Schwarzfahrer-Aufgabe aus Abiturprüfung Bayern GK

1. a) Auf dem Bahnsteig einer U-Bahn befindet sich eine Sitzbank mit 10 Plätzen. Auf diese setzen sich 10 Personen, von denen 2 keinen gültigen Fahrausweis haben (Schwarzfahrer).

   1) Auf wie viele verschiedene Arten können sie Platz nehmen, wenn nur zwischen Personen mit und ohne gültigem Fahrausweis unterschieden wird?
   In wie vielen Fällen sitzen dabei die Schwarzfahrer nebeneinander?

   2) Von den 10 Personen werden 2 zufällig ausgewählt und kontrolliert.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich darunter genau 1 Schwarzfahrer?

   b) Wie hoch muss der Anteil der Schwarzfahrer an allen Fahrgästen mindestens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 99% unter 100 Fahrgästen mindestens ein Schwarzfahrer ist?

   c) 97 % aller Fahrgäste haben einen gültigen Fahrausweis. Ein Kontrolleur überprüft 5 % der Fahrgäste. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrgast ein Schwarzfahrer ist und von ihm kontrolliert wird, beträgt 0,20 %. Untersuchen Sie, ob der Kontrolleur einen geschärften Blick für Schwarzfahrer hat oder ob die Auswahl der kontrollierten Personen rein zufällig erfolgt.

   d) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich ein Fahrgast bei einer Kontrolle als Schwarzfahrer erweist, beträgt 5 %.
   Es werden 100 Einzelkontrollen durchgeführt.

   1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter mindestens 3 und höchstens 8 Schwarzfahrer?

   2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden genau 3 Schwarzfahrer ertappt, die sich zudem nicht unter den ersten 20 Kontrollierten befinden?

   e) Es wird vermutet, dass auf Grund verstärkter Kontrollen der Anteil Schwarzfahrer unter 5% gesunken ist. Um dies zu testen, werden 200 Einzelkontrollen ausgewertet. Die Wahrscheinlichkeit dafür, irrtümlich anzunehmen, dass der Anteil der Schwarzfahrer gesunken ist, soll höchstens 10% betragen. Ermitteln Sie die Entscheidungsregel.

Schwarzfahrer-Aufgabe Lösungen

1. a) Auf dem Bahnsteig einer U-Bahn befindet sich eine Sitzbank mit 10 Plätzen. Auf diese setzen sich 10 Personen, von denen 2 keinen gültigen Fahrausweis haben (Schwarzfahrer).

   1) Auf wie viele verschiedene Arten können sie Platz nehmen, wenn nur zwischen Personen mit und ohne gültigem Fahrausweis unterschieden wird?

   $\binom{10}{2} = 45$

   In wie vielen Fällen sitzen dabei die Schwarzfahrer nebeneinander?

   9 Möglichkeiten

   2) Von den 10 Personen werden 2 zufällig ausgewählt und kontrolliert.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich darunter genau 1 Schwarzfahrer?

   $\frac{16}{45}$

   (hypergeometrisch)

   b) Wie hoch muss der Anteil der Schwarzfahrer an allen Fahrgästen mindestens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 99% unter 100 Fahrgästen mindestens ein Schwarzfahrer ist?

   $(1-p)^{100} \leq 0{,}01$ 4,5 %

   c) 97 % aller Fahrgäste haben einen gültigen Fahrausweis. Ein Kontrolleur überprüft 5 % der Fahrgäste. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrgast ein Schwarzfahrer ist und von ihm kontrolliert wird, beträgt 0,20 %. Untersuchen Sie, ob der Kontrolleur einen geschärften Blick für Schwarzfahrer hat oder ob die Auswahl der kontrollierten Personen rein zufällig erfolgt.

   $P(\text{Schwarzfahrer und wird kontrolliert}) = 0{,}03 \cdot 0{,}05 = 0{,}15\,\%$
   Kontrolleur hat einen geschärften Blick.

   d) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich ein Fahrgast bei einer Kontrolle als Schwarzfahrer erweist, beträgt 5 %.
   Es werden 100 Einzelkontrollen durchgeführt.

   1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter mindestens 3 und höchstens 8 Schwarzfahrer?

   $P(3 \leq X \leq 8) = 81{,}9\,\%$.

   2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden genau 3 Schwarzfahrer ertappt, die sich zudem nicht unter den ersten 20 Kontrollierten befinden?

   $P(\text{unter 20 Kontrollierten kein Schwarzfahrer}) = 0{,}95^{20}$

   $P(\text{unter 80 Kontrollierten genau 3 Schwarzfahrer}) = \binom{80}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{77}$

   Wahrscheinlichkeit, dass beides zutrifft, beträgt 7,1 %.

   e) Es wird vermutet, dass auf Grund verstärkter Kontrollen der Anteil Schwarzfahrer unter 5 % gesunken ist. Um dies zu testen, werden 200 Einzelkontrollen ausgewertet. Die Wahrscheinlichkeit dafür, irrtümlich anzunehmen, dass der Anteil der Schwarzfahrer gesunken ist, soll höchstens 10 % betragen. Ermitteln Sie die Entscheidungsregel.

   Es kann angenommen werden, dass der Schwarzfahreranteil unter 5 % liegt, wenn weniger als 6 Schwarzfahrer angetroffen werden.

Relais-Aufgabe aus Abiturprüfung Bayern GK

2. Eine Firma stellt Relais in großer Stückzahl her.

   a) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebig herausgegriffenes Relais defekt ist, beträgt 5 %.

      1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind von zwölf Relais höchstens zwei defekt?

      2) Wie viele Relais muss man der Produktion mindestens entnehmen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % wenigstens ein defektes Relais zu erhalten?

   b) Es wird vermutet, dass die Ausschusswahrscheinlichkeit gestiegen ist. Man entnimmt eine Stichprobe von 200 Relais. Wie groß müsste dabei die Anzahl k der defekten Relais mindestens sein, wenn man die ursprüngliche Annahme von $p = 5\,\%$ höchstens mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 % irrtümlich verworfen will?

   c) Ein Großabnehmer knüpft den Abschluss eines Liefervertrags an folgende Bedingung: Zunächst werden 50 Relais auf Funktionsfähigkeit geprüft. Sind zwei oder weniger Relais defekt, wird der Liefervertrag unterzeichnet. Bei vier und mehr defekten Relais kommt kein Vertrag zustande. Falls genau drei der 50 Relais defekt sind, werden 25 weitere getestet, von denen für einen Vertragsabschluss höchstens eines defekt sein darf.

      1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt es zu der zweiten Stichprobe, falls die Wahrscheinlichkeit für ein defektes Relais 5 % beträgt?

      2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Liefervertrag unterzeichnet wird, falls die Wahrscheinlichkeit für ein defektes Relais 5 % beträgt?

   d) Drei defekte und vier intakte, sonst nicht unterscheidbare Relais werden in einer Reihe angeordnet.

      1) Wie viele Möglichkeiten gibt es hierfür?

      2) In wie vielen Fällen liegen genau zwei defekte Relais nebeneinander?

Relais-Aufgabe Lösungen

2. Eine Firma stellt Relais in großer Stückzahl her.

 a) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebig herausgegriffenes Relais defekt ist, beträgt 5 %.

  1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind von zwölf Relais höchstens zwei defekt?

  $P(X \leq 2) = 98{,}0\,\%$

  2) Wie viele Relais muss man der Produktion mindestens entnehmen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % wenigstens ein defektes Relais zu erhalten?

  mindestens 45 Relais

 b) Es wird vermutet, dass die Ausschusswahrscheinlichkeit gestiegen ist. Man entnimmt eine Stichprobe von 200 Relais. Wie groß müsste dabei die Anzahl k der defekten Relais mindestens sein, wenn man die ursprüngliche Annahme von $p = 5\,\%$ höchstens mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 % irrtümlich verworfen will?

  mindestens 19 Relais

 c) Ein Großabnehmer knüpft den Abschluss eines Liefervertrags an folgende Bedingung: Zunächst werden 50 Relais auf Funktionsfähigkeit geprüft. Sind zwei oder weniger Relais defekt, wird der Liefervertrag unterzeichnet. Bei vier und mehr defekten Relais kommt kein Vertrag zustande. Falls genau drei der 50 Relais defekt sind, werden 25 weitere getestet, von denen für einen Vertragsabschluss höchstens eines defekt sein darf.

  1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt es zu der zweiten Stichprobe, falls die Wahrscheinlichkeit für ein defektes Relais 5 % beträgt?

  $P(\text{zweite Stichprobe}) = P^{50}(X = 3)$

  2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Liefervertrag unterzeichnet wird, falls die Wahrscheinlichkeit für ein defektes Relais 5 % beträgt?

  $P(\text{Vertrag}) = P^{50}(X \leq 2) + P^{50}(X = 3) \cdot P^{25}(X \leq 1) = 68{,}2\,\%$

 d) Drei defekte und vier intakte, sonst nicht unterscheidbare Relais werden in einer Reihe angeordnet.

  1) Wie viele Möglichkeiten gibt es hierfür?

  $\binom{7}{3} = 35$

  2) In wie vielen Fällen liegen genau zwei defekte Relais nebeneinander?

  20 Möglichkeiten