen** Sie: Für jedes $\vec{w}$ mit $\vec{w} = \vec{v}_s + r \cdot \vec{u}$ gilt: $M * \vec{w} = \vec{v}_s + (-0,35) \cdot r \cdot \vec{u}$. **Erläutern** Sie die Bedeutung folgender Gleichungen für die Folge $\vec{v}_n$ der Verteilungen aus c)
$M^2 * \vec{w} = \vec{v}_s + (-0,35)^2 \cdot r \cdot \vec{u}$, $M^3 * \vec{w} = \vec{v}_s + (-0,35)^3 \cdot r \cdot \vec{u}$, ... , $M^n * \vec{w} = \vec{v}_s + (-0,35)^n \cdot r \cdot \vec{u}$ und
die Bedeutung der Komponenten von $\vec{v}_s = \begin{pmatrix} 0,615 \\ 0,385 \end{pmatrix}$ für die Verteilung der Buchstaben in dem Roman.

Quelle: Elemente der Mathematik, Stochastik, Schroedel 2003, S.281 mit Formulierungsänderungen und ergänzenden Aufgabenteilen.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen

	Lösungsskizze	Bewertung/ Zuordnung		
		I	II	III
a)	 Einem Vokal folgt in 83% der Fälle ein Konsonant und einem Konsonanten folgt in 52% der Fälle ein Vokal.	2	2	
b)	Da der ausgewählte Buchstabe ein Vokal ist, liegt hier der Startvektor $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vor. Hiermit werden die weiteren Zustandsvektoren (auf 3 Dezimalstellen) genau berechnet: $M * \vec{v}_0 = \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}830 \\ 0{,}170 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_2 = M * \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}540 \\ 0{,}460 \end{pmatrix}$. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 17% ist der 1. folgende Buchstabe wieder ein Vokal. Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 46% ist der 2. folgende Buchstabe ein Vokal.	5	2	
c)	Das sind, wie unter b), die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten eines Konsonanten bzw. Vokals, wenn der erste ausgewählte Buchstabe ein Konsonant ist. Die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten eines Konsonanten bzw. eines Vokals scheinen sich auf einen (Grenz-)Wert nahe $0{,}615$ bzw. $0{,}385$ einzupendeln.	2		
d)	Gesucht ist ein Zustandsvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit der Eigenschaft $\begin{pmatrix} 0{,}480 & 0{,}830 \\ 0{,}520 & 0{,}170 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Dies ist ein Gleichungssystem mit den beiden Variablen x und y $0{,}480x + 0{,}830y = x \qquad -0{,}520x + 0{,}830y = 0$ $0{,}520x + 0{,}170y = y \qquad 0{,}520x - 0{,}830y = 0$ das auf zwei identische Gleichungen führt. Es ist jedoch zu beachten, dass $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ein Zustandsvektor ist, d.h. es gilt $x + y = 1$. Hiermit ergibt sich dann die Lösung mit $x = 0{,}615$ und $y = 0{,}385$ als Komponenten der stationären Verteilung, die gleich den unter c) vermuteten Grenzwerten der Wahrscheinlichkeiten sind.	1	4	

e)	 Durch Einsetzen der von $x_w = 0{,}615 - r$ in $y_w = 1 - x_w$ erhält man $1 - 0{,}615 + r = 0{,}385 + r$. Für $r_1 = 0{,}135$ gilt $\vec{v}_1 = \vec{v}_s + 0{,}135 \cdot \vec{u}$.	3	3	
f)	Die Übergangsmatrix M wirkt auf irgendeinen Vektor $\vec{w}$ der Geraden g: Für sein Bild $\vec{w}'$ gilt wegen $M \cdot \vec{v}_s = \vec{v}_s$ und $M \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -0{,}35 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\vec{w}' = \vec{v}_s + (-0{,}35) \cdot r \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, r \in R$. Die auf der Geraden g liegenden $\vec{v}_n$ streben für $n \to \infty$ gegen die stationäre Verteilung $\vec{v}_s$, da $(-0{,}35)^n$ gegen 0 strebt. Die Komponenten von $\vec{v}_s$ geben an, wie Konsonanten und Vokale insgesamt im Text verteilt sind.		6	3
	Insgesamt 33 Bewertungseinheiten, verteilt auf die Anforderungsbereiche	**13**	**17**	**3**
	Prozentuale Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	39%	52%	9%

Hilfsmittel: wissenschaftlicher Taschenrechner, Formelsammlung

Aufgabe: Geraden, Ebenen und Flugzeuge

Teil I

Im $\mathbb{R}^3$ sind die beiden Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) **Zeigen** Sie, dass g und h windschief sind.

b) **Zeigen** Sie: Es gibt zwei parallele Ebenen E_1 und E_2, so dass g in E_1 und h in E_2 liegen. **Geben** Sie die Gleichungen von E_1 und E_2 in Normalenform an. **Bestimmen** Sie den Abstand der Ebenen E_1 und E_2.

c) **Zeigen** Sie, dass der Punkt $P(-\frac{307}{150} \mid \frac{68}{75} \mid \frac{239}{75})$ auf g liegt und der Punkt $Q(-\frac{83}{50} \mid -\frac{61}{50} \mid \frac{111}{50})$ auf h liegt. **Zeigen** Sie, dass der Abstand zwischen P und Q gleich dem Abstand der Ebenen E_1 und E_2 ist.

d) **Beschreiben** Sie, wie man die in Aufgabenteil c) genannten Punkte P und Q rechnerisch ermitteln kann.

Teil II

Zwei Flugzeuge bewegen sich auf geradlinigen Bahnen. Zu einem bestimmten Zeitpunkt ($t = 0$ Minuten) durchfliegt Flugzeug 1 den Punkt $(2{,}3 \mid 7{,}9 \mid 0{,}26)$, Flugzeug 2 den Punkt $(189 \mid 166{,}3 \mid 4{,}75)$. Nach einer Minute befindet sich Flugzeug 1 im Punkt $(5{,}6 \mid 13{,}2 \mid 0{,}52)$, Flugzeug 2 im Punkt $(179 \mid 157{,}9 \mid 4{,}5)$. (Alle Koordinaten in km.)

e) **Berechnen** Sie die Geschwindigkeiten der beiden Flugzeuge.

f) Die Punkte $R(4{,}315 \mid 11{,}136 \mid 0{,}419)$ auf Flugbahn 1 und $S(4{,}305 \mid 11{,}157 \mid 0{,}133)$ auf Flugbahn 2 sind diejenigen Punkte auf beiden Flugbahnen, die minimale Entfernung haben. **Ermitteln** Sie, wann die beiden Flugzeuge jeweils diese Punkte erreichen.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen

	Lösungsskizze	Bewertung/ Zuordnung		
		I	II	III
a)	Nachweis der Windschiefheit.	1	3	
b)	$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + s_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, in Normalenform: $E_1: 2x - 11y - 5z = -30$, $E_2: 2x - 11y - 5z = -1$. $d = \dfrac{\left\lvert \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix} \right) \right\rvert}{\left\lvert \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rvert} = \dfrac{29 \cdot \sqrt{6}}{30} \approx 2{,}37$.	3	7	
c)	$P(-\frac{307}{150} \mid \frac{68}{75} \mid \frac{239}{75})$ liegt auf g $(r = -\frac{7}{150})$, $Q(-\frac{83}{50} \mid -\frac{61}{50} \mid \frac{111}{50})$ liegt auf h $(s = -\frac{61}{50})$. Es gilt $\lvert \overrightarrow{PQ} \rvert = \dfrac{29 \cdot \sqrt{6}}{30}$.	4	2	
d)	Der Differenzvektor der Ortsvektoren der Punkte minimaler Entfernung steht auf beiden Geraden senkrecht. Der Ansatz $(\vec{b} + s \cdot \vec{v} - \vec{a} - r \cdot \vec{u}) * \vec{u} = 0$ bzw. $(\vec{b} + s \cdot \vec{v} - \vec{a} - r \cdot \vec{u}) * \vec{v} = 0$ führt auf ein lineares Gleichungssystem für λ und μ. Nach Berechnen von λ und μ und Einsetzen in die Geradengleichungen erhält man die Punkte minimaler Entfernung.			3
e)	Flugzeug 1: $6{,}249 \frac{\text{km}}{\text{min}} = 374{,}9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$; Flugzeug 2: $13{,}062 \frac{\text{km}}{\text{min}} = 783{,}7 \frac{\text{km}}{\text{h}}$	3	3	
f)	Flugzeug 1 erreicht R nach $0{,}61$ Minuten. Flugzeug 2 erreicht S nach $18{,}47$ Minuten.	2	2	
	Insgesamt 33 Bewertungseinheiten, verteilt auf die Anforderungsbereiche	**13**	**17**	**3**
	Prozentuale Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	39%	52%	9%

Hilfsmittel: wissenschaftlicher Taschenrechner, Formelsammlung;
Tabellen zu kumulierter Binomialverteilung für $n = 100$ und zu $\Phi(Z)$.

Aufgabe: Auswertungen von Radarmessungen

Eine verkehrsreiche Straße verleitet an einer bestimmten Stelle zum Schnellfahren. Deshalb wurde dort eine versteckte Radarmessanlage installiert, welche die Geschwindigkeit aller vorbeifahrenden Autos misst und registriert. Von allen vorbeifahrenden Autos sei p der Anteil der „Raser", d. h. der Anteil der Autos, die mit deutlich überhöhter Geschwindigkeit fahren. Man weiß, dass p≈20% beträgt.

a) **Erläutern** Sie, unter welchen Annahmen über die Verkehrs- und Messbedingungen man diese Situation als einen mehrstufigen Bernoulli-Versuch auffassen kann.
Gehen Sie bei den folgenden Aufgabenteilen von einem mehrstufigen Bernoulli-Versuch aus.

b) **Bestimmen** Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass bei 10 Messungen

- genau 3 „Raser" ermittelt werden,
- nicht mehr als 4 „Raser" ermittelt werden.

Um die Raserquote zu senken, werden probeweise Warnschilder der Verkehrswacht aufgestellt. An Hand einer Zufallsstichprobe von 100 Autos soll nun getestet werden, ob diese Maßnahmen zu einer signifikanten Senkung der Raserquote geführt haben.

Man benutzt zunächst folgende Entscheidungsregel:

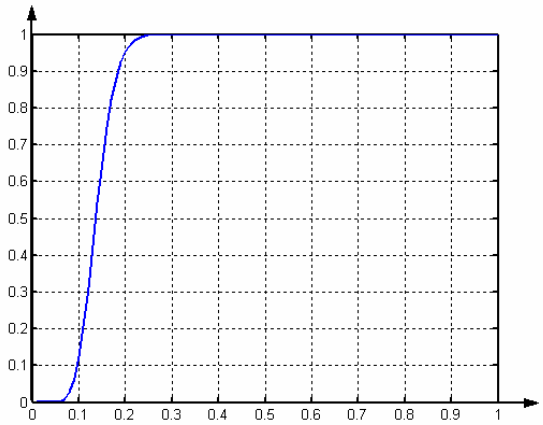
„Falls unter den 100 Gemessenen höchstens 16 Raser ermittelt werden, haben die Warnschilder zu einer signifikanten Senkung der Raserquote geführt."

c) **Berechnen** und **interpretieren** Sie die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art.
Ermitteln Sie, wie die Entscheidungsregel geändert werden muss, damit der Fehler 1. Art höchstens 5% beträgt. **Begründen** Sie Ihre Angabe mit einer geeigneten Sigma-Umgebung.-

d) Gehen Sie nun von der folgenden Entscheidungsregel aus:

(*) „Falls unter den 100 Gemessenen höchstens 13 Raser ermittelt werden, haben die Warnschilder zu einer signifikanten Senkung (auf dem 5% Niveau) der Raserquote geführt."

- **Berechnen** Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art bei der Entscheidungsregel (*), falls die Raserquote durch die Maßnahme tatsächlich auf $p_1 = 1/6$ gesenkt wurde. **Interpretieren** Sie das Ergebnis.
- Der Graph zeigt die zugehörige Operationscharakteristik.
Erläutern Sie den Zusammenhang von Operationscharakteristik und Fehler 2. Art.
Leiten Sie die Zuordnungsvorschrift **her**.
- **Beschriften** Sie die Achsen. **Interpretieren** Sie den Verlauf des Graphen. Teilen Sie hierfür die x-Achse in drei geeignete Abschnitte ein.



Quelle: Schriftliche Abiturprüfung Mathematik, Hinweise und Beispiele zu den zentralen schriftlichen Prüfungsaufgaben, Hamburg, Grundkurs Stochastik, Aufgabe 11; abgewandelt und umformuliert.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen

Bemerkung: Die Aufgabenstellung ist für alle Schüler/innen gleich, da das Verwenden von grafikfähigen Taschenrechnern und CAS-Rechnern aufwändig ist und viel Sachverstand erfordert und damit der Vorteil des geringeren Rechenaufwandes hinreichend ausgeglichen wird. Im Falle des Rechnereinsatzes werden keine Tabellen ausgegeben.

	Lösungsskizze	Bewertung/ Zuordnung		
		I	II	III
a)	Zum einen kann man die Messungen als Versuch mit nur 2 Ausgängen auffassen: Ein Auto fährt schneller als erlaubt oder nicht. Zum anderen geht es um die Frage der stochastischen Unabhängigkeit der Geschwindigkeiten der einzelnen Autos. Wenn diese vorausgesetzt wird, idealisiert man die Realität insofern, als die stochastische Unabhängigkeit z. B. dann nicht gegeben ist, wenn eine dichte Verkehrslage herrscht, wenn Wetterbedingungen das Fahrverhalten steuern, wenn einige die Radaranlage entdecken oder wenn „Gruppen“ fahren, z.B. eine Hochzeitsgesellschaft.	2	2	
b)	Die Zufallsgröße X sei die Anzahl der „Raser“ unter den 10 Gemessenen. Ohne oder mit Hilfe der Tabelle zu kumulierten binomialverteilten Wahrscheinlichkeiten oder mit geeigneten Taschenrechnern: $P(X=3)=\binom{10}{3}\cdot 0,2^3\cdot 0,8^7\approx 20\%$ $P(X\le 4)=\sum_{k=0}^{4}\binom{10}{k}\cdot 0,2^k\cdot 0,8^{10-k}\approx 97\%$	4	2	
c)	Mit Hilfe der Tabelle zu kumulierten binomialverteilten Wahrscheinlichkeiten oder mit geeigneten Taschenrechnern: $P(X\le 16)=\sum_{k=0}^{16}\binom{100}{k}\cdot 0,2^k\cdot 0,8^{100-k}\approx 19,2\%$, das ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass fälschlicher Weise angenommen wird, dass sich die Raserquote signifikant gesenkt habe, da sich unter den 100 Gemessenen zufällig nur höchstens 16 Raser befinden, obwohl die Quote in Wirklichkeit doch noch ca. 20% beträgt. Mit Hilfe der Tabelle zu kumulierten binomialverteilten Wahrscheinlichkeiten oder mit geeigneten Taschenrechnern: $P(X\le 13)\approx 4,7\%$ $P(X\le 14)\approx 8,0\%$ „Falls unter den 100 erfassten Autos höchstens 13 Raser ermittelt werden, haben die Warnschilder zu einer signifikanten Senkung der Raserquote geführt.“ Mögliche Erläuterungen: Die Binomialverteilung wird durch die Normalverteilung approximiert, die Zufallsvariable X geht über in $Z=\frac{X+0,5-\mu}{\sigma}$. $\Phi(-1,64)=0,0505$ Voraussetzung: $\sigma=\sqrt{np(1-p)}=4>3$	3	8	

	Oder: σ ist die Standardabweichung um den Erwartungswert. Voraussetzung zur Anwendung einer Sigma-Regel: $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 4 > 3$ Berechnung des Erwartungswertes: $\mu = np = 20$. *Unterhalb* von $\mu - 1{,}64\sigma$ liegen ca. 5% der Stichprobenergebnisse, also $X < \mu - 1{,}64\sigma = 13{,}44$			
d)	Der Fehler 2. Art für $p = \frac{1}{6}$ beträgt: $P_{p=\frac{1}{6}}(X > 13) = 1 - \sum_{k=0}^{13} \binom{100}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{100-k} \approx 80\%$. Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art ist für den Fall, dass die Raserquote auf ca. 16,7 % gesenkt würde, sehr hoch, d.h. diese Entscheidungsregel „entdeckt“ eine geringe Senkung (hier um 3 Prozentpunkte) sehr oft nicht. Die Operationscharakteristik zeigt für verschiedene Werte von p die zugehörige Wahrscheinlichkeit β für einen Fehler 2. Art. Die Zuordnungsvorschrift lautet: $p \mapsto P_p(X > 13) = 1 - \sum_{k=0}^{13} \binom{100}{k} p^k (1-p)^{100-k}$ (bzw. $1 - P_p(X \le 13)$) Achsenbeschriftung: x-Achse: Wahrscheinlichkeit p. y-Achse: Wahrscheinlichkeit β für einen Fehler 2. Art. Interpretationsbeispiel: Hier sind die Abschnitte $p < 0{,}1$; $0{,}1 \le p \le 0{,}2$; $0{,}2 \le p$ zugrunde gelegt. Würde die Raserquote stark gesenkt (auf unter 10%) so wäre die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art noch gering (unter ca. 10%). Wird sie nur ein weniger stark gesenkt, so steigt der Fehler 2. Art sehr schnell an. So liegt zum Beispiel bei einer Senkung der Raserquote auf 15 % (immerhin um 5 Prozentpunkte) die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art schon bei ungefähr 60%. Bei einer Raserquote oberhalb von 20% ist die Wahrscheinlichkeit für β schon nahe bei 100%.	3	5	4
	Insgesamt 33 Bewertungseinheiten, verteilt auf die Anforderungsbereiche	**12**	**17**	**4**
	Prozentuale Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	36%	52%	12%

Hilfsmittel: wissenschaftlicher Taschenrechner, Formelsammlung

Aufgabe: Schnelltest BSE und Medikamententest Tierkrankheit

Seit November 2000 muss bei jedem geschlachteten Rind, das älter als 30 Monate ist, ein Schnelltest auf BSE durchgeführt werden. Solch ein Test ist durch zwei unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten gekennzeichnet, nämlich durch

I. die Wahrscheinlichkeit, mit der ein infiziertes Rind als solches erkannt wird, also die Wahrscheinlichkeit mit der der Test die vorliegende Erkrankung durch ein positives Ergebnis korrekt anzeigt. Für diese Wahrscheinlichkeit nehmen wir den folgenden Wert an: $p_1 = 0{,}985$.

II. die Wahrscheinlichkeit, mit der ein nicht infiziertes Rind als solches richtig erkannt wird, also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine Infektion vorliegt und der Test negativ ausfällt. Für diese Wahrscheinlichkeit nehmen wir den folgenden Wert an: $p_2 = 0{,}999$

a) Ein solches Testverfahren ist mit Fehlern behaftet:

- Fehler A: eine Infektion wird angezeigt (Testreaktion positiv), obwohl das Tier kein Virusträger ist,
- Fehler B: es wird keine Infektion angezeigt (Testreaktion negativ), obwohl die Infektion tatsächlich vorhanden ist.

Bestimmen Sie zu den oben angegebenen Werten p_1 und p_2 die Wahrscheinlichkeiten, mit der diese beiden Fehler auftreten.

b) Nehmen Sie an, dass $0{,}05\%$ der Rinder in einem bestimmten Land mit BSE infiziert sind.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ein Test positiv bzw. negativ ausfällt, bestätigen Sie dazu die auf 4 Nachkommastellen gerundeten Werte $p_3 \approx 0{,}0015$ bzw. $p_4 \approx 0{,}9985$.

c) **Berechnen** Sie für das Land aus Teil b):

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Rind mit positivem Testergebnis tatsächlich nicht erkrankt?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Rind mit negativem Testergebnis tatsächlich erkrankt?

Folgern Sie aus den beiden Punkten, was ein Schnelltest leistet bzw. nicht leistet.

Medikamententest Tierkrankheit

d) Für eine bestimmte weit verbreitete Tierkrankheit wurde ein neues Medikament entwickelt. Die Produktionsfirma hofft, dass es besser wirkt als das bisher auf dem Markt befindliche Mittel, das eine Erfolgsquote von 80% hat. Für den Test des Mittels stehen 152 kranke Tiere zur Verfügung.

Nennen Sie die zu testende Hypothese und die Gegenhypothese und die im Test betrachtete Zufallsgröße.

Begründen Sie, warum ein Binomialansatz bzw. ein Ansatz mit Normalverteilung gerechtfertigt ist.

Ermitteln Sie eine Entscheidungsregel, in der festgelegt wird, bei welchen Testergebnissen die Hypothese als widerlegt angesehen wird. Dabei soll der Fehler 1. Art (α-Fehler) nicht mehr als 1% betragen.

e) Für $\alpha = 5\%$ ist der Verwerfungsbereich für die Nullhypothese $V = \{131, \ldots, 152\}$. **Bestimmen** Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art (β-Fehler), wenn das neue Medikament tatsächlich eine Erfolgswahrscheinlichkeit von 82% hat. **Erläutern** Sie seine Bedeutung.

Erläutern Sie, warum der Fehler 2. Art so groß ist.
Leiten Sie aus den Eigenschaften der Binomialverteilung **her,** wie man diesen Fehler verringern kann.
Veranschaulichen Sie ihre Argumentation mit Skizzen der Verteilungen.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen

	Lösungsskizze	Bewertung/ Zuordnung		
		I	II	III
a)	Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler A: Infektion wird angezeigt, obwohl keine Infektion vorliegt, ist die Gegenwahrscheinlichkeit von p_2: $\overline{p}_2 = 1 - p_2 = 0{,}001$ Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler B: Infektion wird nicht angezeigt, obwohl sie vorliegt, ist die Gegenwahrscheinlichkeit von p_1: $\overline{p}_1 = 1 - p_1 = 0{,}015$.	1	1	
b)	Baumdiagramm u. Pfadmultiplikations-/-additionsregel (oder Vierfeldertafel) $P(\text{Test positiv}) = 0{,}001492 \approx 0{,}0015$; $P(\text{Test negativ}) = 0{,}998508 \approx 0{,}9985$.	5	2	
c)	$P(\text{nicht inf. / T+}) = 0{,}6699$; $P(\text{nicht inf. / T-}) = 7{,}5 \cdot 10^{-6}$. Trotz positivem Testergebnis besteht eine relativ große Chance ($\approx 2/3$), dass das Rind nicht erkrankt ist. Deswegen sind nach dem positiven Schnelltest noch genauere Untersuchungen erforderlich. Ein negatives Testergebnis gibt mehr Sicherheit: Es ist es sehr unwahrscheinlich, dass ein negativ getestetes Rind infiziert ist ($< 0{,}001\%$).	2	1	1
d)	Hypothese H_1: Das neue Mittel ist besser als das alte; $p > p_0 = 0{,}8$. Hypothese H_0: Das neue Mittel ist nicht besser als das alte; $p \le p_0 = 0{,}8$. X: Anzahl der Tiere, bei denen das Mittel wirkt, $n = 152$, $p_0 = 0{,}8$. X ist binomialverteilt mit n und p_0. Binomialansatz ist gerechtfertigt, da ● nur zwei Ausgänge möglich (Mittel wirkt / wirkt nicht) und ● p als gleich bleibend auf jeder Stufe (= Versuchstier) angenommen werden kann, denn das Verhältnis von Umfang der Gesamtheit der kranken Tiere zu Umfang der Stichprobe ist sehr groß. Da vermutet wird, dass das neue Mittel besser als das alte wirkt: rechtsseitiger Test, also ist das kleinste k gesucht, für das gilt $P(X \ge k) \le 1\%$ bzw. $1 - P(X \le k-1) \le 1\%$. (Eine Skizze einer „Glockenkurve“ zur Testsituation mit Achsen k und $P(X = k)$, $\mu \approx 122$ und einem geschätzten Bereich für den α-Fehler ist hilfreich.) Mit Normalverteilung: Da X binomialverteilt ist, ist $z = (X + 0{,}5 - \mu)/\sigma$ näherungsweise normalverteilt mit $\mu = 121{,}6$ und $\sigma \approx 4{,}932 > 3$ (mit Stetigkeitskorrektur) und $P(X \le k) \approx \Phi(z)$. Gesucht ist z mit $\Phi(z) = 0{,}99$. Als Verwerfungsbereich ergibt sich mit $z = 2{,}33$; $X = k - 1$ und $k = z \cdot \sigma + \mu + 0{,}5$: $V = \{134, \ldots, 152\}$. Mit Binomialverteilung (GTR oder GTR mit CAS): $P(X \le 132) = 0{,}9895$; $P(X \le 133) = 0{,}9944$, also $P(X \ge 134) \le 5\%$ und somit $V = \{134, \ldots, 152\}$. (Bemerkung: da $P(X \le 132) = 0{,}9895 \approx 0{,}99$ ist $V = \{133, \ldots, 152\}$ ebenfalls richtig) Entscheidungsregel: Wenn sich bei 134 oder mehr Tieren ein Behandlungserfolg zeigt, nehmen wir an, dass das neue Medikament besser wirkt als das alte.	5	7	

e)	X wie oben, für $n = 152$, $p_1 = 0{,}82$ ergibt sich $\mu = 124{,}64$ und $\sigma = 4{,}737 > 3$. Der β-Fehler ist möglich im Bereich $\{0,\ldots 130\}$. Mit Normalverteilung: $P(X \leq 130) \approx \Phi(1{,}237) \approx \Phi(1{,}24) = 0{,}8925 \approx 89\%$. Mit Binomialverteilung: $P(X \leq 130) \approx 0{,}8946 \approx 89\%$. Das ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler, dass das Mittel nicht als besser erkannt wird, obwohl es besser als das alte Mittel ist. Der Fehler 2. Art ist so groß, weil p_1 und p_0 relativ nahe beieinander liegen und mit $n = 152$ eine eher kleine Stichprobe vorliegt. Auf diese Weise überlappen sich die beiden Verteilungen sehr stark, der Test ist nicht sehr trennscharf. Bei größerem n wird die Überlappung der Verteilungen geringer. Bei einer Multiplikation von n mit einem Faktor a wächst σ nur um den Faktor $\sqrt{a}$, die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte σ-Umgebung um μ ist aber bei Binomialverteilungen nahezu gleich. Damit wird die Wahrscheinlichkeit für den β-Fehler reduziert. (α ist durch die vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit begrenzt und bleibt nahezu unverändert.) Der Fehler 2.Art könnte auch verringert werden, wenn das Signifikanzniveau erhöht wird. (Zur Erklärung sind Skizzen notwendig, in denen deutlich wird, wie α und β zusammenhängen und welchen Einfluss eine Vergrößerung von n hat.)		6	3
	Insgesamt 33 Bewertungseinheiten, verteilt auf die Anforderungsbereiche	**13**	**16**	**4**
	Prozentuale Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	39%	49%	12%

Hilfsmittel: GTR (auch mit CAS) oder TC, Formelsammlung
Vergessen Sie nicht, Ihre Eingaben zu protokollieren!

Aufgabe: Untersuchungen zum Benzinverbrauch

Der Benzinverbrauch eines bestimmten PKWs (nach einem Kaltstart) in Litern pro Kilometer lässt sich durch Funktionen des Typs

$$f: x \to a \cdot e^{-kx} + c,\ x > 0$$

mit geeigneten Werten für a, c, k erfassen. x gibt die nach einem Kaltstart gefahrenen km an. Eine gemäßigte Fahrweise und eine Außentemperatur von ca. 15°C werden vorausgesetzt.

Die folgenden Fragestellungen beziehen sich stets auf die gemäßigte Fahrweise und die Außentemperatur von ca. 15°C, auf die sich die Funktion f bezieht.

a) In einer Broschüre für einen bestimmten PKW soll der Benzinverbrauch pro km durch eine Abbildung des Graphen einer solchen Funktion mit

$$a = 0{,}3,\ c = 0{,}063 \text{ und } k = 0{,}92$$

für die ersten 10 km (nach einem Kaltstart) dargestellt werden. Fertigen Sie eine **Zeichnung** des Graphen für die Broschüre an. In der Broschüre soll behauptet werden: "Der PKW verbraucht auf langen Strecken 6,3 Liter pro 100 km." Ist diese Behauptung mit der Grafik vereinbar? (**Begründen** Sie!)

b) Zur Motorschonung sollen kurze Fahrstrecken vermieden werden. Der PKW soll noch mindestens 5 km mit warm gelaufenem Motor fahren. Der Motor ist ab einem Verbrauch von 0,064 Liter pro km warm gelaufen. **Berechnen** Sie, wie viele Kilometer eine Fahrstrecke mindestens betragen sollte.

c) **Bestimmen** Sie den Funktionsterm $V(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ (in Abhängigkeit von a, c und k in zusammengefasster Form) und **zeichnen** Sie (in einem neuen Koordinatensystem) den zugehörigen Graphen für die speziellen Werte und $a = 0{,}3$, $c = 0{,}063$ und $k = 0{,}92$.
Erläutern Sie seinen Verlauf in Abhängigkeit von dem Graphen von f.

d) **Berechnen** Sie, wie viele Liter Benzin der PKW insgesamt für eine 2 km lange Strecke verbraucht

- nach einem Kaltstart,
- nachdem er bereits 8 km gefahren ist.

Interpretieren Sie die berechneten Werte geometrisch und **veranschaulichen** Sie die Werte in Ihrer Skizze von f.

Berechnen Sie, wie viele Liter Benzin der PKW auf den ersten 100 km verbraucht, wenn diese ohne Unterbrechung gefahren werden.

Berechnen Sie, wie viele Liter Benzin der PKW für 100 km verbraucht, wenn er immer nur Strecken von 2 km Länge zwischen Wohnung und Arbeitsplatz gefahren wird.

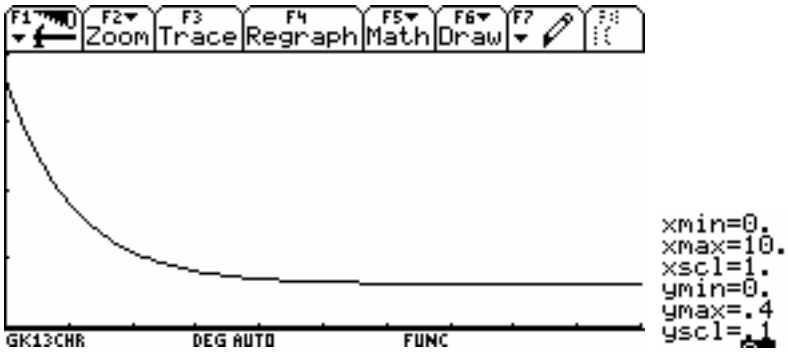
Vergleichen Sie den jeweiligen Benzinverbrauch.

e) **Erläutern** Sie, warum a, c und k positiv gewählt werden müssen, damit der oben angegebene allgemeine Funktionsterm geeignet sein kann, den Benzinverbrauch in Liter pro km nach einem Kaltstart zu beschreiben. Welchen Einfluss haben die (positiven) Werte der drei Parameter auf den Verlauf des Graphen?

f) **Bestimmen** Sie Werte für die Parameter a, c und k, so dass zu Beginn und auf lange Sicht der Literverbrauch pro km dem aus Aufgabenteil a) entspricht, aber der Verbrauch erst nach 10 km auf 0,064 Liter/km abgesunken ist.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen

Bemerkung: Ein CAS bringt bei dieser Aufgabe keine Vorteile, da die Rechnungen nicht aufwendig sind. Wachstums- und Zerfallsfunktionen sollen aus dem Unterricht bekannt sein. Die Schwierigkeit der Aufgabe liegt im Textverständnis und in der Umsetzung, nicht im Funktionstyp oder in den Berechnungen.

	Lösungsskizze	Bewertung/ Zuordnung		
		I	II	III
a)	 Die Einheiten (siehe Fenstereinstellungen) müssen in die Zeichnung integriert werden. Der Graph von f verläuft asymptotisch gegen $c = 0{,}063$ in l/km, schon nach 6 - 7 km pendelt sich der Verbrauch bei diesem Wert ein, das sind gerade 6,3 Liter pro 100 km.	3	1	
b)	Der Motor ist warm gelaufen, wenn gilt: $f(x) = 0{,}064 \Leftrightarrow 0{,}3e^{-0{,}92x} = 0{,}001 \Leftrightarrow e^{-0{,}92x} \approx 0{,}0033 \Leftrightarrow$ $x \approx \frac{\ln(0{,}0033)}{-0{,}92} \approx 6{,}2\,[km]$, zusammen mit der 5 km langen Fahrt bei warm gelaufenem Motor ergibt sich eine Gesamtstrecke von gut 11 km. Die Gleichung darf auch mit dem "solver" vom GTR oder mit CAS berechnet werden.	2		

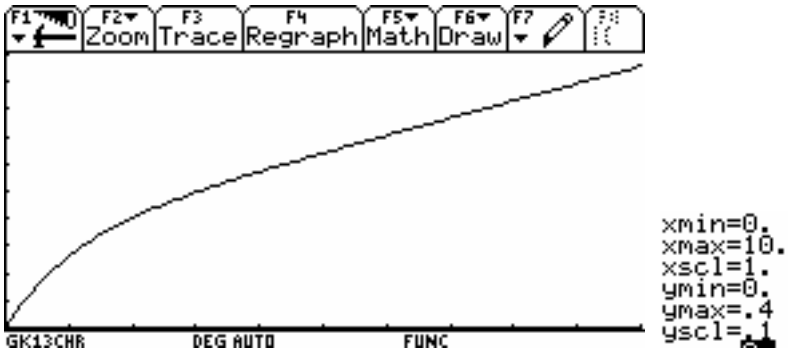
c)

$$V(x) = -\frac{a}{k}e^{-kx} + cx + d = -\frac{a}{k}e^{-kx} + cx + \frac{a}{k}$$

Da $\lim\limits_{x\to 0} V(x) = 0$ gelten muss, muss der Wert $d = \frac{a}{k}$ addiert werden, speziell:

$$V(x) = -0,326e^{-0,92x} + 0,063x + 0,362$$

Die Fenstereinstellungen müssen in die Zeichnung integriert werden:



Mögliche Erläuterungen:

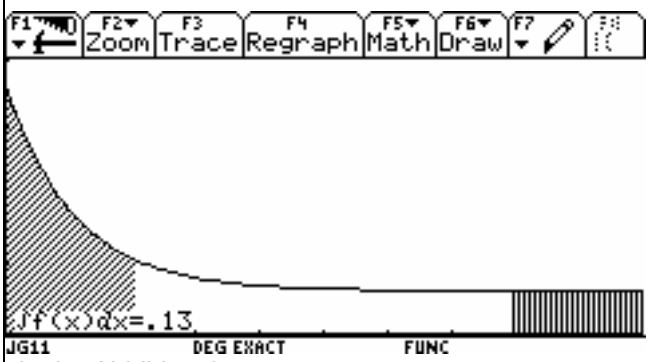
Da f die Ableitungsfunktion von V ist und die Werte von f anfänglich kleiner werden und dann praktisch konstant bleiben, muss die Steigung von V (von 0,363 auf 0,063) abnehmen und ab ca. $x = 6$ (warm gelaufener Motor) konstant werden, der Verbrauch ist dann linear. (Für große x erhält man die Gerade $g(x) = 0,063x + 0,326$ als Asymptote.)

Oder:

Da die Fläche unter dem Graphen von f monoton wächst, muss V eine monoton wachsende Funktion sein, da f für große x (fast) parallel zur x-Achse verläuft, muss V für große x (fast) linear verlaufen.

3 | 7

d)



$\int_0^2 f(x)dx \approx 0,40$, die Einheit vom Integral ist Liter, der Wert entspricht also dem Verbrauch auf den ersten 2 km nach dem Start. Geometrisch entspricht der Wert der Flächengröße unter dem Graphen (siehe Schraffur in der Abbildung).

Nach 8 km ist der Motor warm gelaufen, anschließend braucht man ca.

2·0,063≈0,13 oder $\int_8^{10} f(x)dx \approx 0,13$ Liter. Geometrisch ist das die entsprechende Fläche unter dem Graphen, durch Schraffur gekennzeichnet.

$\int_0^{100} f(x)dx \approx 6,63$, Verbrauch in Litern für die ersten 100 km.

Bei 0,40 l für die ersten 2 km verbraucht man für 100 km verteilt auf 50 dieser Kurzstreckenfahrten ca. 20 l, das ist gut das Dreifache des Verbrauchs bei einer Langstreckenfahrt.

4 | 4

e)	Eine mögliche Antwort: Nur für $k > 0$, also $-k < 0$, ist $g(x) = e^{-kx}$ eine fallende Exponentialfunktion. Ist $a > 0$, so bleibt dieser Verlauf generell erhalten und $g(x) = a \cdot e^{-kx}$ geht (bei positivem k) für große x-Werte (asymptotisch) gegen Null, die gegebene Funktion f also gegen den konstanten Summanden $c > 0$, der wie f die Einheit Liter pro km besitzen muss. c muss also so gewählt werden, dass es den Verbrauch in Liter pro km bei warm gelaufenem Motor angibt. a gibt in l/km den Verbrauch an, der zu Beginn zusätzlich benötigt wird. Dieser Verbrauch geht dann exponentiell gegen 0, wie schnell, das hängt von k ab.		3	2
f)	Da $a + c$ den Anfangs- und c den Langzeitverbrauch beschreiben, darf sich nur k verändern: $0{,}3e^{k\cdot(-10)} + 0{,}063 = 0{,}064 \Leftrightarrow 0{,}3e^{-10k} = 0{,}001 \Leftrightarrow e^{-10k} \approx 0{,}0033 \Leftrightarrow$ $k \approx -\frac{\ln(0{,}0033)}{10} \approx 0{,}57 \left[\frac{1}{km}\right]$. Je größer k, desto schneller erreicht der PKW seinen optimalen Verbrauch.		2	2
	Insgesamt 33 Bewertungseinheiten, verteilt auf die Anforderungsbereiche	**12**	**17**	**4**
	Prozentuale Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	36%	52%	12%

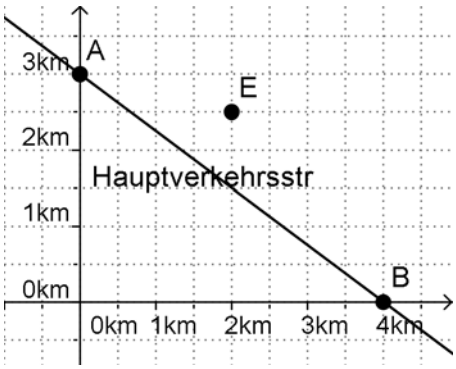
Allgemeine Bemerkungen zur Bewertung:

Die in c) abverlangte Erläuterung zum Funktionsverlauf soll den Schüler/innen auch dazu dienen, evtl. Fehler bei $V(x)$ aufzuspüren. Bemerkungen, die auf eine Unstimmigkeit zwischen der Skizze von V und dem sich aus der Abbildung von f ergebenden qualitativen Verlauf von V hinweisen, sollen positiv bewertet werden. Der Graph von V soll als vollständig richtig bewertet werden, wenn er den ermittelten Funktionsterm $V(x)$ korrekt darstellt, aber auch dann, wenn er die verlangte Stammfunktion von f qualitativ richtig wiedergibt, sofern deutlich wird, aus welcher Vorgabe der Graph gewonnen wurde.

Hilfsmittel: GTR oder GTR mit CAS oder TC, Formelsammlung
Vergessen Sie nicht, Ihre Eingaben zu protokollieren!

Aufgabe: **Umgehungsstraße**

Abbildung:



Durch eine Ortschaft führt zur Zeit eine geradlinige Hauptverkehrsstraße. Der Gemeinderat plant eine Umgehungsstraße vom Ortsanfang A zum Ortsende B (siehe Abbildung), die an einem Einkaufszentrum auf der grünen Wiese vorbeiführen soll. Sie soll durch den Punkt $E(2/2{,}5)$ geführt werden.

Die Umgehungsstraße soll natürlich in beiden Punkten mit "sanftem" Übergang in die alte Straße münden, d. h. der Graph der Umgehungsstraße soll mit dem der Hauptverkehrsstraße im Steigungs- und Krümmungsverhalten (also in ihrer 1. und 2. Ableitung) übereinstimmen.

a) **Bestimmen** Sie eine ganzrationale Funktion f geringsten Grades, welche alle Bedingungen, die an die Umgehungsstraße gestellt werden, erfüllt.

(Nur zur Kontrolle: $f(x) = -\frac{1}{64}x^6 + \frac{3}{16}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + x^3 - \frac{3}{4}x + 3$)

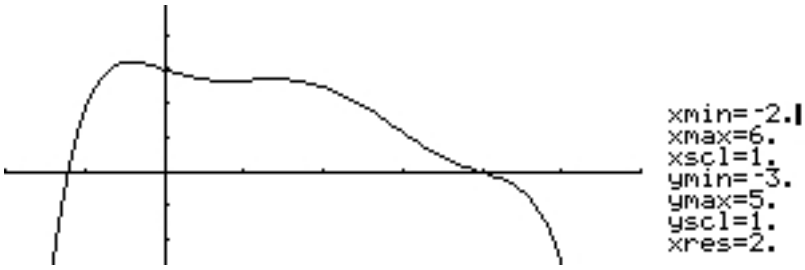
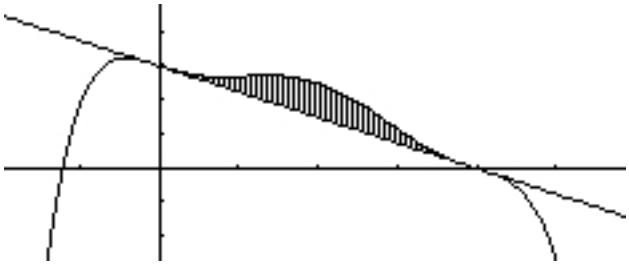
b) Die Funktion f soll jetzt unabhängig von der Problemstellung aus a) untersucht werden.
Zeichnen Sie den Graphen der Kontrollfunktion f so, dass **alle** Hoch-, Tiefpunkte, Wende-, Sattelpunkte sowie Nullstellen zu sehen sind; die Punkte bitte deutlich markieren und benennen.
Begründen Sie die Existenz der eingezeichneten Punkte und **begründen** Sie auch, warum es keine weiteren Hoch-, Tief- oder Wendepunkte außerhalb des von Ihnen gezeichneten Bereichs geben kann.

c) **Berechnen** Sie die Größe der Fläche, die von der ehemaligen Hauptverkehrsstraße und der Umgehungsstraße eingeschlossen wird. **Schraffieren** Sie die Fläche in Ihrer Zeichnung von b).

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen

Bemerkung: Einfache "Steckbriefaufgaben" sollten aus dem Unterricht bekannt sein, ebenso der Einsatz des TR für das Lösen Linearer Gleichungssysteme mit Matrizen. Die Schwierigkeit dieser Aufgabe liegt in dem TR-Bild des Graphen, das einen Sattelpunkt suggeriert.

	Lösungsskizze	Bewertung/ Zuordnung		
		I	II	III
a)	1. $g(x) = -\frac{3}{4}x + 3$ 2. Die Bedingungen führen auf die 7 Gleichungen: $f(0) = 3$, $f(4) = 0$, $f(2) = 2{,}5$, $f'(0) = -\frac{3}{4}$, $f'(4) = -\frac{3}{4}$, $f''(0) = 0$ und $f''(4) = 0$. 3. Damit das zugehörige LGS weder unter- noch überbestimmt ist, wird als Ansatz für $f(x)$ ein Funktionsterm 6. Grades gewählt: $f(x) = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ $f'(x) = 6a_6x^5 + 5a_5x^4 + 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$ $f''(x) = 30a_6x^4 + 20a_5x^3 + 12a_4x^2 + 6a_3x + 2a_2$ $f(0) = \quad a_0 = 3$ $f(4) = 4096a_6 + 1024a_5 + 256a_4 + 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + a_0 = 0$ $f(2) = 64a_6 + 32a_5 + 16a_4 + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = \frac{5}{2}$ $f'(0) = \quad a_1 = -\frac{3}{4}$ $f'(4) = 6144a_6 + 1280a_5 + 256a_4 + 48a_3 + 8a_2 + a_1 = -\frac{3}{4}$ $f''(0) = \quad a_2 = 0$ $f''(4) = 7680a_6 + 1280a_5 + 192a_4 + 24a_3 + 2a_2 = 0$ Mit der zugehörigen erweiterten 7x7-Matrix erhält man unter Verwendung der Zeilennormalform rref(): $f(x) = -\frac{1}{64}x^6 + \frac{3}{16}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + x^3 - \frac{3}{4}x + 3$ Alternativ: Setzt man $a_0 = 3$, $a_1 = -0{,}75$ und $a_2 = 0$ in die restlichen Gleichungen ein, so erhält man die zugehörige erweiterte 4x4-Matrix mit Zeilennormalform: road1 $\begin{bmatrix} 4096 & 1024 & 256 & 64 & 0 \\ 64 & 32 & 16 & 8 & 1 \\ 6144 & 1280 & 256 & 48 & 0 \\ 7680 & 1280 & 192 & 24 & 0 \end{bmatrix}$ rref(road1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/64 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. (Bei Verwendung von GTR müssen die Dezimalzahlen zur Kontrolle in Brüche rückverwandelt werden.)	6	10	

b)	Zeichnung des Funktionsgrafen:  Die Fenstereinstellungen müssen in die Zeichnung integriert werden. Bei der obigen Fenstereinstellung wird deutlich, dass auf den ersten rel. Hochpunkt ein rel. Tiefpunkt und dann wieder ein rel. Hochpunkt folgt (bei anderen Einstellungen, z. B. bei Verwendung der Standardeinstellung, könnte man auch nach dem Hochpunkt einen Sattelpunkt vermuten). Beim Einsatz von CAS mit solve (bei GTR über die geeigneten Möglichkeiten im Grafikdisplay) werden alle Nullstellen von f' und f'' bestimmt und abgeglichen: $f'(x) = -\frac{3}{32}x^5 + \frac{15}{16}x^4 - 3x^3 + 3x^2 - \frac{3}{4}$, $f''(x) = -\frac{15}{32}x^4 + \frac{15}{4}x^3 - 9x^2 + 6x$ Nullstellen von f': $x_{E1} \approx 0{,}41$, $x_{E2} \approx 0{,}82$, $x_{E3} \approx 0{,}14$ Nullstellen von f'': $x_{W1} = 0$, $x_{W2} = 4$ (waren bekannt) $x_{W3} \approx 1{,}11$, $x_{W4} \approx 2{,}89$. Da die Nullstellen der 1. und 2. Ableitungen verschieden sind, kann es keine Sattelstellen geben (die jeweilige hinreichende Bedingung für die Extrema ist erfüllt). Nach den drei Extrema mit den beiden Wendepunkten dazwischen folgen noch 2 weitere Wendepunkte, mehr als 4 Wendepunkte (4 Nullstellen einer Funktion 4. Grades) kann eine Funktion 6. Grades nicht besitzen, so dass zwischen $x_{\min} = -2$ und $x_{\max} = 5$ alle charakteristischen Punkte einschließlich der beiden Nullstellen erfasst wurden. Für x gegen $\pm\infty$ verläuft die Funktion f korrekterweise als Funktion 6. Grades mit negativem a_6 gegen $-\infty$. Die beiden Nullstellen, die drei Extrema und die 4 Wendepunkte müssen im Graphen markiert werden.	3	6	3
c)	f und g haben nur die beiden Punkte $A(0/3)$ und $B(4/0)$ gemeinsam. Die Flächengröße beträgt $A = \frac{64}{35} \approx 1{,}829$ qkm, im Taschenrechner über $y3(x) = f(x)$ und $y6(x) = g(x)$ ermittelt. $\int_0^4 (y3(x) - y6(x))dx$ 1.8286 $\int_0^4 (y3(x) - y6(x))dx$ 64/35 	4		
	Insgesamt 33 Bewertungseinheiten, verteilt auf die Anforderungsbereiche	**13**	**17**	**3**
	Prozentuale Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	39%	52%	9%

Hilfsmittel: GTR (auch mit CAS), oder TC mit CAS, Formelsammlung
Vergessen Sie nicht, Ihre Eingaben zu protokollieren!

Aufgabe: Untersuchungen zu den Weltkupferreserven

1966 betrug der Welt-Jahres-Kupferverbrauch $5{,}40$ Mio. Tonnen. Die jährliche Zuwachsrate für diese Größe betrug zu der Zeit ungefähr $4{,}6\%$. Diese Angaben wurden damals verwendet, um den Kupferverbrauch für die nachfolgenden Jahre zu prognostizieren.

a) Angesetzt wurde eine Funktionsvorschrift $f(t)$ für den Jahres-Kupfer-Verbrauch im t-ten Jahr nach 1966 ($t = 0$). Begründen Sie, in wie weit die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = 5{,}4 \cdot e^{0{,}045t} \text{ (in Mio. Tonnen Kupfer/Jahr)}$$

die Entwicklung modelliert. Berücksichtigen Sie dazu folgende Punkte:

- Herleitung des Terms aus den gegebenen Daten,
- zu Grunde liegende Annahmen,
- Grenzen der Modellierung.

Verwenden Sie für b) und c) die Modellierung durch $f(t)$.

b) **Bestimmen** Sie den Jahresverbrauch für das Jahr 2016.
Berechnen Sie die Verdopplungszeit.
Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Verdopplungszeit 3 weitere Punkte des Grafen und **skizzieren** Sie ihn für $0 \le t \le 50$.

c) Gegeben ist die Funktion F mit

$$F(t) = \int_0^t f(x)\,dx.$$

Berechnen Sie $F(5)$. **Interpretieren** Sie $F(5)$ auf das Problem bezogen.
Berechnen Sie ohne Integralrechnung einen entsprechenden Wert, d.h. einen Wert, der denselben Sachverhalt erfasst.

Vergleichen Sie die beiden verschieden ermittelten Werte und **beurteilen** Sie beide Verfahren.

d) Man macht solche Prognosen, um vorauszusagen, wann Vorräte erschöpft sind.
Zu Beginn des Jahres 1966 konnte man von 600 Mio. Tonnen an Kupferreserven ausgehen.

Untersuchen Sie die Zeiträume, die der Vorrat ausreicht, unter folgenden drei unterschiedlichen Annahmen:

- bei gleich bleibendem jährlichen Verbrauch von $5{,}4$ Mio. Tonnen,
- bei einem jährlichen schon oben verwendeten Verbrauchszuwachs von $4{,}6\%$ ab 1966,
- bei einer jährlichen Absenkung des Verbrauchs um $0{,}5\%$ ab 1966.

e) **Erstellen** Sie eine passende Frage zu folgender Gleichung, die im obigen Sachzusammenhang steht:

$$F(x) = \int_0^x 5{,}4 \cdot 0{,}99^t\,dt = 600.$$

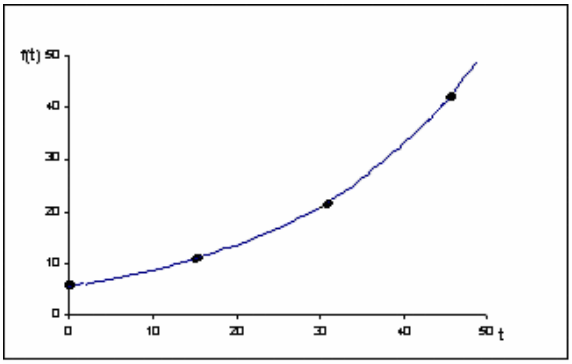
Untersuchen Sie die Gleichung hinsichtlich ihrer Lösungsmenge. **Interpretieren** Sie ihre Ergebnisse auf das Problem bezogen.

Veranschaulichen Sie die Situation mit Hilfe eines Diagramms.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen

Bemerkung

Die Aufgabenstellung ist für alle Schüler und Schülerinnen gleich, da das Verwenden von grafikfähigen Taschenrechnern und CAS-Rechnern aufwändig ist und viel Sachverstand erfordert und damit der Vorteil des geringeren Rechenaufwands hinreichend ausgeglichen wird.

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung/ Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Zuwachs von $4,6\%$ pro Jahr bedeutet Anwachsen um Faktor $1,046$ pro Jahr, d.h. $f(t) = 5,4 \cdot 1,046^t = 5,4 \cdot e^{\ln 1,046 \cdot t} \approx 5,4 \cdot e^{0,045 \cdot t}$ könnte als Herleitung gelten.
Zur Beurteilung des Modells z.B.
● Konstanzannahme ist idealisierend,
● Prognosezeiträume nur zeitnah zum Jahr 1966,
● Begrenzung des Wachstums durch Endlichkeit der Ressourcen.</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$f(50) = 5,4 \cdot e^{0,045 \cdot 50} \approx 51,23$ (Mio.t); Verdopplungszeit $t_d \approx \ln 2 / 0,045 \approx 15,4$ (Jahre).
 

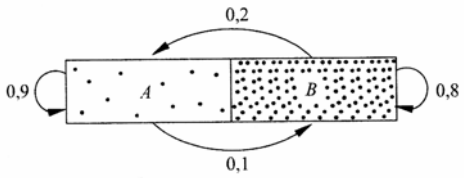
Wertepaare mit Hilfe von t_d gebildet:
<table><tr><th>t</th><th>$f(t)$</th></tr><tr><td>0</td><td>$5,4$</td></tr><tr><td>$15,4$</td><td>$10,8$</td></tr><tr><td>$30,8$</td><td>$21,6$</td></tr><tr><td>$46,2$</td><td>$43,2$</td></tr></table></td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$\int_0^5 f(t)\,dt = \left[5,4/0,045 \cdot e^{0,045t}\right]_0^5 \approx 30,28$ (Mio. Tonnen Gesamtverbrauch an Kupfer von 1966 bis Ende 1970).
Die entsprechende Schraffur muss in die Skizze von b) eingetragen werden.
Die Ermittlung des Gesamtverbrauchs als Summe der Jahresverbrauchsmengen von 1966-1970:
$5,4 + 5,4 \cdot e^{0,045} + 5,4 \cdot e^{0,045 \cdot 2} + 5,4 \cdot e^{0,045 \cdot 3} + 5,4 \cdot e^{0,045 \cdot 4} \approx 29,6$ (Mio. Tonnen).
Dieser Wert ist kleiner als der Wert, der über die Integralrechnung gewonnen wurde. Ein grafischer Vergleich mit Hilfe der Flächeninhalte der Rechtecke, die für die Jahresverbräuche im obigen Grafen eingezeichnet werden könnten, macht den Unterschied plausibel und lässt zusätzlich zur Rechnung den Integralwert als Näherungswert erkennen.</td><td>2</td><td>4</td><td>1</td></tr>
</table>

d)	Bei gleichbleibendem Verbrauch wären die 600 Mio.t nach $600:5,4\approx 111$ Jahren verbraucht. Bei dem jährlichen Verbrauchszuwachs von $4,6\%$ ab 1966 führt $600=\int_0^x f(t)\,dt=\left[\frac{5,4}{0,045}\cdot e^{0,045t}\right]_0^x=120\cdot\left(e^{0,045x}-1\right)$ zu $x=\ln(600/120+1)/0,0045\approx 39,8$ (Jahre), Ende 2005 würde es zu einer Erschöpfung der Reserven gekommen sein. (Bei geeignetem TR darf die Gleichung mit dem Solver gelöst werden.) Bei einer jährlichen Absenkung des Verbrauchs um $0,5\%$ ab 1966 führt $\int_0^x 5,4\cdot 0,995^t\,dt=\left[\frac{5,4}{\ln(0,995)}\cdot e^{\ln 0,995t}\right]_0^x\approx -1077,3\left(e^{-0,005x}-1\right)=600$ zu $x\approx\ln(600/-1077,3+1)/-0,005\approx 162,8$ (Jahre), d.h. im Jahre 2128 käme es zur Erschöpfung.	5	4	2
e)	Eine mögliche Fragestellung: Wie viele Jahre reichen die Kupferreserven von 600 Mio. Tonnen, wenn man davon ausgeht, dass im Anfangsjahr 5,4 Mio. Tonnen verbraucht werden und von Jahr zu Jahr eine Verbrauchsreduktion um 1% erfolgt? $F(x)=\int_0^x 5,4\cdot 0,99^t\,dt=600$ hat keine Lösung, da $x=\ln(600/(5,4/\ln 0,99)+1)/\ln 0,99$ nicht existiert, da $600/(5,4/\ln 0,99)+1<0$ ist. Als Erklärungen können, neben diesem formalen Grund, Betrachtungen zum Grenzverhalten der Verbrauchsfunktion F, rechnerisch und grafisch am Grafen von F erklärt, hinzugezogen werden. $\lim_{x\to\infty}F(x)=5,4/\ln 0,99\approx 537,3$ (Mio. t), da $e^{\ln 0,99x}$ für $x\to\infty$ gegen 0 strebt., d.h. hätte man eine solche Verbrauchsreduktion dauerhaft erwirkt, würde der gesamte Verbrauch die Menge von etwa 540 Mio. t Kupfer niemals übertreffen.	2	4	1
	Insgesamt 33 Bewertungseinheiten, verteilt auf die Anforderungsbereiche	**13**	**16**	**4**
	Prozentuale Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	39%	49%	12%

Hilfsmittel: GTR (auch mit CAS) oder TC, Formelsammlung
Vergessen Sie nicht, Ihre Eingaben zu protokollieren!

Aufgabe: Untersuchungen zum Diffusionsprozess

Diffusion ist die durch thermische Bewegung verursachte Verteilung der Moleküle eines Stoffes in einem anderen. Wir betrachten als Beispiel für einen solchen Vorgang das folgende vereinfachte Modell einer Diffusion.



Diffusion zwischen A und B

Ein mit 12000 Molekülen gefüllter Kasten ist durch eine durchlässige Wand in zwei Hälften A, B geteilt. Wir betrachten die Verteilung der Moleküle auf die beiden Hälften jeweils nach Ablauf einer festen Zeiteinheit: 10% der Moleküle in A sind nach B gelangt (die restlichen 90% bleiben in A) und 20% der Moleküle in B sind nach A gelangt (die restlichen 80% bleiben in B). Zu Beginn der Untersuchung sind $x_0 = 3000$ Moleküle in A und $y_0 = 9000$ in B. Es soll untersucht werden, wie sich die anfängliche Verteilung der zusammen 12000 Moleküle auf die beiden Hälften entwickelt.

a) **Begründen** Sie, dass die Übergangs-Matrix $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$ diesen Diffusionsprozess beschreibt und **berechnen** Sie, ausgehend von $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3000 \\ 9000 \end{pmatrix}$, die Verteilungen $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ nach einer bzw. zwei Zeiteinheiten.

b) **Berechnen** Sie die so genannte stationäre Verteilung $\vec{v}_s = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $M * \vec{v}_s = \vec{v}_s$ und $x + y = 12000$, sofern diese existiert.

c) Für die Verteilung $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ nach n Zeiteinheiten gilt: $x_n = 0,7x_{n-1} + 2400$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Leiten Sie diese Berechnungsformel und eine entsprechende für y_n ($n \in \mathbb{N}^*$) her und **berechnen** Sie den jeweiligen Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.
Interpretieren Sie die beiden Grenzwerte im Zusammenhang mit b).

d) **Zeichnen** Sie in ein Koordinatensystem die Punkte P_i mit $\overrightarrow{OP_i} = \vec{v}_i$, $i = 0,1,2,3$, und P mit $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 8000 \\ 4000 \end{pmatrix}$. **Zeigen** Sie, dass die Punkte P_i auf einer gemeinsamen Geraden g liegen. **Geben** Sie die Gleichung der Geraden g **an**, sowohl als Funktionsvorschrift $g(x) = mx + b,\ x \in \mathbb{R}$, als auch in Parameterdarstellung $g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u},\ r \in \mathbb{R}$. Welche Ergebnisse von b) und c) werden in dieser Zeichnung veranschaulicht (**begründen Sie!**)?

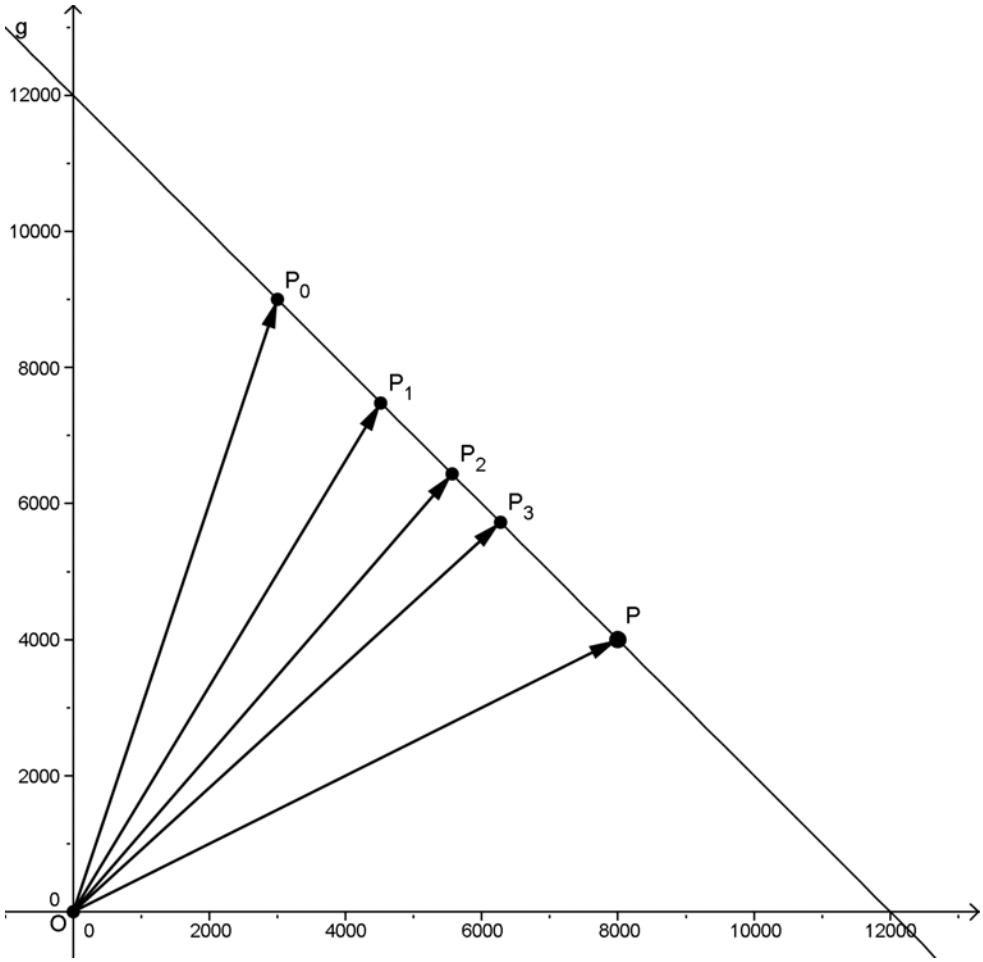
Das Beispiel mit der Abbildung wurde entnommen aus:
Kroll u.a.: Analytische Geometrie / Lineare Algebra, Grund- und Leistungskurs, Dümmler Verlag 1997

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen

Bemerkung: Ein CAS bringt bei dieser Aufgabe keine wesentlichen Vorteile, TR mit Matrizenkalkül können einige Aufgabenteile schneller erledigen, allerdings erfordert dies z. B. bei Teil b) detaillierte Kenntnisse im Umgang mit erweiterten Matrizen.
Einige Aufgabenteile lassen sich ohne Vorkenntnisse elementar lösen.
Das Aufstellen von Übergangsmatrizen soll aus dem Unterricht bekannt sein.

	Lösungsskizze	Bewertung/ Zuordnung		
		I	II	III
a)	Begründung für die Korrektheit der Matrix: Bei Matrix-Vektor Multiplikation muss in der ersten Komponente vom Ergebnisvektor die Anzahl der Moleküle in A und in der zweiten die in B stehen: $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 \cdot x_{n-1} + 0,2 \cdot y_{n-1} \\ 0,1 \cdot x_{n-1} + 0,8 \cdot y_{n-1} \end{pmatrix}$ Daraus ergibt sich $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = M * \begin{pmatrix} 3000 \\ 9000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4500 \\ 7500 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = M * \begin{pmatrix} 4500 \\ 7500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5550 \\ 6450 \end{pmatrix}$.	3	3	
b)	Für eine stationäre Verteilung $\vec{v}_s = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit Gesamtanzahl $x + y = 12000$ muss gelten $M * \vec{v}_s = \vec{v}_s$: $\left[\begin{matrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,8 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ x + y = 12000 \end{matrix}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} 0,9x + 0,2y = x \\ 0,1x + 0,8y = y \\ x + y = 12000 \end{matrix}\right] \Leftrightarrow$ $\left[\begin{matrix} -0,1x + 0,2y = 0 \\ 0,1x - 0,2y = 0 \\ y = 12000 - x \end{matrix}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} -0,1x + 0,2y = 0 \\ 0 = 0 \\ y = 12000 - x \end{matrix}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} y = 0,5x \\ y = 12000 - x \end{matrix}\right]$ $\Leftrightarrow \left[\begin{matrix} y = 0,5x \\ 0 = 12000 - 1,5x \end{matrix}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} y = 0,5x \\ x = 8000 \end{matrix}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} y = 4000 \\ x = 8000 \end{matrix}\right]$ $\vec{v}_s = \begin{pmatrix} 8000 \\ 4000 \end{pmatrix}$ ist die stationäre Verteilung. *Bemerkung: Das LGS darf auch über eine erweiterte Matrix mit dem TR gelöst werden.*	6		

c)	Die beiden Folgen lassen sich "entkoppeln", für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt: $\left.\begin{array}{l} x_n = 0{,}9 \cdot x_{n-1} + 0{,}2 \cdot y_{n-1} \\ y_n = 0{,}1 \cdot x_{n-1} + 0{,}8 \cdot y_{n-1} \end{array}\right\} x_n + y_n = x_{n-1} + y_{n-1} = \ \ldots = x_0 + y_0 = 12000 \Rightarrow$ $x_{n-1} = x_0 + y_0 - y_{n-1}$ und $y_{n-1} = x_0 + y_0 - x_{n-1}$ $x_n = 0{,}9 \cdot x_{n-1} + 0{,}2 \cdot y_{n-1} = 0{,}9 \cdot x_{n-1} + 0{,}2 \cdot (x_0 + y_0 - x_{n-1})$ $= 0{,}7 \cdot x_{n-1} + 0{,}2 \cdot (x_0 + y_0) = 0{,}7 \cdot x_{n-1} + 2400$ $y_n = 0{,}1 \cdot x_{n-1} + 0{,}8 \cdot y_{n-1} = 0{,}1 \cdot (x_0 + y_0 - y_{n-1}) + 0{,}8 \cdot y_{n-1}$ $= 0{,}7 \cdot y_{n-1} + 0{,}1 \cdot (x_0 + y_0) = 0{,}7 \cdot y_{n-1} + 1200$ *1. Lösungsansatz über Iterationsfolgen:* $\langle x_n \rangle$ bzw. $\langle y_n \rangle$ sind somit rekursiv definierte Iterationsfolgen mit der linearen Iterationsfunktion g_1 mit $g_1(x) = 0{,}7x + 2400$ bzw. g_2 mit $g_2(x) = 0{,}7x + 1200$. Da in beiden Fällen die Steigung kleiner 1 ist, ist der jeweilige Fixpunkt ($x_1{}^* = 8000$ bzw. $x_2{}^* = 4000$) attraktiv und die Folgen konvergieren dagegen. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 8000$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 4000$. *2. äquivalenter Lösungsansatz über geometrische Reihen und deren expliziter Darstellung:* $x_n = 0{,}7 \cdot x_{n-1} + 2400 = 0{,}7(0{,}7x_{n-2} + 2400) + 2400 = \ldots.$ $= 0{,}7^n \cdot 3000 + 2400 \cdot \sum\limits_{k=0}^{n-1} 0{,}7^k = 0{,}7^n \cdot 3000 + 2400 \dfrac{1 - 0{,}7^n}{0{,}3}$ $= 0{,}7^n \cdot 3000 + 8000 \cdot (1 - 0{,}7^n) = 0{,}7^n \cdot (-5000) + 8000$ $y_n = 0{,}7 \cdot y_{n-1} + 1200 = 0{,}7 \cdot (0{,}7y_{n-2} + 1200) + 1200 = \ldots.$ $= 0{,}7^n \cdot 9000 + 1200 \cdot \sum\limits_{k=0}^{n-1} 0{,}7^k = 0{,}7^n \cdot 9000 + 1200 \cdot \dfrac{1 - 0{,}7^n}{0{,}3}$ $= 0{,}7^n \cdot 9000 + 4000 \cdot (1 - 0{,}7^n) = 0{,}7^n \cdot 5000 + 4000$ Nach den bekannten Sätzen über geometrische Folgen ergeben sich die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 8000$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 4000$. Die stationäre Verteilung ist somit auch die Grenzverteilung. Die Verteilung pendelt sich bei 8000 Molekülen in A und 4000 in B ein.		8	4

d)	Da für die Punkte $P_i(x_i \mid y_i)$ gilt: $x_i + y_i = 12000$, liegen sie auf der Geraden mit der Gleichung $g(x) = -x + 12000$. In der Parameterdarstellung kann $P(8000 \mid 4000)$ für den Ortsvektor und $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Richtungsvektor verwendet werden: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8000 \\ 4000 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$.  Aus der Zeichnung wird bereits deutlich, dass die Punktfolge auf den Punkt P zuläuft, was in c) durch Berechnung des Grenzwertes als stationäre Verteilung gezeigt wurde.	4	4	
	Insgesamt 32 Bewertungseinheiten, verteilt auf die Anforderungsbereiche	**13**	**15**	**4**
	Prozentuale Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	41%	47%	13%

Hilfsmittel: GTR (auch mit CAS) oder TC, Formelsammlung
Vergessen Sie nicht, Ihre Eingaben zu protokollieren!

Hinweis: Geben Sie stets Ihre Ergebnisse auf drei Nachkommastellen gerundet an.

Aufgabe: Untersuchungen zur Buchstabenverteilung

Sprachwissenschaftler beschäftigen sich unter anderem mit typischen Eigenschaften von Sprachen, dazu gehört auch die Abfolge von Konsonanten und Vokalen in einer Sprache. In einem Roman folgt auf einen Konsonanten in 48% der Fälle wieder ein Konsonant, auf einen Vokal in 17% der Fälle wieder ein Vokal; Interpunktionen und Zwischenräume werden nicht beachtet.

a) Betrachten Sie die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0,480 & 0,830 \\ 0,520 & 0,170 \end{pmatrix}$ im Zusammenhang zur oben beschriebenen Abfolge.

Erstellen Sie dazu das entsprechende Übergangsdiagramm.
Interpretieren Sie die Werte $0,520$ und $0,830$ in diesem Zusammenhang.

b) In einem Roman wird eine beliebige Stelle herausgegriffen; der ausgewählte Buchstabe ist ein Vokal.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass

- der erste nachfolgende Buchstabe wieder ein Vokal ist,
- der zweite nachfolgende Buchstabe wieder ein Vokal ist.

Begründen Sie, dass es sinnvoll ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Startvektor zu benutzen?

c) **Erläutern** Sie die Bedeutung der Ergebnisse bei (1) und (2):

(1) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0,480 & 0,830 \\ 0,520 & 0,170 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,480 \\ 0,520 \end{pmatrix}$

(2) $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0,480 & 0,830 \\ 0,520 & 0,170 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0,480 \\ 0,520 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,662 \\ 0,338 \end{pmatrix}$

Welche **Vermutung** ergibt sich aus den weiteren Rechnungen?

(3) $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0,480 & 0,830 \\ 0,520 & 0,170 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0,662 \\ 0,338 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,598 \\ 0,402 \end{pmatrix}$

(4) $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0,480 & 0,830 \\ 0,520 & 0,170 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0,598 \\ 0,402 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,621 \\ 0,379 \end{pmatrix}$

(5) …

(6) …

(7) $\vec{v}_7 = \begin{pmatrix} 0,480 & 0,830 \\ 0,520 & 0,170 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0,616 \\ 0,384 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,615 \\ 0,385 \end{pmatrix}$

(8) $\vec{v}_8 = \begin{pmatrix} 0,480 & 0,830 \\ 0,520 & 0,170 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0,615 \\ 0,385 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,615 \\ 0,385 \end{pmatrix}$

d) **Zeigen** Sie, dass es zu M eine stationäre Verteilung $\vec{v}_s = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $M * \vec{v}_s = \vec{v}_s$ und $x + y = 1$ gibt und **berechnen** Sie diese. **Vergleichen** Sie diese mit den Ergebnissen unter c).

e) **Skizzieren** Sie für $\vec{v}_s = \begin{pmatrix} 0,615 \\ 0,385 \end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Gerade $g: \vec{x} = \vec{v}_s + r \cdot \vec{u}$, $r \in \mathbb{R}$. (1 LE mind. 5 cm)

Zeigen Sie: Jeder Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \end{pmatrix}$ mit $x_w + y_w = 1$ erfüllt die Geradengleichung von g.

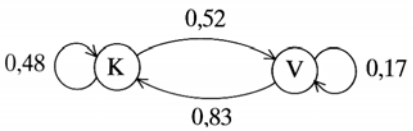
Berechnen Sie r_1, so dass für den Vektor $\vec{v}_1$ aus c) gilt: $\vec{v}_1 = \vec{v}_s + r_1 \cdot \vec{u}$.
Tragen Sie die ersten drei Vektoren aus c) als Ortsvektoren in Ihre **Skizze** ein.

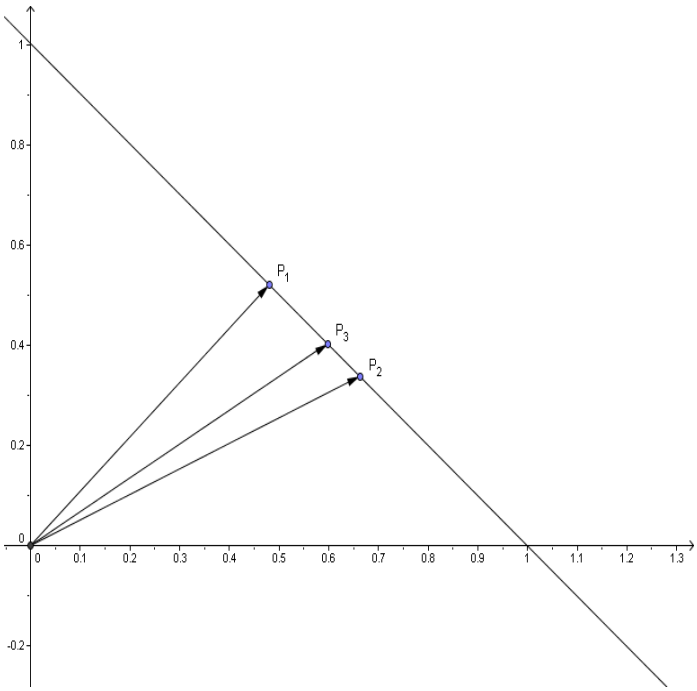
f) **Zeigen** Sie: Für jedes $\vec{w}$ mit $\vec{w} = \vec{v}_s + r \cdot \vec{u}$ gilt: $M * \vec{w} = \vec{v}_s + (-0,35) \cdot r \cdot \vec{u}$. **Erläutern** Sie die Bedeutung folgender Gleichungen für die Folge $\vec{v}_n$ der Verteilungen aus c)
$M^2 * \vec{w} = \vec{v}_s + (-0,35)^2 \cdot r \cdot \vec{u}$, $M^3 * \vec{w} = \vec{v}_s + (-0,35)^3 \cdot r \cdot \vec{u}$, ... , $M^n * \vec{w} = \vec{v}_s + (-0,35)^n \cdot r \cdot \vec{u}$ und
die Bedeutung der Komponenten von $\vec{v}_s = \begin{pmatrix} 0,615 \\ 0,385 \end{pmatrix}$ für die Verteilung der Buchstaben in dem Roman.

Quelle: Elemente der Mathematik, Stochastik, Schroedel 2003, S.281 mit Formulierungsänderungen und ergänzenden Aufgabenteilen.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen

Bemerkung: Die Aufgabenstellung ist für alle Schülerinnen und Schüler gleich, da das Verwenden von grafikfähigen Taschenrechnern und CAS-Rechnern aufwändig ist und viel Sachverstand erfordert und damit der Vorteil des geringeren Rechenaufwandes hinreichend ausgeglichen wird.

	Lösungsskizze	Bewertung/ Zuordnung		
		I	II	III
a)	*Übergangsdiagramm*  Einem Vokal folgt in 83% der Fälle ein Konsonant und einem Konsonanten folgt in 52% der Fälle ein Vokal.	2	2	
b)	Da der ausgewählte Buchstabe ein Vokal ist, liegt hier der Startvektor $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vor. Hiermit werden die weiteren Zustandsvektoren (auf 3 Dezimalstellen) genau berechnet: $M * \vec{v}_0 = \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}830 \\ 0{,}170 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_2 = M * \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}540 \\ 0{,}460 \end{pmatrix}$. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 17% ist der 1. folgende Buchstabe wieder ein Vokal. Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 46% ist der 2. folgende Buchstabe ein Vokal.	5	2	
c)	Das sind, wie unter b), die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten eines Konsonanten bzw. Vokals, wenn der erste ausgewählte Buchstabe ein Konsonant ist. Die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten eines Konsonanten bzw. eines Vokals scheinen sich auf einen (Grenz-)Wert nahe $0{,}615$ bzw. $0{,}385$ einzupendeln.	2		
d)	Gesucht ist ein Zustandsvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit der Eigenschaft $\begin{pmatrix} 0{,}480 & 0{,}830 \\ 0{,}520 & 0{,}170 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Dies ist ein Gleichungssystem mit den beiden Variablen x und y $0{,}480x + 0{,}830y = x \qquad -0{,}520x + 0{,}830y = 0$ $0{,}520x + 0{,}170y = y \qquad 0{,}520x - 0{,}830y = 0$ das auf zwei identische Gleichungen führt. Es ist jedoch zu beachten, dass $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ein Zustandsvektor ist, d.h. es gilt $x + y = 1$. Hiermit ergibt sich dann die Lösung mit $x = 0{,}615$ und $y = 0{,}385$ als Komponenten der stationären Verteilung, die gleich den unter c) vermuteten Grenzwerten der Wahrscheinlichkeiten sind.	1	4	

e)	 Durch Einsetzen der von $x_w = 0{,}615 - r$ in $y_w = 1 - x_w$ erhält man $1 - 0{,}615 + r = 0{,}385 + r$. Für $r_1 = 0{,}135$ gilt $\vec{v}_1 = \vec{v}_s + 0{,}135 \cdot \vec{u}$.	3	3	
f)	Die Übergangsmatrix M wirkt auf irgendeinen Vektor $\vec{w}$ der Geraden g: Für sein Bild $\vec{w}'$ gilt wegen $M \cdot \vec{v}_s = \vec{v}_s$ und $M \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -0{,}35 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\vec{w}' = \vec{v}_s + (-0{,}35) \cdot r \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, r \in R$. Die auf der Geraden g liegenden $\vec{v}_n$ streben für $n \to \infty$ gegen die stationäre Verteilung $\vec{v}_s$, da $(-0{,}35)^n$ gegen 0 strebt. Die Komponenten von $\vec{v}_s$ geben an, wie Konsonanten und Vokale insgesamt im Text verteilt sind.		6	3
	Insgesamt 33 Bewertungseinheiten, verteilt auf die Anforderungsbereiche	**13**	**17**	**3**
	Prozentuale Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	39%	52%	9%

Hilfsmittel: GTR (auch mit CAS) oder TC, Formelsammlung
Vergessen Sie nicht, Ihre Eingaben zu protokollieren!

Aufgabe: Geraden, Ebenen und Flugzeuge

Teil I

Im $\mathbb{R}^3$ sind die beiden Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) **Zeigen** Sie, dass g und h windschief sind.

b) **Zeigen** Sie: Es gibt zwei parallele Ebenen E_1 und E_2, so dass g in E_1 und h in E_2 liegen. **Geben** Sie die Gleichungen von E_1 und E_2 in Normalenform an. **Bestimmen** Sie den Abstand der Ebenen E_1 und E_2.

c) **Zeigen** Sie, dass der Punkt $P(-\frac{307}{150} \mid \frac{68}{75} \mid \frac{239}{75})$ auf g liegt und der Punkt $Q(-\frac{83}{50} \mid -\frac{61}{50} \mid \frac{111}{50})$ auf h liegt. **Zeigen** Sie, dass der Abstand zwischen P und Q gleich dem Abstand der Ebenen E_1 und E_2 ist.

d) **Beschreiben** Sie, wie man die in Aufgabenteil c) genannten Punkte P und Q rechnerisch ermitteln kann.

Teil II

Zwei Flugzeuge bewegen sich auf geradlinigen Bahnen. Zu einem bestimmten Zeitpunkt ($t = 0$ Minuten) durchfliegt Flugzeug 1 den Punkt $(2{,}3 \mid 7{,}9 \mid 0{,}26)$, Flugzeug 2 den Punkt $(189 \mid 166{,}3 \mid 4{,}75)$. Nach einer Minute befindet sich Flugzeug 1 im Punkt $(5{,}6 \mid 13{,}2 \mid 0{,}52)$, Flugzeug 2 im Punkt $(179 \mid 157{,}9 \mid 4{,}5)$. (Alle Koordinaten in km.)

e) **Berechnen** Sie die Geschwindigkeiten der beiden Flugzeuge.

f) Die Punkte $R(4{,}315 \mid 11{,}136 \mid 0{,}419)$ auf Flugbahn 1 und $S(4{,}305 \mid 11{,}157 \mid 0{,}133)$ auf Flugbahn 2 sind diejenigen Punkte auf beiden Flugbahnen, die minimale Entfernung haben. **Ermitteln** Sie, wann die beiden Flugzeuge jeweils diese Punkte erreichen.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen

Bemerkung: Die Aufgabenstellung ist für alle Schülerinnen und Schüler gleich, da das Verwenden von grafikfähigen Taschenrechnern und CAS-Rechnern aufwändig ist und viel Sachverstand erfordert und damit der Vorteil des geringeren Rechenaufwandes hinreichend ausgeglichen wird.

	Lösungsskizze	Bewertung/ Zuordnung		
		I	II	III
a)	Nachweis der Windschiefheit.	1	3	
b)	$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + s_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, in Normalenform: $E_1: 2x - 11y - 5z = -30$, $E_2: 2x - 11y - 5z = -1$. $d = \dfrac{\left\lvert \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix} \right) \right\rvert}{\left\lvert \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rvert} = \dfrac{29 \cdot \sqrt{6}}{30} \approx 2{,}37$.	3	7	
c)	$P(-\frac{307}{150} \mid \frac{68}{75} \mid \frac{239}{75})$ liegt auf g ($r = -\frac{7}{150}$), $Q(-\frac{83}{50} \mid -\frac{61}{50} \mid \frac{111}{50})$ liegt auf h ($s = -\frac{61}{50}$). Es gilt $\lvert \overrightarrow{PQ} \rvert = \dfrac{29 \cdot \sqrt{6}}{30}$.	4	2	
d)	Der Differenzvektor der Ortsvektoren der Punkte minimaler Entfernung steht auf beiden Geraden senkrecht. Der Ansatz $(\vec{b} + s \cdot \vec{v} - \vec{a} - r \cdot \vec{u}) * \vec{u} = 0$ bzw. $(\vec{b} + s \cdot \vec{v} - \vec{a} - r \cdot \vec{u}) * \vec{v} = 0$ führt auf ein lineares Gleichungssystem für λ und μ. Nach Berechnen von λ und μ und Einsetzen in die Geradengleichungen erhält man die Punkte minimaler Entfernung.			3
e)	Flugzeug 1: $6{,}249 \frac{\text{km}}{\text{min}} = 374{,}9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$; Flugzeug 2: $13{,}062 \frac{\text{km}}{\text{min}} = 783{,}7 \frac{\text{km}}{\text{h}}$	3	3	
f)	Flugzeug 1 erreicht R nach $0{,}61$ Minuten. Flugzeug 2 erreicht S nach $18{,}47$ Minuten.	2	2	
	Insgesamt 33 Bewertungseinheiten, verteilt auf die Anforderungsbereiche	**13**	**17**	**3**
	Prozentuale Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	39%	52%	9%

Hilfsmittel: GTR oder GTR mit CAS oder TC, Formelsammlung
Vergessen Sie nicht, Ihre Eingaben zu protokollieren!

Aufgabe: Auswertungen von Radarmessungen

Eine verkehrsreiche Straße verleitet an einer bestimmten Stelle zum Schnellfahren. Deshalb wurde dort eine versteckte Radarmessanlage installiert, welche die Geschwindigkeit aller vorbeifahrenden Autos misst und registriert. Von allen vorbeifahrenden Autos sei p der Anteil der „Raser", d. h. der Anteil der Autos, die mit deutlich überhöhter Geschwindigkeit fahren. Man weiß, dass p≈20% beträgt.

a) **Erläutern** Sie, unter welchen Annahmen über die Verkehrs- und Messbedingungen man diese Situation als einen mehrstufigen Bernoulli-Versuch auffassen kann.
Gehen Sie bei den folgenden Aufgabenteilen von einem mehrstufigen Bernoulli-Versuch aus.

b) **Bestimmen** Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass bei 10 Messungen

- genau 3 „Raser" ermittelt werden,
- nicht mehr als 4 „Raser" ermittelt werden.

Um die Raserquote zu senken, werden probeweise Warnschilder der Verkehrswacht aufgestellt. An Hand einer Zufallsstichprobe von 100 Autos soll nun getestet werden, ob diese Maßnahmen zu einer signifikanten Senkung der Raserquote geführt haben.

Man benutzt zunächst folgende Entscheidungsregel:

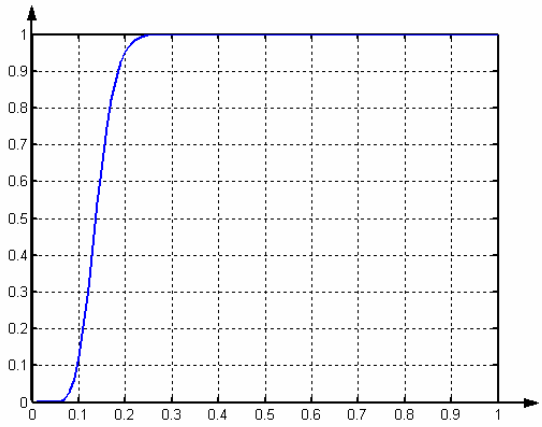
„Falls unter den 100 Gemessenen höchstens 16 Raser ermittelt werden, haben die Warnschilder zu einer signifikanten Senkung der Raserquote geführt."

c) **Berechnen** und **interpretieren** Sie die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art.
Ermitteln Sie, wie die Entscheidungsregel geändert werden muss, damit der Fehler 1. Art höchstens 5% beträgt. **Begründen** Sie Ihre Angabe mit einer geeigneten Sigma-Umgebung.-

d) Gehen Sie nun von der folgenden Entscheidungsregel aus:

(*) „Falls unter den 100 Gemessenen höchstens 13 Raser ermittelt werden, haben die Warnschilder zu einer signifikanten Senkung (auf dem 5% Niveau) der Raserquote geführt."

- **Berechnen** Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art bei der Entscheidungsregel (*), falls die Raserquote durch die Maßnahme tatsächlich auf $p_1 = 1/6$ gesenkt wurde. **Interpretieren** Sie das Ergebnis.
- Der Graph zeigt die zugehörige Operationscharakteristik.
Erläutern Sie den Zusammenhang von Operationscharakteristik und Fehler 2. Art.
Leiten Sie die Zuordnungsvorschrift **her**.
- **Beschriften** Sie die Achsen. **Interpretieren** Sie den Verlauf des Graphen. Teilen Sie hierfür die x-Achse in drei geeignete Abschnitte ein.



Quelle: Schriftliche Abiturprüfung Mathematik, Hinweise und Beispiele zu den zentralen schriftlichen Prüfungsaufgaben, Hamburg, Grundkurs Stochastik, Aufgabe 11; abgewandelt und umformuliert.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen

Bemerkung: Die Aufgabenstellung ist für alle Schüler/innen gleich, da das Verwenden von grafikfähigen Taschenrechnern und CAS-Rechnern aufwändig ist und viel Sachverstand erfordert und damit der Vorteil des geringeren Rechenaufwandes hinreichend ausgeglichen wird. Im Falle des Rechnereinsatzes werden keine Tabellen ausgegeben.

	Lösungsskizze	Bewertung/ Zuordnung		
		I	II	III
a)	Zum einen kann man die Messungen als Versuch mit nur 2 Ausgängen auffassen: Ein Auto fährt schneller als erlaubt oder nicht. Zum anderen geht es um die Frage der stochastischen Unabhängigkeit der Geschwindigkeiten der einzelnen Autos. Wenn diese vorausgesetzt wird, idealisiert man die Realität insofern, als die stochastische Unabhängigkeit z. B. dann nicht gegeben ist, wenn eine dichte Verkehrslage herrscht, wenn Wetterbedingungen das Fahrverhalten steuern, wenn einige die Radaranlage entdecken oder wenn „Gruppen“ fahren, z.B. eine Hochzeitsgesellschaft.	2	2	
b)	Die Zufallsgröße X sei die Anzahl der „Raser“ unter den 10 Gemessenen. Ohne oder mit Hilfe der Tabelle zu kumulierten binomialverteilten Wahrscheinlichkeiten oder mit geeigneten Taschenrechnern: $P(X=3)=\binom{10}{3}\cdot 0,2^3\cdot 0,8^7\approx 20\%$ $P(X\le 4)=\sum_{k=0}^{4}\binom{10}{k}\cdot 0,2^k\cdot 0,8^{10-k}\approx 97\%$	4	2	
c)	Mit Hilfe der Tabelle zu kumulierten binomialverteilten Wahrscheinlichkeiten oder mit geeigneten Taschenrechnern: $P(X\le 16)=\sum_{k=0}^{16}\binom{100}{k}\cdot 0,2^k\cdot 0,8^{100-k}\approx 19,2\%$, das ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass fälschlicher Weise angenommen wird, dass sich die Raserquote signifikant gesenkt habe, da sich unter den 100 Gemessenen zufällig nur höchstens 16 Raser befinden, obwohl die Quote in Wirklichkeit doch noch ca. 20% beträgt. Mit Hilfe der Tabelle zu kumulierten binomialverteilten Wahrscheinlichkeiten oder mit geeigneten Taschenrechnern: $P(X\le 13)\approx 4,7\%$ $P(X\le 14)\approx 8,0\%$ „Falls unter den 100 erfassten Autos höchstens 13 Raser ermittelt werden, haben die Warnschilder zu einer signifikanten Senkung der Raserquote geführt.“ Mögliche Erläuterungen: Die Binomialverteilung wird durch die Normalverteilung approximiert, die Zufallsvariable X geht über in $Z=\frac{X+0,5-\mu}{\sigma}$. $\Phi(-1,64)=0,0505$			

d)	Voraussetzung: $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 4 > 3$ Oder: σ ist die Standardabweichung um den Erwartungswert. Voraussetzung zur Anwendung einer Sigma-Regel: $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 4 > 3$ Berechnung des Erwartungswertes: $\mu = np = 20$. *Unterhalb* von $\mu - 1{,}64\sigma$ liegen ca. 5% der Stichprobenergebnisse, also $X < \mu - 1{,}64\sigma = 13{,}44$	3	8	
	Der Fehler 2. Art für $p = \frac{1}{6}$ beträgt: $P_{p=\frac{1}{6}}(X > 13) = 1 - \sum_{k=0}^{13} \binom{100}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{100-k} \approx 80\%$. Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art ist für den Fall, dass die Raserquote auf ca. 16,7 % gesenkt würde, sehr hoch, d.h. diese Entscheidungsregel „entdeckt“ eine geringe Senkung (hier um 3 Prozentpunkte) sehr oft nicht. Die Operationscharakteristik zeigt für verschiedene Werte von p die zugehörige Wahrscheinlichkeit β für einen Fehler 2. Art. Die Zuordnungsvorschrift lautet: $p \mapsto P_p(X > 13) = 1 - \sum_{k=0}^{13} \binom{100}{k} p^k (1-p)^{100-k}$ (bzw. $1 - P_p(X \le 13)$) Achsenbeschriftung: x-Achse: Wahrscheinlichkeit p. y-Achse: Wahrscheinlichkeit β für einen Fehler 2. Art. Interpretationsbeispiel: Hier sind die Abschnitte $p < 0{,}1$; $0{,}1 \le p \le 0{,}2$; $0{,}2 \le p$ zugrunde gelegt. Würde die Raserquote stark gesenkt (auf unter 10%) so wäre die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art noch gering (unter ca. 10%). Wird sie nur ein weniger stark gesenkt, so steigt der Fehler 2. Art sehr schnell an. So liegt zum Beispiel bei einer Senkung der Raserquote auf 15 % (immerhin um 5 Prozentpunkte) die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art schon bei ungefähr 60%. Bei einer Raserquote oberhalb von 20% ist die Wahrscheinlichkeit für β schon nahe bei 100%.	3	5	4
	Insgesamt 33 Bewertungseinheiten, verteilt auf die Anforderungsbereiche	**12**	**17**	**4**
	Prozentuale Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	36%	52%	12%

Hilfsmittel: GTR (auch mit CAS) oder TC, Formelsammlung
Vergessen Sie nicht, Ihre Eingaben zu protokollieren!

Aufgabe: Schnelltest BSE und Medikamententest Tierkrankheit

Seit November 2000 muss bei jedem geschlachteten Rind, das älter als 30 Monate ist, ein Schnelltest auf BSE durchgeführt werden. Solch ein Test ist durch zwei unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten gekennzeichnet, nämlich durch

I. die Wahrscheinlichkeit, mit der ein infiziertes Rind als solches erkannt wird, also die Wahrscheinlichkeit mit der der Test die vorliegende Erkrankung durch ein positives Ergebnis korrekt anzeigt.
Für diese Wahrscheinlichkeit nehmen wir den folgenden Wert an: $p_1 = 0{,}985$.

II. die Wahrscheinlichkeit, mit der ein nicht infiziertes Rind als solches richtig erkannt wird, also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine Infektion vorliegt und der Test negativ ausfällt.
Für diese Wahrscheinlichkeit nehmen wir den folgenden Wert an: $p_2 = 0{,}999$

a) Ein solches Testverfahren ist mit Fehlern behaftet:

- Fehler A: eine Infektion wird angezeigt (Testreaktion positiv), obwohl das Tier kein Virusträger ist,
- Fehler B: es wird keine Infektion angezeigt (Testreaktion negativ), obwohl die Infektion tatsächlich vorhanden ist.

Bestimmen Sie zu den oben angegebenen Werten p_1 und p_2 die Wahrscheinlichkeiten, mit der diese beiden Fehler auftreten.

b) Nehmen Sie an, dass $0{,}05\%$ der Rinder in einem bestimmten Land mit BSE infiziert sind.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ein Test positiv bzw. negativ ausfällt, bestätigen Sie dazu die auf 4 Nachkommastellen gerundeten Werte $p_3 \approx 0{,}0015$ bzw. $p_4 \approx 0{,}9985$.

c) **Berechnen** Sie für das Land aus Teil b):

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Rind mit positivem Testergebnis tatsächlich nicht erkrankt?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Rind mit negativem Testergebnis tatsächlich erkrankt?

Folgern Sie aus den beiden Punkten, was ein Schnelltest leistet bzw. nicht leistet.

Medikamententest Tierkrankheit

d) Für eine bestimmte weit verbreitete Tierkrankheit wurde ein neues Medikament entwickelt. Die Produktionsfirma hofft, dass es besser wirkt als das bisher auf dem Markt befindliche Mittel, das eine Erfolgsquote von 80% hat. Für den Test des Mittels stehen 152 kranke Tiere zur Verfügung.

Nennen Sie die zu testende Hypothese und die Gegenhypothese und die im Test betrachtete Zufallsgröße.

Begründen Sie, warum ein Binomialansatz bzw. ein Ansatz mit Normalverteilung gerechtfertigt ist.

Ermitteln Sie eine Entscheidungsregel, in der festgelegt wird, bei welchen Testergebnissen die Hypothese als widerlegt angesehen wird. Dabei soll der Fehler 1. Art (α-Fehler) nicht mehr als 1% betragen.

e) Für $\alpha = 5\%$ ist der Verwerfungsbereich für die Nullhypothese $V = \{131, \ldots, 152\}$. **Bestimmen** Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art (β-Fehler), wenn das neue Medikament tatsächlich eine Erfolgswahrscheinlichkeit von 82% hat. **Erläutern** Sie seine Bedeutung.

Erläutern Sie, warum der Fehler 2. Art so groß ist.
Leiten Sie aus den Eigenschaften der Binomialverteilung **her,** wie man diesen Fehler verringern kann.
Veranschaulichen Sie ihre Argumentation mit Skizzen der Verteilungen.

Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen

Bemerkung: Die Aufgabenstellung ist für alle Schülerinnen und Schüler gleich, da das Verwenden von grafikfähigen Taschenrechnern und CAS-Rechnern aufwändig ist und viel Sachverstand erfordert und damit der Vorteil des geringeren Rechenaufwandes hinreichend ausgeglichen wird.

	Lösungsskizze	Bewertung/ Zuordnung		
		I	II	III
a)	Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler A: Infektion wird angezeigt, obwohl keine Infektion vorliegt, ist die Gegenwahrscheinlichkeit von p_2: $\overline{p}_2 = 1 - p_2 = 0{,}001$ Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler B: Infektion wird nicht angezeigt, obwohl sie vorliegt, ist die Gegenwahrscheinlichkeit von p_1: $\overline{p}_1 = 1 - p_1 = 0{,}015$.	1	1	
b)	Baumdiagramm u. Pfadmultiplikations-/-additionsregel (oder Vierfeldertafel) $P(\text{Test positiv}) = 0{,}001492 \approx 0{,}0015$; $P(\text{Test negativ}) = 0{,}998508 \approx 0{,}9985$.	5	2	
c)	$P(\text{nicht inf. / T+}) = 0{,}6699$; $P(\text{nicht inf. / T-}) = 7{,}5 \cdot 10^{-6}$. Trotz positivem Testergebnis besteht eine relativ große Chance ($\approx 2/3$), dass das Rind nicht erkrankt ist. Deswegen sind nach dem positiven Schnelltest noch genauere Untersuchungen erforderlich. Ein negatives Testergebnis gibt mehr Sicherheit: Es ist es sehr unwahrscheinlich, dass ein negativ getestetes Rind infiziert ist ($< 0{,}001\%$).	2	1	1
d)	Hypothese H_1: Das neue Mittel ist besser als das alte; $p > p_0 = 0{,}8$. Hypothese H_0: Das neue Mittel ist nicht besser als das alte; $p \le p_0 = 0{,}8$. X: Anzahl der Tiere, bei denen das Mittel wirkt, $n = 152$, $p_0 = 0{,}8$. X ist binomialverteilt mit n und p_0. Binomialansatz ist gerechtfertigt, da ● nur zwei Ausgänge möglich (Mittel wirkt / wirkt nicht) und ● p als gleich bleibend auf jeder Stufe (= Versuchstier) angenommen werden kann, denn das Verhältnis von Umfang der Gesamtheit der kranken Tiere zu Umfang der Stichprobe ist sehr groß. Da vermutet wird, dass das neue Mittel besser als das alte wirkt: rechtsseitiger Test, also ist das kleinste k gesucht, für das gilt $P(X \ge k) \le 1\%$ bzw. $1 - P(X \le k-1) \le 1\%$. (Eine Skizze einer „Glockenkurve“ zur Testsituation mit Achsen k und $P(X = k)$, $\mu \approx 122$ und einem geschätzten Bereich für den α-Fehler ist hilfreich.) Mit Normalverteilung: Da X binomialverteilt ist, ist $z = (X + 0{,}5 - \mu)/\sigma$ näherungsweise normalverteilt mit $\mu = 121{,}6$ und $\sigma \approx 4{,}932 > 3$ (mit Stetigkeitskorrektur) und $P(X \le k) \approx \Phi(z)$. Gesucht ist z mit $\Phi(z) = 0{,}99$. Als Verwerfungsbereich ergibt sich mit $z = 2{,}33$; $X = k - 1$ und $k = z \cdot \sigma + \mu + 0{,}5$: $V = \{134, \ldots, 152\}$. Mit Binomialverteilung (GTR oder GTR mit CAS): $P(X \le 132) = 0{,}9895$; $P(X \le 133) = 0{,}9944$, also $P(X \ge 134) \le 5\%$ und somit $V = \{134, \ldots, 152\}$. (Bemerkung: da $P(X \le 132) = 0{,}9895 \approx 0{,}99$ ist $V = \{133, \ldots, 152\}$ ebenfalls richtig) Entscheidungsregel: Wenn sich bei 134 oder mehr Tieren ein Behandlungserfolg zeigt, nehmen wir an, dass das neue Medikament besser wirkt als das alte.	5	6	

e)	X wie oben, für $n = 152$, $p_1 = 0{,}82$ ergibt sich $\mu = 124{,}64$ und $\sigma = 4{,}737 > 3$. Der β-Fehler ist möglich im Bereich $\{0,\ldots 130\}$. Mit Normalverteilung: $P(X \leq 130) \approx \Phi(1{,}237) \approx \Phi(1{,}24) = 0{,}8925 \approx 89\%$. Mit Binomialverteilung: $P(X \leq 130) \approx 0{,}8946 \approx 89\%$. Das ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler, dass das Mittel nicht als besser erkannt wird, obwohl es besser als das alte Mittel ist. Der Fehler 2. Art ist so groß, weil p_1 und p_0 relativ nahe beieinander liegen und mit $n = 152$ eine eher kleine Stichprobe vorliegt. Auf diese Weise überlappen sich die beiden Verteilungen sehr stark, der Test ist nicht sehr trennscharf. Bei größerem n wird die Überlappung der Verteilungen geringer. Bei einer Multiplikation von n mit einem Faktor a wächst σ nur um den Faktor $\sqrt{a}$, die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte σ-Umgebung um μ ist aber bei Binomialverteilungen nahezu gleich. Damit wird die Wahrscheinlichkeit für den β-Fehler reduziert. (α ist durch die vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit begrenzt und bleibt nahezu unverändert.) Der Fehler 2.Art könnte auch verringert werden, wenn das Signifikanzniveau erhöht wird. (Zur Erklärung sind Skizzen notwendig, in denen deutlich wird, wie α und β zusammenhängen und welchen Einfluss eine Vergrößerung von n hat.)		6	3
	Insgesamt 33 Bewertungseinheiten, verteilt auf die Anforderungsbereiche	**13**	**16**	**4**
	Prozentuale Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	39%	49%	12%