

## Abiturienten-Aufgabe Bayern GK 2004

Die Bezeichnungen „Abiturienten“ und „Schüler“ beziehen sich im folgenden Text sowohl auf männliche als auch auf weibliche Personen. Die 100 Abiturienten eines bayerischen Gymnasiums treffen sich am Tag des schriftlichen Grundkursabiturs vor der großen Turnhalle der Schule. Darin sind die Plätze in zehn Reihen zu je zehn Einzelplätzen angeordnet (regelmäßige Anordnung in Form eines Rechtecks) und fortlaufend von 1 bis 100 nummeriert. Beim Betreten des Prüfungsraums zieht jeder Prüfling eine Platznummer im Losverfahren.

- a)
- 1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sitzt Andrea nicht auf einem Eckplatz?
  - 2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sitzt Bernd auf einem Platz, der auf allen vier Seiten von Mitschülern umgeben ist?

Eine Gruppe von sieben Schülern hat sich gemeinsam auf Stochastik vorbereitet.

- 3) Peter wünscht sich: „Hoffentlich sitzen wir alle sieben im Grundkurs-Abi in der letzten Reihe.“ Marion meint: „Egal in welcher Reihe, Hauptsache, wir sitzen in derselben Reihe.“ Gabi hört sich Peters und Marions Wunsch an und vermutet: „Da habe ich eher am nächsten Samstag einen ‚Sechser‘ im Lotto.“ Nehmen Sie zu Gabis Vermutung Stellung. (Die Wahrscheinlichkeit für einen „Sechser“ im Lotto beträgt ungefähr 1 zu 14 Millionen.)
  - 4) Beim Verlassen der Turnhalle erhält jeder Prüfling einen Fragebogen zu seinen Zukunftsplänen. Damit dieser auch ausgefüllt und abgegeben wird, werden Bücher verlost, wobei jeder Bogen mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % gewinnt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass aus der siebenköpfigen Lerngruppe mindestens zwei ein Buch gewinnen, wenn alle ihren Bogen abgeben?
- b) Durch obige Befragung der 100 Prüflinge soll die Hypothese getestet werden, dass höchstens 25 % der Prüflinge dieses Abiturjahrgangs in Bayern noch nicht wissen, wie sie sich nach der Abiturprüfung beruflich orientieren sollen. Es wird davon ausgegangen, dass die 100 Abiturienten dieser Schule einer zufälligen Auswahl bayerischer Abiturienten entsprechen. Sollten mehr als 32 der 100 Schüler noch unentschlossen sein, wird die Hypothese abgelehnt.
- 1) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Hypothese abgelehnt wird, obwohl 25 % der Prüflinge in Bayern noch nicht wissen, wie sie sich beruflich orientieren sollen.
  - 2) Schildern Sie eine Situation, in der bei obigem Test ein Fehler zweiter Art auftritt. Berechnen Sie anschließend die Wahrscheinlichkeit des Fehlers zweiter Art für ein von Ihnen gewähltes Zahlenbeispiel.
- c) Von den 100 Abiturienten des Prüfungsjahrgangs erreichen die 24 Jahrgangsbesten eine Gesamtnote, die mit einer 1 vor dem Komma beginnt. Es werden die Ereignisse „Ein zufällig ausgewählter Abiturient gehört zu den 24 Jahrgangsbesten“ und „Ein zufällig ausgewählter Abiturient ist weiblich“ betrachtet.
- 1) Zeigen Sie, dass die beiden Ereignisse stochastisch abhängig sind, falls sich im gesamten Prüfungsjahrgang 37 und unter den Jahrgangsbesten 11 Frauen befinden.
  - 2) Wie viele Frauen müssen unter den 24 Besten und wie viele unter den gesamten 100 Abiturienten sein, damit obige Ereignisse stochastisch unabhängig sind? Bestimmen Sie alle Möglichkeiten. (Eine reine Knaben- bzw. Mädchenschule kann auf Grund der in Aufgabe a) genannten Schüler ausgeschlossen werden.)

## Abiturienten-Aufgabe      Lösungen

Die Bezeichnungen „Abiturienten“ und „Schüler“ beziehen sich im folgenden Text sowohl auf männliche als auch auf weibliche Personen. Die 100 Abiturienten eines bayerischen Gymnasiums treffen sich am Tag des schriftlichen Grundkursabiturs vor der großen Turnhalle der Schule. Darin sind die Plätze in zehn Reihen zu je zehn Einzelplätzen angeordnet (regelmäßige Anordnung in Form eines Rechtecks) und fortlaufend von 1 bis 100 nummeriert. Beim Betreten des Prüfungsraums zieht jeder Prüfling eine Platznummer im Losverfahren.

- a) 1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sitzt Andrea nicht auf einem Eckplatz?

$$\frac{100 - 4}{100} = 1 - \frac{4}{100} = 96\%$$

- 2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sitzt Bernd auf einem Platz, der auf allen vier Seiten von Mitschülern umgeben ist?

$$\frac{100 - 2 \cdot 10 - 2 \cdot 8}{100} = 64\%$$

Eine Gruppe von sieben Schülern hat sich gemeinsam auf Stochastik vorbereitet.

- 3) Peter wünscht sich: „Hoffentlich sitzen wir alle sieben im Grundkurs-Abi in der letzten Reihe.“ Marion meint: „Egal in welcher Reihe, Hauptsache, wir sitzen in derselben Reihe.“ Gabi hört sich Peters und Marions Wunsch an und vermutet: „Da habe ich eher am nächsten Samstag einen ‚Sechser‘ im Lotto.“ Nehmen Sie zu Gabis Vermutung Stellung. (Die Wahrscheinlichkeit für einen „Sechser“ im Lotto beträgt ungefähr 1 zu 14 Millionen.)

$$P(\text{Schüler sitzen in der letzten Reihe}) = \frac{\binom{10}{7}}{\binom{100}{7}}$$

$$P(\text{Schüler sitzen in einer Reihe}) = 10 \cdot P(\text{Schüler sitzen in der letzten Reihe})$$

$$P(\text{Schüler sitzen in der letzten Reihe}) < P(\text{Sechser im Lotto}) < P(\text{Schüler sitzen in einer Reihe})$$

- 4) Beim Verlassen der Turnhalle erhält jeder Prüfling einen Fragebogen zu seinen Zukunftsplänen. Damit dieser auch ausgefüllt und abgegeben wird, werden Bücher verlost, wobei jeder Bogen mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % gewinnt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass aus der siebenköpfigen Lerngruppe mindestens zwei ein Buch gewinnen, wenn alle ihren Bogen abgeben?

$$P_{0,2}^7(X \geq 2) = 42,3\%$$

- b) Durch obige Befragung der 100 Prüflinge soll die Hypothese getestet werden, dass höchstens 25 % der Prüflinge dieses Abiturjahrgangs in Bayern noch nicht wissen, wie sie sich nach der Abiturprüfung beruflich orientieren sollen. Es wird davon ausgegangen, dass die 100 Abiturienten dieser Schule einer zufälligen Auswahl bayerischer Abiturienten entsprechen. Sollten mehr als 32 der 100 Schüler noch unentschlossen sein, wird die Hypothese abgelehnt.

- 1) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Hypothese abgelehnt wird, obwohl 25 % der Prüflinge in Bayern noch nicht wissen, wie sie sich beruflich orientieren sollen.

$$P_{0,25}^{100}(Y \geq 33) = 4,5\%$$

- 2) Schildern Sie eine Situation, in der bei obigem Test ein Fehler zweiter Art auftritt. Berechnen Sie anschließend die Wahrscheinlichkeit des Fehlers zweiter Art für ein von Ihnen gewähltes Zahlenbeispiel.

$$P_{0,3}^{100}(Y \leq 32) = 71,1\%$$

- c) Von den 100 Abiturienten des Prüfungsjahrgangs erreichen die 24 Jahrgangsbesten eine Gesamtnote, die mit einer 1 vor dem Komma beginnt. Es werden die Ereignisse „Ein zufällig ausgewählter Abiturient gehört zu den 24 Jahrgangsbesten“ und „Ein zufällig ausgewählter Abiturient ist weiblich“ betrachtet.

- 1) Zeigen Sie, dass die beiden Ereignisse stochastisch abhängig sind, falls sich im gesamten Prüfungsjahrgang 37 und unter den Jahrgangsbesten 11 Frauen befinden.

	W	$\bar{W}$	Summe
$J$	11	...	24
$\bar{J}$	...	...	...
Summe	37	...	100

Unabhängigkeit liegt vor, falls gilt:  $P(J \cap W) = P(J) \cdot P(W)$

Es ist jedoch:  $\frac{11}{100} \neq \frac{24}{100} \cdot \frac{37}{100}$

- 2) Wie viele Frauen müssen unter den 24 Besten und wie viele unter den gesamten 100 Abiturienten sein, damit obige Ereignisse stochastisch unabhängig sind? Bestimmen Sie alle Möglichkeiten. (Eine reine Knaben- bzw. Mädchenschule kann auf Grund der in Aufgabe a) genannten Schüler ausgeschlossen werden.)

	W	$\bar{W}$	Summe
$J$	$a$	...	24
$\bar{J}$	...	...	...
Summe	$b$	...	100

$a$  Frauen unter den 24 Besten

$b$  Frauen insgesamt

$$P(J \cap W) = P(J) \cdot P(W) \iff \frac{a}{100} = \frac{24}{100} \cdot \frac{b}{100} \iff \frac{a}{b} = \frac{24}{100}$$

$(a; b), (6; 25), (12; 50), (18; 75)$

## Euro-Aufgabe    Abiturprüfung GK Bayern 2004

Euro-Münzen werden in Deutschland an fünf verschiedenen Prägestätten hergestellt. Der Prägeort wird durch einen Kennbuchstaben auf der Münze angegeben (Zuordnung siehe Tabelle). Für die sich in Deutschland im Umlauf befindenden 2-Euro-Münzen werden unter Einbeziehung ausländischer Münzen folgende Anteile angenommen:

Berlin (A)	München (D)	Stuttgart (F)	Karlsruhe (G)	Hamburg (J)	Ausland
18 %	22 %	25 %	12 %	18 %	5 %

Man geht von einer guten Durchmischung der Euro-Münzen in Deutschland aus.

1.
  - a) In Deutschland sind 230 Millionen 2-Euro-Münzen mit dem Prägeort Hamburg im Umlauf. Berechnen Sie, wie viele 2-Euro-Münzen insgesamt in Deutschland im Umlauf sind (Rundung auf Millionen). Wie groß ist der Anteil der 2-Euro-Münzen mit Prägeort Berlin unter allen deutschen 2-Euro-Münzen?
  - b) Brigitte hat fünf 2-Euro-Münzen im Geldbeutel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau drei mit Prägeort München dabei?
  - c) Beschreiben Sie kurz ein zum Sachzusammenhang passendes Zufallsexperiment und dazu ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit  $3! \cdot 0,18 \cdot 0,22 \cdot 0,12$  beträgt.
  - d) Dieter sammelt 2-Euro-Münzen. Er untersucht die nächsten 2-Euro-Münzen, die er bekommt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit entdeckt er bei der fünften untersuchten Münze zum zweiten Mal den Kennbuchstaben D?
  - e) Wie viele 2-Euro-Münzen muss Dieter mindestens untersuchen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98 % wenigstens eine ausländische 2-Euro-Münze findet?
2. Dieter bewahrt fünf verschiedene deutsche 2-Euro-Münzen und sechs verschiedene ausländische 2-Euro-Münzen in einem Kästchen auf.
  - a) Er greift blind in das Kästchen und hat fünf Münzen in der Hand. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter genau zwei deutsche 2-Euro-Münzen?
  - b) Er legt nun alle elf verschiedenen Münzen nebeneinander auf den Tisch. Auf wie viele verschiedene Arten kann er sie anordnen, wenn die fünf deutschen 2-Euro-Münzen nebeneinander liegen sollen?
3. Ein Münzhändler behauptet, dass eine große Urne, die mit sehr vielen 1-Cent-Münzen gefüllt ist, mindestens 10% finnische 1-Cent-Münzen enthält. Diese haben als einzige Münzen in der Urne Sammlerwert.
  - a) Dieter zahlt 15 € und darf dafür 20 Münzen aus der Urne ziehen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit geht das Geschäft für Dieter günstig aus, falls 10 % finnische 1-Cent-Münzen in der Urne sind und Dieter einen Sammlerwert von 6 € für eine solche Münze ansetzt?
  - b) Dieter äußert Skepsis gegenüber der Behauptung des Münzhändlers. Dieser bietet Dieter an, die Hypothese, dass mindestens 10 % finnische 1-Cent-Münzen in der Urne sind, mit Hilfe einer Stichprobe vom Umfang 200 zu testen. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Hypothese irrtümlich abgelehnt wird, höchstens 5 % sein soll.

## Euro-Aufgabe    Abiturprüfung GK Bayern 2004    Lösungen

Euro-Münzen werden in Deutschland an fünf verschiedenen Prägestätten hergestellt. Der Prägeort wird durch einen Kennbuchstaben auf der Münze angegeben (Zuordnung siehe Tabelle). Für die sich in Deutschland im Umlauf befindenden 2-Euro-Münzen werden unter Einbeziehung ausländischer Münzen folgende Anteile angenommen:

Berlin (A)	München (D)	Stuttgart (F)	Karlsruhe (G)	Hamburg (J)	Ausland
18 %	22 %	25 %	12 %	18 %	5 %

Man geht von einer guten Durchmischung der Euro-Münzen in Deutschland aus.

1. a) In Deutschland sind 230 Millionen 2-Euro-Münzen mit dem Prägeort Hamburg im Umlauf. Berechnen Sie, wie viele 2-Euro-Münzen insgesamt in Deutschland im Umlauf sind (Rundung auf Millionen). Wie groß ist der Anteil der 2-Euro-Münzen mit Prägeort Berlin unter allen deutschen 2-Euro-Münzen? 1278 Millionen, 18,9% (lediglich Prozentrechnung)
  - b) Brigitte hat fünf 2-Euro-Münzen im Geldbeutel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau drei mit Prägeort München dabei?  $P_{0,22}^5(X = 3) = 6,5\%$
  - c) Beschreiben Sie kurz ein zum Sachzusammenhang passendes Zufallsexperiment und dazu ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit  $3! \cdot 0,18 \cdot 0,22 \cdot 0,12$  beträgt.  
Drei verschiedene Münzen (Berlin, München, Karlsruhe) werden entnommen, Reihenfolge ist beliebig.
  - d) Dieter sammelt 2-Euro-Münzen. Er untersucht die nächsten 2-Euro-Münzen, die er bekommt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit entdeckt er bei der fünften untersuchten Münze zum zweiten Mal den Kennbuchstaben D?  $P_{0,22}^4(Y = 1) \cdot 0,22 = 9,2\%$
  - e) Wie viele 2-Euro-Münzen muss Dieter mindestens untersuchen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98% wenigstens eine ausländische 2-Euro-Münze findet?  
 $P_{0,05}^n(Z \geq 1) = 1 - P_{0,95}^n(Z = 0) = 1 - 0,95^n > 98\% \implies n \geq 77$
2. Dieter bewahrt fünf verschiedene deutsche 2-Euro-Münzen und sechs verschiedene ausländische 2-Euro-Münzen in einem Kästchen auf.
    - a) Er greift blind in das Kästchen und hat fünf Münzen in der Hand. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter genau zwei deutsche 2-Euro-Münzen?  $\frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{3}}{\binom{11}{5}} = 43,3\%$
    - b) Er legt nun alle elf verschiedenen Münzen nebeneinander auf den Tisch. Auf wie viele verschiedene Arten kann er sie anordnen, wenn die fünf deutschen 2-Euro-Münzen nebeneinander liegen sollen?  $5! \cdot 6! \cdot 7 = 604800$
  3. Ein Münzhändler behauptet, dass eine große Urne, die mit sehr vielen 1-Cent-Münzen gefüllt ist, mindestens 10% finnische 1-Cent-Münzen enthält. Diese haben als einzige Münzen in der Urne Sammlerwert.
    - a) Dieter zahlt 15 € und darf dafür 20 Münzen aus der Urne ziehen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit geht das Geschäft für Dieter günstig aus, falls 10% finnische 1-Cent-Münzen in der Urne sind und Dieter einen Sammlerwert von 6 € für eine solche Münze ansetzt?  $P_{0,1}^{20}(X \geq 3) = 32,3\%$
    - b) Dieter äußert Skepsis gegenüber der Behauptung des Münzhändlers. Dieser bietet Dieter an, die Hypothese, dass mindestens 10% finnische 1-Cent-Münzen in der Urne sind, mit Hilfe einer Stichprobe vom Umfang 200 zu testen. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Hypothese irrtümlich abgelehnt wird, höchstens 5% sein soll.  
 $P_{0,1}^{200}(Y \leq k) \leq 5\% \implies k \leq 12, \bar{A} = \{0, \dots, 12\}$  (Ablehnungsbereich für die Nullhypothese)