In einem kartesischen Koordinatensystem sind die vier Punkte \( A(-2 \mid 8 \mid 0) \), \( B(0 \mid 0 \mid -2) \), \( C(1 \mid 2 \mid 0) \) und \( D(0 \mid 6 \mid 1) \) gegeben.

1. a) Weisen Sie nach, dass die vier Punkte \( A, B, C \) und \( D \) ein Trapez mit zwei gleich langen gegenüberliegenden Seiten, aber kein Parallelogramm (also ein gleichschenkliges Trapez) bilden.
   
b) Berechnen Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes \( M \). \( \text{zur Kontrolle: } M(0 \mid 4 \mid 0) \)
   
c) Berechnen Sie den Abstand \( d \) des Punktes \( D \) von der Geraden \( AB \). \( \text{zur Kontrolle: } d = 1,5\sqrt{2} \)
   
d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des gleichschenkligen Trapezes \( ABCD \).
   
e) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene \( E \), in der das Viereck \( ABCD \) liegt, in Normalenform.
      \( \text{möglicher Ergebnis: } E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 4 = 0 \)

Das gleichschenkligke Trapez \( ABCD \) bildet zusammen mit einem weiteren Punkt \( S \) eine Pyramide \( ABCDS \). Der Punkt \( S \) liegt auf der Lotgeraden zur Ebene \( E \) durch den Punkt \( M \) und hat von der Ebene \( E \) den Abstand 15; der Koordinatenursprung und \( S \) liegen auf verschiedenen Seiten von \( E \).

2. a) Bestimmen Sie die Koordinaten von \( S \). \( \text{zur Kontrolle: } S(10 \mid 9 \mid -10) \)
   
b) Zeigen Sie, dass der Punkt \( T(6 \mid 7 \mid -6) \) die Strecke \([MS]\) innen im Verhältnis 3:2 teilt.
   
c) Bestimmen Sie eine Gleichung der zu \( E \) parallelen Ebene \( F \), die durch den Punkt \( T \) verläuft, in Normalenform.
   
d) Beim Schnitt der Ebene \( F \) mit der Pyramide \( ABCDS \) entstehen zwei Teilkörper: ein Pyramidenstumpf und die zugehörige Ergänzungspyramide. Zeigen Sie, dass das Volumen der Ergänzungspyramide weniger als 7% des Volumens der Pyramide \( ABCDS \) beträgt.
In einem kartesischen Koordinatensystem sind die vier Punkte \( A(-2 \mid 8 \mid 0) \), \( B(0 \mid 0 \mid -2) \), \( C(1 \mid 2 \mid 0) \) und \( D(0 \mid 6 \mid 1) \) gegeben.

1. a) Weisen Sie nach, dass die vier Punkte \( A \), \( B \), \( C \) und \( D \) ein Trapez mit zwei gleich langen gegenüberliegenden Seiten, aber kein Parallelogramm (also ein gleichschenkliges Trapez) bilden.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes \( M \). [zur Kontrolle: \( M(0 \mid 4 \mid 0) \)]

c) Berechnen Sie den Abstand \( d \) des Punktes \( D \) von der Geraden \( AB \). [zur Kontrolle: \( d = 1,5\sqrt{2} \)]

\[ \alpha = 45^\circ \] mehrere Lösungswegwege

d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des gleichschenklichen Trapezes \( ABCD \). \( A_{\text{Trapez}} = 13,5 \, \text{FE} \) (elementar)

e) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene \( E \), in der das Viereck \( ABCD \) liegt, in Normalenform. [mögliches Ergebnis: \( 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 4 = 0 \)]

Das gleichschenklige Trapez \( ABCD \) bildet zusammen mit einem weiteren Punkt \( S \) eine Pyramide \( ABCDS \). Der Punkt \( S \) liegt auf der Lotgeraden zur Ebene \( E \) durch den Punkt \( M \) und hat von der Ebene \( E \) den Abstand 15; der Koordinatenursprung und \( S \) liegen auf verschiedenen Seiten von \( E \).

2. a) Bestimmen Sie die Koordinaten von \( S \). [zur Kontrolle: \( S(10 \mid 9 \mid -10) \)]

\[ \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + 15 \cdot n_E \]

b) Zeigen Sie, dass der Punkt \( T(6 \mid 7 \mid -6) \) die Strecke \([MS]\) innen im Verhältnis 3:2 teilt.

\[ MM = \lambda TS \implies \lambda = \frac{3}{2} \]

c) Bestimmen Sie eine Gleichung der zu \( E \) parallelen Ebene \( F \), die durch den Punkt \( T \) verläuft, in Normalenform.

\[ F: 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 31 = 0 \]

d) Beim Schnitt der Ebene \( F \) mit der Pyramide \( ABCDS \) entstehen zwei Teilkörper: ein Pyramidenstumpf und die zugehörige Ergänzungspyramide. Zeigen Sie, dass das Volumen der Ergänzungspyramide weniger als 7% des Volumens der Pyramide \( ABCDS \) beträgt.

\[ V_{\text{Ergänzungspyramide}} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot V_{ABCDS} = 6,4\% \cdot V_{ABCDS} \] (zentrische Streckung)
Abroll-Aufgabe  Abiturprüfung GK Bayern 2001

Gegeben ist in einem kartesischen Koordinatensystem die Ebene $E: 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 60$. Ihr Schnittpunkt mit der $x_1$-Achse heißt $S_1$, mit der $x_2$-Achse $S_2$ und mit der $x_3$-Achse $S_3$.

1. a) Bestimmen Sie die Koordinaten von $S_1$, $S_2$ und $S_3$ und geben Sie eine Gleichung der Geraden $S_1S_2$ an. [zur Kontrolle: $S_3(0 \mid 0 \mid 20)$]

b) Vom Punkt $S_3$ wird ein Lot auf die Gerade $S_1S_2$ gefällt. Berechnen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes $L$. [zur Kontrolle: $L(3 \mid 9 \mid 0)$]

c) Legen Sie ein Koordinatensystem an und tragen Sie das Dreieck $S_1S_2S_3$ und die Gerade $S_3L$ ein.

d) Begründen Sie, dass $L$ der Punkt der Geraden $S_1S_2$ ist, der den kürzesten Abstand zum Ursprung $O$ hat, und berechnen Sie diesen Abstand. Ermitteln Sie die Winkel im Dreieck $OLS_3$ auf $0,1^\circ$ genau.

2. Eine Kugel mit Radius 7 berührt die Ebene $E$ im Punkt $S_3$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der möglichen Kugelmittelpunkte.

Im Folgenden wird der Fall betrachtet, dass die Kugel zunächst den Mittelpunkt $M(2 \mid 6 \mid 23)$ hat (siehe Skizze) und dann auf der Ebene $E$ so rollt, dass ihre Spur auf der Halbgeraden $[S_3L$ liegt.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden $m$, auf der sich der Kugelmittelpunkt bewegt.

Die Kugel erreicht schließlich die $x_1x_2$-Ebene und rollt auf dieser weiter.

Skizze nicht maßstabsgetreu

c) Berechnen Sie den Schnittpunkt $T$ der Geraden $m$ (siehe Aufgabe 2b)) mit der zur $x_1x_2$-Ebene parallelen Ebene, in der sich nun der Kugelmittelpunkt bewegt. [zur Kontrolle: $T(4,4 \mid 13,2 \mid 7)$]

d) Bestimmen Sie den letzten Berührungspunkt $B$, den die Kugel bei dem beschriebenen Abrollvorgang mit der Ebene $E$ hatte, und markieren Sie in der Zeichnung von Aufgabe 1c) mit Farbe die Spur, welche die Kugel auf der Ebene $E$ hinterließ.
Abroll-Aufgabe  Abiturprüfung GK Bayern 2001  Lösungen

Gegeben ist in einem kartesischen Koordinatensystem die Ebene $E: 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 60$.
Ihr Schnittpunkt mit der $x_1$-Achse heißt $S_1$, mit der $x_2$-Achse $S_2$ und mit der $x_3$-Achse $S_3$.

1. a) Bestimmen Sie die Koordinaten von $S_1$, $S_2$ und $S_3$ und geben Sie eine Gleichung der Geraden $S_1S_2$ an.

b) Vom Punkt $S_3$ wird ein Lot auf die Gerade $S_1S_2$ gefällt. Berechnen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes $L$.

c) Legen Sie ein Koordinatensystem an und tragen Sie das Dreieck $S_1S_2S_3$ und die Gerade $S_3L$ ein.

d) Begründen Sie, dass $L$ der Punkt der Geraden $S_1S_2$ ist, der den kürzesten Abstand zum Ursprung $O$ hat, und berechnen Sie diesen Abstand. Ermitteln Sie die Winkel im Dreieck $OLS_3$ auf $0,1^\circ$ genau.

2. Eine Kugel mit Radius 7 berührt die Ebene $E$ im Punkt $S_3$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der möglichen Kugelmittelpunkte.

Im Folgenden wird der Fall betrachtet, dass die Kugel zunächst den Mittelpunkt $M(2|6|23)$ hat (siehe Skizze) und dann auf der Ebene $E$ so rollt, dass ihre Spur auf der Halbgeraden $[S_3L$ liegt.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden $m$, auf der sich der Kugelmittelpunkt bewegt.

Die Kugel erreicht schließlich die $x_1x_2$-Ebene und rollt auf dieser weiter.

c) Berechnen Sie den Schnittpunkt $T$ der Geraden $m$ (siehe Aufgabe 2b)) mit der zur $x_1x_2$-Ebene parallelen Ebene, in der sich nun der Kugelmittelpunkt bewegt.

b) Vom Punkt $S_3$ wird ein Lot auf die Gerade $S_1S_2$ gefällt. Berechnen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes $L$.

c) Legen Sie ein Koordinatensystem an und tragen Sie das Dreieck $S_1S_2S_3$ und die Gerade $S_3L$ ein.

d) Begründen Sie, dass $L$ der Punkt der Geraden $S_1S_2$ ist, der den kürzesten Abstand zum Ursprung $O$ hat, und berechnen Sie diesen Abstand. Ermitteln Sie die Winkel im Dreieck $OLS_3$ auf $0,1^\circ$ genau.

2. Eine Kugel mit Radius 7 berührt die Ebene $E$ im Punkt $S_3$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der möglichen Kugelmittelpunkte.

Im Folgenden wird der Fall betrachtet, dass die Kugel zunächst den Mittelpunkt $M(2|6|23)$ hat (siehe Skizze) und dann auf der Ebene $E$ so rollt, dass ihre Spur auf der Halbgeraden $[S_3L$ liegt.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden $m$, auf der sich der Kugelmittelpunkt bewegt.

Die Kugel erreicht schließlich die $x_1x_2$-Ebene und rollt auf dieser weiter.

c) Berechnen Sie den Schnittpunkt $T$ der Geraden $m$ (siehe Aufgabe 2b)) mit der zur $x_1x_2$-Ebene parallelen Ebene, in der sich nun der Kugelmittelpunkt bewegt.

b) Vom Punkt $S_3$ wird ein Lot auf die Gerade $S_1S_2$ gefällt. Berechnen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes $L$.

c) Legen Sie ein Koordinatensystem an und tragen Sie das Dreieck $S_1S_2S_3$ und die Gerade $S_3L$ ein.

d) Begründen Sie, dass $L$ der Punkt der Geraden $S_1S_2$ ist, der den kürzesten Abstand zum Ursprung $O$ hat, und berechnen Sie diesen Abstand. Ermitteln Sie die Winkel im Dreieck $OLS_3$ auf $0,1^\circ$ genau.

2. Eine Kugel mit Radius 7 berührt die Ebene $E$ im Punkt $S_3$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der möglichen Kugelmittelpunkte.

Im Folgenden wird der Fall betrachtet, dass die Kugel zunächst den Mittelpunkt $M(2|6|23)$ hat (siehe Skizze) und dann auf der Ebene $E$ so rollt, dass ihre Spur auf der Halbgeraden $[S_3L$ liegt.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden $m$, auf der sich der Kugelmittelpunkt bewegt.

Die Kugel erreicht schließlich die $x_1x_2$-Ebene und rollt auf dieser weiter.

c) Berechnen Sie den Schnittpunkt $T$ der Geraden $m$ (siehe Aufgabe 2b)) mit der zur $x_1x_2$-Ebene parallelen Ebene, in der sich nun der Kugelmittelpunkt bewegt.