Pyramidenschatten-Aufgabe   Abiturprüfung GK Bayern 2005

Die Punkte $A(6\,|\,4\,|\,5)$, $B(4\,|\,4\,|\,3)$, $C(3\,|\,4\,|\,4)$ und $D(3\,|\,0\,|\,4)$ bilden eine dreiseitige Pyramide $ABCD$ mit Spitze in D.

1. a) Zeigen Sie, dass die Grundfläche ABC dieser Pyramide ein rechtwinkliges Dreieck ist.

   b) Tragen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem ein.

   c) Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E, in der die Grundfläche ABC der Pyramide liegt, in Normalenform auf.

   d) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

   e) Ein Schatten der Pyramide in der x_1x_2-Ebene entsteht durch Parallelprojektion in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Zeichnen Sie diesen Schatten in das Koordinatensystem ein.

   f) Durch Verschieben der Pyramidenspitze entlang einer Geraden entstehen weitere Pyramiden mit Grundfläche ABC. Für welche Gerade erhält man dabei Pyramiden, die bei der genannten Projektion denselben Schatten wie die ursprüngliche Pyramide $ABCD$ werfen? Begründen Sie, warum jede dieser Pyramiden den gleichen Rauminhalt besitzt.

2. Man stelle sich die Gerade AD als Flugroute eines Passagierflugzeugs vor sowie einen Sportflieger, der entlang einer Geraden durch den Punkt $P(0\,|\,-7\,|\,0)$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ fliegt.

   a) Weisen Sie nach, dass die Flugbahn des Sportfliegers die des Passagierflugzeugs kreuzt und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der Flugbahnen. Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Flugbahnen?

   b) Man stelle sich zudem den Punkt B als Gipfel eines steilen Berges vor. Wie nahe fliegt der Sportflieger am Gipfel vorbei?

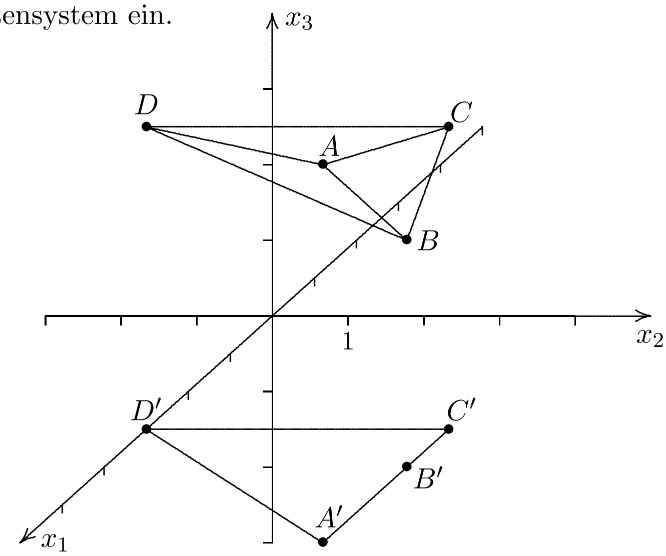
Pyramidenschatten-Aufgabe Abiturprüfung GK Bayern 2005 Lösungen

Die Punkte $A(6 \mid 4 \mid 5)$, $B(4 \mid 4 \mid 3)$, $C(3 \mid 4 \mid 4)$ und $D(3 \mid 0 \mid 4)$ bilden eine dreiseitige Pyramide $ABCD$ mit Spitze in D.

1. a) Zeigen Sie, dass die Grundfläche ABC dieser Pyramide ein rechtwinkliges Dreieck ist.

   $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$

   b) Tragen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem ein.



   c) Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E, in der die Grundfläche ABC der Pyramide liegt, in Normalenform auf.

   $E:\ x_2 = 4$

   d) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide. $V = \frac{1}{3}\, G \cdot h, \quad G = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = 2, \quad V = \frac{8}{3}\ VE$

   e) Ein Schatten der Pyramide in der x_1x_2-Ebene entsteht durch Parallelprojektion in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Zeichnen Sie diesen Schatten in das Koordinatensystem ein.

   f) Durch Verschieben der Pyramidenspitze entlang einer Geraden entstehen weitere Pyramiden mit Grundfläche ABC. Für welche Gerade erhält man dabei Pyramiden, die bei der genannten Projektion denselben Schatten wie die ursprüngliche Pyramide $ABCD$ werfen? Begründen Sie, warum jede dieser Pyramiden den gleichen Rauminhalt besitzt.

   $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Man stelle sich die Gerade AD als Flugroute eines Passagierflugzeugs vor sowie einen Sportflieger, der entlang einer Geraden durch den Punkt $P(0 \mid -7 \mid 0)$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ fliegt.

   a) Weisen Sie nach, dass die Flugbahn des Sportfliegers die des Passagierflugzeugs kreuzt und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der Flugbahnen. Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Flugbahnen?

   $S(0 \mid -4 \mid 3)$

   $\alpha = 46{,}1^\circ$

   b) Man stelle sich zudem den Punkt B als Gipfel eines steilen Berges vor. Wie nahe fliegt der Sportflieger am Gipfel vorbei?

   $d = 4\sqrt{3}$

Schlichtpyramide-Aufgabe Abiturprüfung GK Bayern 2005

Gegeben sind die Gerade g durch die Punkte $A(0\,|\,3\,|\,0)$ und $B(7\,|\,4\,|\,5)$ sowie

die Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. a) Zeigen Sie, dass g und h eine Ebene E aufspannen.

   b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.
   [mögliches Ergebnis: $2x_1 + x_2 - 3x_3 - 3 = 0$]

   c) C_1 und C_2 sind zwei Punkte der Geraden h, für die die Dreiecke ABC_1 bzw. ABC_2 bei C_1 bzw. C_2 rechtwinklig sind. Bestimmen Sie die Koordinaten beider Punkte. (Der Punkt mit ganzzahligen Koordinaten wird mit C_1 bezeichnet.) [Zur Kontrolle: $C_1(1\,|\,1\,|\,0)$]

   d) Tragen Sie die Geraden g und h sowie das Dreieck ABC_1 in ein Koordinatensystem ein.

   e) Begründen Sie ohne Rechnung, dass der Punkt N mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$ der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC_1 ist.

2. Das Dreieck ABC_1 ist die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze S; M ist der Mittelpunkt der Dreiecksseite $[AC_1]$.

   a) Für S gilt: Die Strecke $[MS]$ steht senkrecht auf der x_1x_2-Ebene und hat die Länge 4, die x_3-Koordinate von S ist positiv. Bestimmen Sie die Koordinaten von S und zeichnen Sie M und die Pyramide in die Zeichnung von Teilaufgabe 1d) ein. [Zur Kontrolle: $S(0{,}5\,|\,2\,|\,4)$]

   b) Begründen Sie, dass das Dreieck C_1AS achsensymmetrisch ist, und berechnen Sie die Innenwinkel dieses Dreiecks.

   c) Berechnen Sie die Höhe der Pyramide ABC_1S.

Schlichtpyramide-Aufgabe   Abiturprüfung GK Bayern 2005 Lösungen

Gegeben sind die Gerade g durch die Punkte $A(0 \mid 3 \mid 0)$ und $B(7 \mid 4 \mid 5)$ sowie

die Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. a) Zeigen Sie, dass g und h eine Ebene E aufspannen. $g \parallel h,\ g \neq h$

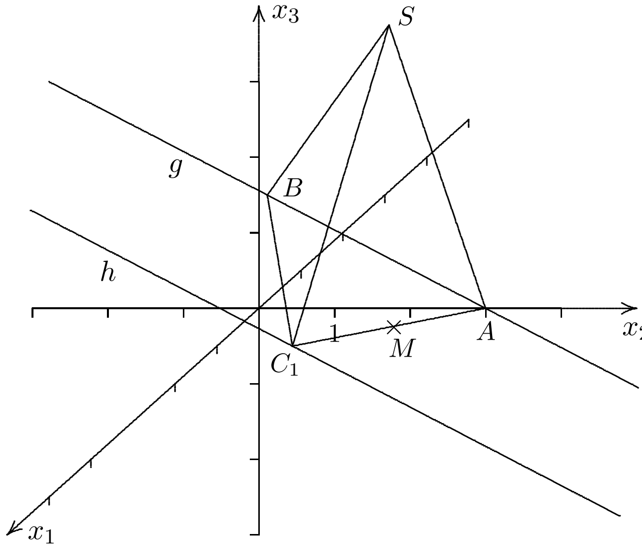
   b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.
   [mögliches Ergebnis: $2x_1 + x_2 - 3x_3 - 3 = 0$]

   c) C_1 und C_2 sind zwei Punkte der Geraden h, für die die Dreiecke ABC_1 bzw. ABC_2 bei C_1 bzw. C_2 rechtwinklig sind. Bestimmen Sie die Koordinaten beider Punkte. (Der Punkt mit ganzzahligen Koordinaten wird mit C_1 bezeichnet.)

   $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0,\quad \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 1+7\lambda \\ 1+\lambda \\ 5\lambda \end{pmatrix},\quad 75\lambda^2 - 65\lambda = 0,\quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \frac{13}{15}$

   $C_1(1 \mid 1 \mid 0),\quad C_2\left(\frac{106}{15} \mid \frac{28}{15} \mid \frac{13}{3}\right)$

   d) Tragen Sie die Geraden g und h sowie das Dreieck ABC_1 in ein Koordinatensystem ein.



   e) Begründen Sie ohne Rechnung, dass der Punkt N mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$ der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC_1 ist. *N halbiert $[AB]$, beachte: Dreieck ist rechtwinklig.*

2. Das Dreieck ABC_1 ist die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze S; M ist der Mittelpunkt der Dreiecksseite $[AC_1]$.

   a) Für S gilt: Die Strecke $[MS]$ steht senkrecht auf der x_1x_2-Ebene und hat die Länge 4, die x_3-Koordinate von S ist positiv. Bestimmen Sie die Koordinaten von S und zeichnen Sie M und die Pyramide in die Zeichnung von Teilaufgabe 1d) ein. *(fast) unmittelbar ersichtlich:* $S(\ 0{,}5 \mid 2 \mid 4)$

   b) Begründen Sie, dass das Dreieck C_1AS achsensymmetrisch ist, und berechnen Sie die Innenwinkel dieses Dreiecks. $|\overrightarrow{C_1S}| = |\overrightarrow{AS}|,\quad \alpha = 74{,}4°,\ \beta = 74{,}4°,\ \gamma = 31{,}2°$

   c) Berechnen Sie die Höhe der Pyramide ABC_1S. $\overrightarrow{OS}$ *in HNF einsetzen,* $h = \frac{12}{\sqrt{14}}$