Geraden-Aufgabe   Abiturprüfung GK Bayern 2000

Gegeben sind im kartesischen Koordinatensystem die Punkte $A(6\,|\,0\,|\,-2)$, $B(-2\,|\,4\,|\,-2)$ und $S(2\,|\,2\,|\,3)$ und die beiden Geraden

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Beachten Sie: $B \in g$ und $S \in h$.

1. a) Begründen Sie, dass die Gerade g und der Punkt A eindeutig eine Ebene E festlegen und ermitteln Sie eine Gleichung von E in Normalenform. Welche besondere Lage im Koordinatensystem weist diese Ebene auf? [mögliches Ergebnis: $E:\ x_3 + 2 = 0$]

   b) Weisen Sie nach, dass h parallel zu E liegt, und bestimmen Sie den Abstand der Geraden h von der Ebene E.

   c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Fußpunkts F des Lots von S auf die Ebene E und zeigen Sie, dass F die Strecke $[AB]$ halbiert. [zur Kontrolle: $F(2\,|\,2\,|\,-2)$]

   d) Zeichnen Sie sämtliche Punkte und Geraden in ein Koordinatensystem ein. (Platzbedarf: halbe Seite)

2. a) Der Punkt A liegt auf einer Kugel K mit Mittelpunkt S. Ermitteln Sie den Radius der Kugel K und zeigen Sie, dass B ebenfalls auf dieser Kugel liegt.

   b) Außer dem Punkt B liegt noch ein weiterer Punkt C der Geraden g auf der Kugel K. Ermitteln Sie seine Koordinaten und ergänzen Sie Ihre Zeichnung aus Aufgabe 1d) um Punkt C.
   [zur Kontrolle: $C(0\,|\,-2\,|\,-2)$]

   c) Zeigen Sie, dass die Gerade FC Symmetrieachse im Dreieck ABC ist.

   d) Bestimmen Sie den Rauminhalt der Pyramide $ABCS$.

Geraden-Aufgabe Abiturprüfung GK Bayern 2000 Lösungen

Gegeben sind im kartesischen Koordinatensystem die Punkte $A(6\,|\,0\,|\,-2)$, $B(-2\,|\,4\,|\,-2)$ und $S(2\,|\,2\,|\,3)$ und die beiden Geraden

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}$$

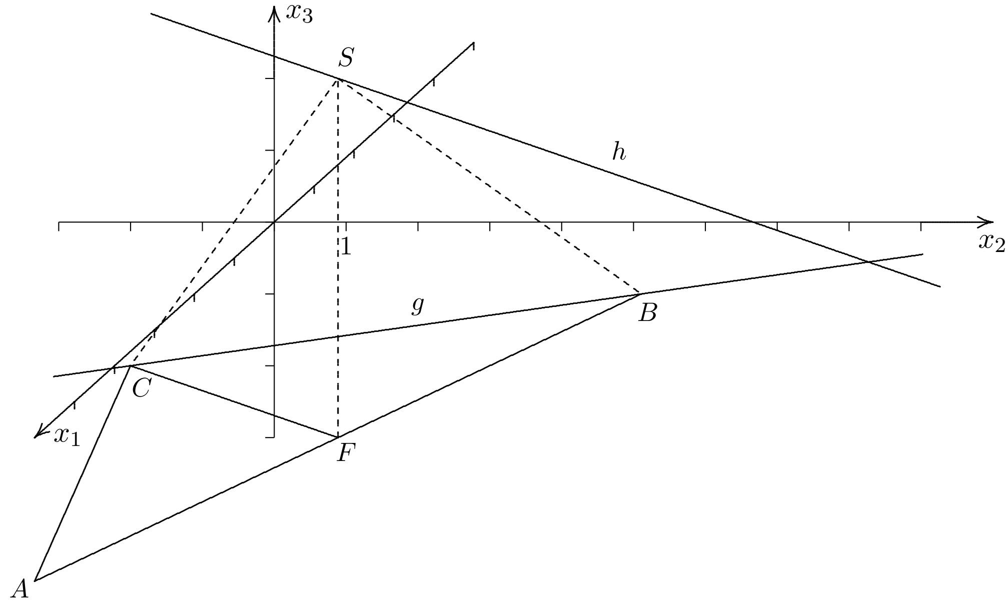
Beachten Sie: $B \in g$ und $S \in h$.

1. a) Begründen Sie, dass die Gerade g und der Punkt A eindeutig eine Ebene E festlegen und ermitteln Sie eine Gleichung von E in Normalenform. Welche besondere Lage im Koordinatensystem weist diese Ebene auf?
   $A \not\in g$ [mögliches Ergebnis: $E:\ x_3 + 2 = 0$]

   b) Weisen Sie nach, dass h parallel zu E liegt, und bestimmen Sie den Abstand der Geraden h von der Ebene E.
   $\vec{u}_h \perp \vec{n}_E$, $d = 5$ *LE*

   c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Fußpunkts F des Lots von S auf die Ebene E und zeigen Sie, dass F die Strecke $[AB]$ halbiert.
   [zur Kontrolle: $F(2\,|\,2\,|\,-2)$] $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

   d) Zeichnen Sie sämtliche Punkte und Geraden in ein Koordinatensystem ein. (Platzbedarf: halbe Seite)



2. a) Der Punkt A liegt auf einer Kugel K mit Mittelpunkt S. Ermitteln Sie den Radius der Kugel K und zeigen Sie, dass B ebenfalls auf dieser Kugel liegt.
   $r = |\overrightarrow{AS}| = 3\sqrt{5}$, $|\overrightarrow{BS}| = 3\sqrt{5}$

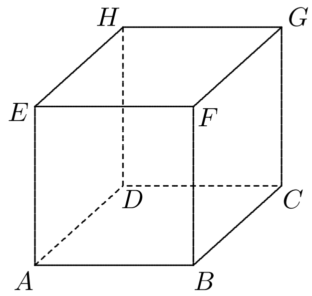
   b) Außer dem Punkt B liegt noch ein weiterer Punkt C der Geraden g auf der Kugel K. Ermitteln Sie seine Koordinaten und ergänzen Sie Ihre Zeichnung aus Aufgabe 1d) um Punkt C.
   [zur Kontrolle: $C(0\,|\,-2\,|\,-2)$] $K \cap g$ $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$

   c) Zeigen Sie, dass die Gerade FC Symmetrieachse im Dreieck ABC ist.
   $\overrightarrow{FC} \perp \overrightarrow{AB}$ siehe 1 c) oder $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{40}$

   d) Bestimmen Sie den Rauminhalt der Pyramide $ABCS$.
   $V = \frac{1}{3} G \cdot h$, $G = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{FC}| = \frac{1}{2}\sqrt{80} \cdot \sqrt{20} = 20$, $h = 5$ siehe 1 b), $V = \frac{100}{3}$ *VE*

   oder $V = \frac{1}{6}\,|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS})|$

Oktaeder-Aufgabe   Abiturprüfung GK Bayern 2000



Gegeben sind im kartesischen Koordinatensystem die Punkte $A(2\,|\,-1\,|\,0)$, $B(6\,|\,3\,|\,-2)$ und $H(4\,|\,1\,|\,8)$. Die Punkte A, B und H sind Eckpunkte des Würfels $ABCDEFGH$.

1. a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene T, die durch das Dreieck ABH bestimmt ist, in Normalenform. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat T?
   [mögliches Ergebnis: $x_1 - x_2 - 3 = 0$]

   b) Das Dreieck ABH wird durch den Punkt G zu dem Rechteck $ABGH$ ergänzt. Berechnen Sie die Koordinaten von G.
   [Ergebnis: $G(8\,|\,5\,|\,6)$]

2. Nun sollen die Koordinaten der übrigen Eckpunkte ermittelt werden.
   a) Bestimmen Sie die Länge der Diagonalen $[BG]$ und begründen Sie, dass der Abstand des Punkts C von der Ebene T den Wert $3\sqrt{2}$ hat.

   b) Die Gerade g steht senkrecht auf der Ebene T und halbiert die Diagonale $[BG]$. Stellen Sie eine Gleichung von g auf.

   c) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte C und F. Verwenden Sie dabei, dass die x_1-Koordinate von C kleiner ist als die von F.
   [Ergebnis: $C(4\,|\,7\,|\,2)$, $F(10\,|\,1\,|\,2)$]

   d) Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte D und E.

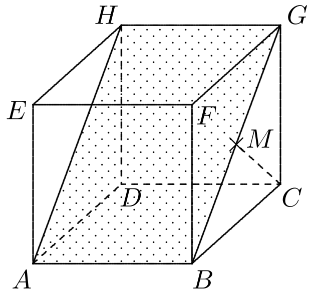
3. Die sechs Mittelpunkte der Seitenflächen des Würfels sind Eckpunkte eines regulären Oktaeders.
   a) Begründen Sie anhand einer Skizze, dass die Kantenlänge des Oktaeders halb so lang ist wie die Diagonale einer Würfelseitenfläche.

   b) Eine der Seitenflächen des Oktaeders liegt in der Ebene mit der Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 - 7 = 0$ (Nachweis nicht erforderlich).
   Bestimmen Sie den Abstand d des Oktaedermittelpunkts von einer Seitenfläche des Oktaeders.
   [zur Kontrolle: $d = \sqrt{3}$]

   c) Geben Sie eine Gleichung der Inkugel des Oktaeders an.

   d) Um wie viel Prozent (auf eine Dezimale genau) ist das Volumen der Inkugel des Oktaeders kleiner als das Volumen des Oktaeders?

Oktaeder-Aufgabe Abiturprüfung GK Bayern 2000 Lösungen



Gegeben sind im kartesischen Koordinatensystem die Punkte $A(2\,|\,-1\,|\,0)$, $B(6\,|\,3\,|\,-2)$ und $H(4\,|\,1\,|\,8)$. Die Punkte A, B und H sind Eckpunkte des Würfels $ABCDEFGH$.

1. a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene T, die durch das Dreieck ABH bestimmt ist, in Normalenform. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat T?

[mögliches Ergebnis: $x_1 - x_2 - 3 = 0$]

b) Das Dreieck ABH wird durch den Punkt G zu dem Rechteck $ABGH$ ergänzt. Berechnen Sie die Koordinaten von G.

[Ergebnis: $G(8\,|\,5\,|\,6)$]

2. Nun sollen die Koordinaten der übrigen Eckpunkte ermittelt werden.

a) Bestimmen Sie die Länge der Diagonalen $[BG]$ und begründen Sie, dass der Abstand des Punkts C von der Ebene T den Wert $3\sqrt{2}$ hat.

$|\overrightarrow{BG}| = 6\sqrt{2}$

b) Die Gerade g steht senkrecht auf der Ebene T und halbiert die Diagonale $[BG]$. Stellen Sie eine Gleichung von g auf.

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte C und F. Verwenden Sie dabei, dass die x_1-Koordinate von C kleiner ist als die von F.

[Ergebnis: $C(4\,|\,7\,|\,2)$, $F(10\,|\,1\,|\,2)$]

$M(7\,|\,4\,|\,2)$

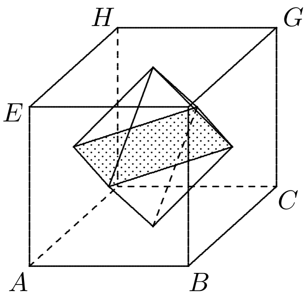
$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} - 3\sqrt{2}\cdot\vec{u}_g^{\circ}$, $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OM} + 3\sqrt{2}\cdot\vec{u}_g^{\circ}$

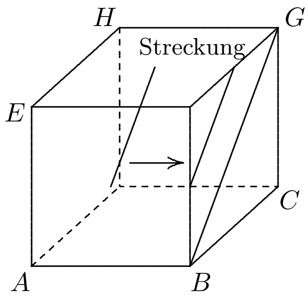
d) Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte D und E.

$D(0\,|\,3\,|\,4)$, $E(6\,|\,-3\,|\,4)$

3. Die sechs Mittelpunkte der Seitenflächen des Würfels sind Eckpunkte eines regulären Oktaeders.

a) Begründen Sie anhand einer Skizze, dass die Kantenlänge des Oktaeders halb so lang ist wie die Diagonale einer Würfelseitenfläche.





b) Eine der Seitenflächen des Oktaeders liegt in der Ebene mit der Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 - 7 = 0$ (Nachweis nicht erforderlich).
Bestimmen Sie den Abstand d des Oktaedermittelpunkts von einer Seitenfläche des Oktaeders.

[zur Kontrolle: $d = \sqrt{3}$] $M_{\text{Oktaeder}}(5\,|\,2\,|\,3)$

c) Geben Sie eine Gleichung der Inkugel des Oktaeders an.

$[\vec{x} - \overrightarrow{OM}_{\text{Oktaeder}}]^2 = 3$

d) Um wie viel Prozent (auf eine Dezimale genau) ist das Volumen der Inkugel des Oktaeders kleiner als das Volumen des Oktaeders?

$$V_{\text{Oktaeder}} = 2\cdot\frac{1}{3}\,G\cdot h = 2\cdot\frac{1}{3}\left(3\sqrt{2}\right)^2\cdot 3 = 36\ VE$$

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3}\left(\sqrt{3}\right)^2\pi = 21{,}77\ VE \qquad 39{,}5\,\%$$