Vektorrechnung   Aufgabe   aus Abiturprüfung Bayern GK

1. In einem kartesischen Koordinatensystem sind der Punkt $C(4\,|\,0\,|\,4)$,
   die Ebene $E_1:\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2 = 0$ und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben.

   a) Zeigen Sie, dass der Punkt C auf der Geraden g liegt.

   b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts A der Geraden g mit der Ebene E_1.
   [*Ergebnis:* $A(1\,|\,0\,|\,-2)$]

   c) Berechnen Sie den Winkel zwischen einem Richtungsvektor der Geraden g und einem Normalenvektor der Ebene E_1. Unter welchem Winkel schneidet also die Gerade g die Ebene E_1?

   d) Ermitteln Sie den Abstand des Punkts C von der Ebene E_1. Prüfen Sie, ob der Punkt C und der Ursprung O des Koordinatensystems auf verschiedenen Seiten der Ebene E_1 liegen.

   Die Ebene E_2 enthält die Gerade g und steht senkrecht auf der Ebene E_1.

   e) Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E_2 in Normalenform auf.
   [*mögliches Ergebnis:* $E_2:\ \ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 4 = 0$]

   f) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der beiden Ebenen E_1 und E_2.
   [*mögliches Ergebnis:* s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$]

   g) Bestimmen Sie auf der Geraden s den Punkt B so, dass das Dreieck ABC (A aus Teilaufgabe 1b)) bei C einen rechten Winkel besitzt. Fertigen Sie eine Skizze an, die das Dreieck ABC sowie die Geraden g und s enthält.
   [*Ergebnis:* $B(-4\,|\,10\,|\,8)$]

   h) Durch Rotation des Dreiecks ABC um die Gerade AB als Achse entsteht ein Doppelkegel, der aus zwei geraden Kreiskegeln mit gemeinsamer Grundfläche besteht. Berechnen Sie das Volumen dieses Doppelkegels.

1. In einem kartesischen Koordinatensystem sind der Punkt $C(4 \,|\, 0 \,|\, 4)$, die Ebene $E_1 :\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2 = 0$ und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben.

   a) Zeigen Sie, dass der Punkt C auf der Geraden g liegt. unmittelbar ersichtlich: $\lambda = 2$

   b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts A der Geraden g mit der Ebene E_1.
   [*Ergebnis:* $A(1 \,|\, 0 \,|\, -2)$], $\lambda = -1$

   c) Berechnen Sie den Winkel zwischen einem Richtungsvektor der Geraden g und einem Normalenvektor der Ebene E_1. Unter welchem Winkel schneidet also die Gerade g die Ebene E_1?
   $\alpha = 63{,}4°$

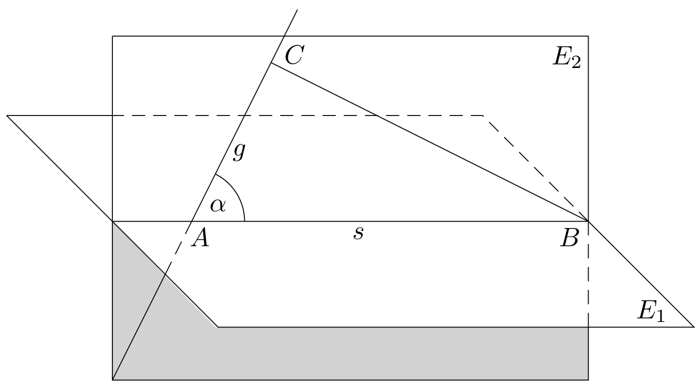
   d) Ermitteln Sie den Abstand des Punkts C von der Ebene E_1. Prüfen Sie, ob der Punkt C und der Ursprung O des Koordinatensystems auf verschiedenen Seiten der Ebene E_1 liegen.
   $d(C,\, E_1) = 6$
   C und O liegen auf derselben Seite von E_1.

   Die Ebene E_2 enthält die Gerade g und steht senkrecht auf der Ebene E_1.

   e) Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E_2 in Normalenform auf.
   [*mögliches Ergebnis:* $E_2 :\quad 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 4 = 0$]

   f) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der beiden Ebenen E_1 und E_2.
   [*mögliches Ergebnis:* s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$]

   g) Bestimmen Sie auf der Geraden s den Punkt B so, dass das Dreieck ABC (A aus Teilaufgabe 1b)) bei C einen rechten Winkel besitzt. Fertigen Sie eine Skizze an, die das Dreieck ABC sowie die Geraden g und s enthält.
   [*Ergebnis:* $B(-4 \,|\, 10 \,|\, 8)$]
   B ergibt sich als Schnitt zweier Geraden oder aus $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$



   h) Durch Rotation des Dreiecks ABC um die Gerade AB als Achse entsteht ein Doppelkegel, der aus zwei geraden Kreiskegeln mit gemeinsamer Grundfläche besteht. Berechnen Sie das Volumen dieses Doppelkegels.
   $V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 (h_1 + h_2) = \frac{1}{3}\pi \left[d(C,\, E_1) \right]^2 |\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{3}\pi \cdot 36 \cdot 15 = 180\pi$

Vektorrechnung Aufgabe aus Abiturprüfung Bayern GK *(abgeändert)*

2. In einem kartesischen Koordinatensystem enthält die Gerade g den Punkt $S(2\,|\,4\,|\,-2)$ und besitzt den Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt P der Geraden g mit der Ebene $x_2 = -2$.

[*Ergebnis:* $P(-1\,|\,-2\,|\,1)$]

b) Zeigen Sie, dass das Dreieck PAS mit $A(2\,|\,-2\,|\,-2)$ bei A rechtwinklig ist. Fertigen Sie ein Schrägbild an, das das Dreieck PAS und die Gerade g enthält, und ergänzen Sie es fortlaufend.

c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, in der das Dreieck PAS liegt, in Normalenform. Welche besondere Lage hat die Ebene E im Koordinatensystem?

[*mögliches Ergebnis:* $E:\ x_1 + x_3 = 0$]

Der Punkt F ist der Fußpunkt des Lotes von dem Punkt A (Teilaufgabe 2 b)) auf die Gerade g.

d) Bestimmen Sie F. [*Ergebnis:* $F(0\,|\,0\,|\,0)$]

e) Der Spiegelpunkt des Punktes A an der Geraden g heißt C. Bestimmen Sie C.

f) Die Punkte A, B, C und D sind die Eckpunkte eines Quadrats mit dem Diagonalenschnittpunkt F. Die Diagonale BD des Quadrats steht senkrecht auf der Ebene E (Teilaufgabe 2 c)). Bestimmen Sie die Punkte B und D.

[*mögliches Teilergebnis:* $B(\sqrt{6}\,|\,0\,|\,\sqrt{6})$]

g) Die Pyramide $ABCDP$ hat ihre Spitze im Punkt P (Teilaufgabe 2 a)). Welchen Winkel schließt eine Seitenkante dieser Pyramide mit der Grundfläche ein?
Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide $ABCDP$.

h) Die Eckpunkte des Quadrats $ABCD$ (Teilaufgabe 2 f)) liegen auf der Kugel K, deren Mittelpunkt der Punkt P (Teilaufgabe 1 a)) ist. Geben Sie die Gleichung der Kugel K an.

i) Geben Sie Mittelpunkt und Radius der kleinsten Kugel an, auf der die Eckpunkte A, B, C und D liegen.

Aufgabe Lösungen aus Abiturprüfung Bayern GK

2. In einem kartesischen Koordinatensystem enthält die Gerade g den Punkt $S(2\,|\,4\,|\,-2)$ und besitzt den Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt P der Geraden g mit der Ebene $x_2 = -2$.

$\left[\,\textit{Ergebnis:}\ P(-1\,|\,-2\,|\,1)\right]$, $\lambda = 3$

b) Zeigen Sie, dass das Dreieck PAS mit $A(2\,|\,-2\,|\,-2)$ bei A rechtwinklig ist. Fertigen Sie ein Schrägbild an, das das Dreieck PAS und die Gerade g enthält, und ergänzen Sie es fortlaufend.

$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AS}$

c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, in der das Dreieck PAS liegt, in Normalenform. Welche besondere Lage hat die Ebene E im Koordinatensystem?

$\left[\,\textit{mögliches Ergebnis:}\ E:\ x_1 + x_3 = 0\right]$ E enthält die x_2-Achse.

Der Punkt F ist der Fußpunkt des Lotes von dem Punkt A (Teilaufgabe 2 b)) auf die Gerade g.

d) Bestimmen Sie F. $\left[\,\textit{Ergebnis:}\ F(0\,|\,0\,|\,0)\right]$

e) Der Spiegelpunkt des Punktes A an der Geraden g heißt C. Bestimmen Sie C.

Ergebnis: $C(-2\,|\,2\,|\,2)$

f) Die Punkte A, B, C und D sind die Eckpunkte eines Quadrats mit dem Diagonalenschnittpunkt F. Die Diagonale BD des Quadrats steht senkrecht auf der Ebene E (Teilaufgabe 2 c)). Bestimmen Sie die Punkte B und D.

$\left[\,\textit{mögliches Teilergebnis:}\ B\left(\sqrt{6}\,|\,0\,|\,\sqrt{6}\right)\right]$ *Ergebnis:* $D\left(-\sqrt{6}\,|\,0\,|\,-\sqrt{6}\right)$

g) Die Pyramide $ABCDP$ hat ihre Spitze im Punkt P (Teilaufgabe 2 a)). Welchen Winkel schließt eine Seitenkante dieser Pyramide mit der Grundfläche ein?
Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide $ABCDP$.

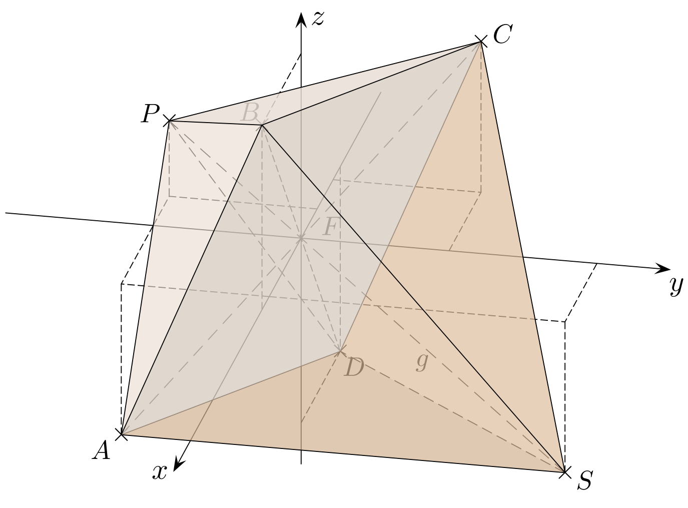
$\alpha = 35^\circ$, $V = 8\sqrt{6}$

h) Die Eckpunkte des Quadrats $ABCD$ (Teilaufgabe 2 f)) liegen auf der Kugel K, deren Mittelpunkt der Punkt P (Teilaufgabe 1 a)) ist. Geben Sie die Gleichung der Kugel K an.

$$K:\quad \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^2 = 18$$

i) Geben Sie Mittelpunkt und Radius der kleinsten Kugel an, auf der die Eckpunkte A, B, C und D liegen.

$F(0\,|\,0\,|\,0)$, $r = 2\sqrt{3}$



Der Körper hat eine kristalline Form mit 4 Symmetrieebenen.

Raute und Pyramide Abiturprüfung GK Bayern

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Gerade g durch den Punkt $A(-1\,|\,1\,|\,1)$ und den Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sowie die Gerade h durch $B(0\,|\,3\,|\,3)$ und $C(2\,|\,2\,|\,5)$ gegeben.

1. a) Zeigen Sie, dass die Geraden g und h eine Ebene E eindeutig bestimmen.

   b) Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Ebene in Normalenform.
   [*mögliches Ergebnis:* $E: \quad 6x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 9 = 0$]

2. a) Bestimmen Sie die Punkte auf g, die von A die Entfernung 3 besitzen.

   b) Begründen Sie, dass das Viereck $ABCD$ mit $D(1\,|\,0\,|\,3)$ eine Raute ist und berechnen Sie dessen Flächeninhalt I.
   [*zur Kontrolle:* $I = \sqrt{65}$]

3. a) Vom Punkt $S(11\,|\,5\,|\,4)$ wird das Lot auf E gefällt, es trifft E im Punkt F. Berechnen Sie die Koordinaten von F.
   [*zur Kontrolle:* $F(5\,|\,3\,|\,9)$]

   b) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABCDS$.

   c) Zeigen Sie, dass F auf der Geraden AC liegt. In welchem Verhältnis teilt F die Strecke $\overline{AC}$?

   d) Fertigen Sie eine Skizze an, aus der die Lagebeziehungen aller vorkommenden geometrischen Elemente hervorgehen.

   e) Begründen Sie, dass die Pyramide $ABFDS$ den doppelten Rauminhalt wie die Pyramide $ABCDS$ aus Teilaufgabe 3b) besitzt.

Raute und Pyramide   Lösungshinweise

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Gerade g durch den Punkt $A(-1\,|\,1\,|\,1)$ und den Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sowie die Gerade h durch $B(0\,|\,3\,|\,3)$ und $C(2\,|\,2\,|\,5)$ gegeben.

1. a) Zeigen Sie, dass die Geraden g und h eine Ebene E eindeutig bestimmen. $g \parallel h$

   b) Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Ebene in Normalenform.
   [*mögliches Ergebnis:* $E: \quad 6x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 9 = 0$]

2. a) Bestimmen Sie die Punkte auf g, die von A die Entfernung 3 besitzen.
   $P_1(1\,|\,0\,|\,3)$
   $P_2(-3\,|\,2\,|\,-1)$

   b) Begründen Sie, dass das Viereck $ABCD$ mit $D(1\,|\,0\,|\,3)$ eine Raute ist und berechnen Sie dessen Flächeninhalt I.
   [*zur Kontrolle:* $I = \sqrt{65}$]
   $I = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD}$

3. a) Vom Punkt $S(11\,|\,5\,|\,4)$ wird das Lot auf E gefällt, es trifft E im Punkt F. Berechnen Sie die Koordinaten von F.
   [*zur Kontrolle:* $F(5\,|\,3\,|\,9)$]

   b) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABCDS$. $V_{ABCDS} = \frac{1}{3} \cdot I \cdot \overline{SF} = \frac{65}{3}$

   c) Zeigen Sie, dass F auf der Geraden AC liegt. In welchem Verhältnis teilt F die Strecke $\overline{AC}$?
   $\overrightarrow{AF} = \lambda \cdot \overrightarrow{FC} \qquad \lambda = -2$

   d) Fertigen Sie eine Skizze an, aus der die Lagebeziehungen aller vorkommenden geometrischen Elemente hervorgehen.

   e) Begründen Sie, dass die Pyramide $ABFDS$ den doppelten Rauminhalt wie die Pyramide $ABCDS$ aus Teilaufgabe 3b) besitzt.
   beachte: $I_{ABFD} = 2 \cdot I_{ABCD}$