

Quiz-Aufgabe Abiturprüfung GK Bayern 2002

Zur Fernsehshow „Quiz 2002“ sind 2 Damen und 4 Herren als Kandidaten eingeladen.

1. Die Stühle, auf denen die Kandidaten Platz nehmen, sind halbkreisförmig angeordnet. Links und rechts vom Moderator sitzen jeweils 3 Kandidaten. Wie viele Sitzordnungen sind möglich, wenn
 - a) nur nach dem Geschlecht unterschieden wird?
 - b) nach den Personen unterschieden wird und die beiden Damen auf verschiedenen Seiten des Moderators sitzen sollen?

An einer Quizrunde dürfen zwei der Kandidaten teilnehmen.

2. Zur Auswahl des ersten Teilnehmers würfelt jeder der 6 Kandidaten (genau) einmal mit einem Laplace-Würfel. Wenn einer als Einziger eine Sechs geworfen hat, so darf er an der Quizrunde teilnehmen. Anderenfalls wird das Verfahren wiederholt.
 - a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Teilnehmer bereits nach der ersten Würfelrunde feststeht? [zur Kontrolle: 40,2%]
 - b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit steht der erste Teilnehmer spätestens nach der dritten Würfelrunde fest?
3. Zur Auswahl des zweiten Quizteilnehmers müssen die verbleibenden Kandidaten n Städte nach aufsteigender Einwohnerzahl ordnen. Wie groß muss n mindestens sein, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, die richtige Reihenfolge ohne Sachkenntnis zufällig zu erraten, kleiner als 2 Promille ist?
4. In der Quizrunde werden Fragen gestellt, die ein Zufallsgenerator aus den Bereichen Politik, Geografie, Film, Musik und Sport auswählt, so dass jeder Bereich mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorkommt.
 - a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 5 unabhängig ausgewählten Fragen jede aus einem anderen Bereich stammt?
 - b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind von 10 unabhängig ausgewählten Fragen wenigstens 4 aus dem Bereich Sport?
5. Der Moderator behauptet, dass mindestens 30 % der Zuschauer „Quiz 2002“ mit sehr gut (Note 1) beurteilen.
 - a) Um dies zu testen, sollen 200 zufällig ausgewählte Zuschauer befragt werden. Die Behauptung des Moderators soll mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 20% irrtümlich abgelehnt werden. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich für die Behauptung des Moderators.

Eine Umfrage, bei der 200 Zuschauer die Noten 1 bis 4 vergeben konnten, brachte folgendes Ergebnis:

Note	1	2	3	4
<i>männlich</i>	22	55	33	10
<i>weiblich</i>	30	36	14	0

- b) Berechnen Sie die von den männlichen Zuschauern und die von den weiblichen Zuschauern vergebene Durchschnittsnote auf 1 Dezimale gerundet. Stellen Sie die Verteilung der von den Frauen vergebenen Noten in einem Kreisdiagramm dar (Prozentwerte und zugehörige Mittelpunktswinkel sind anzugeben).
- c) Der Moderator bezweifelt die Aussagekraft der Umfrage, weil weniger Frauen als Männer befragt worden sind. Unter welcher Voraussetzung könnte man diesen Einwand zurückweisen?

Quiz-Aufgabe Abiturprüfung GK Bayern 2002 Lösungen

Zur Fernsehshow „Quiz 2002“ sind 2 Damen und 4 Herren als Kandidaten eingeladen.

1. Die Stühle, auf denen die Kandidaten Platz nehmen, sind halbkreisförmig angeordnet. Links und rechts vom Moderator sitzen jeweils 3 Kandidaten. Wie viele Sitzordnungen sind möglich, wenn
 - a) nur nach dem Geschlecht unterschieden wird? $\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15 \quad (= \frac{6!}{4! \cdot 2!})$
 - b) nach den Personen unterschieden wird und die beiden Damen auf verschiedenen Seiten des Moderators sitzen sollen? $2! \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4! = 432$

An einer Quizrunde dürfen zwei der Kandidaten teilnehmen.

2. Zur Auswahl des ersten Teilnehmers würfelt jeder der 6 Kandidaten (genau) einmal mit einem Laplace-Würfel. Wenn einer als Einziger eine Sechs geworfen hat, so darf er an der Quizrunde teilnehmen. Anderenfalls wird das Verfahren wiederholt.
 - a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Teilnehmer bereits nach der ersten Würfelrunde feststeht? $P_1^6(X = 1) = 40,2\%$
 - b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit steht der erste Teilnehmer spätestens nach der dritten Würfelrunde fest? $p^* = 40,2\%, \quad q^* = 1 - p^*, \quad p^* + (1 - p^*) \cdot p^* + (1 - p^*)^2 \cdot p^* = 1 - (1 - p^*)^3 = 78,6\%$
3. Zur Auswahl des zweiten Quizteilnehmers müssen die verbleibenden Kandidaten n Städte nach aufsteigender Einwohnerzahl ordnen. Wie groß muss n mindestens sein, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, die richtige Reihenfolge ohne Sachkenntnis zufällig zu erraten, kleiner als 2 Promille ist?

$$\frac{1}{n!} < 0,002 \iff n! > 500, \quad \text{mindestens } n = 6$$

4. In der Quizrunde werden Fragen gestellt, die ein Zufallsgenerator aus den Bereichen Politik, Geografie, Film, Musik und Sport auswählt, so dass jeder Bereich mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorkommt.
 - a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 5 unabhängig ausgewählten Fragen jede aus einem anderen Bereich stammt? $\frac{5!}{5^5} = 3,8\%$
 - b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind von 10 unabhängig ausgewählten Fragen wenigstens 4 aus dem Bereich Sport? $P_1^{10}(Y \geq 4) = 12,1\%$
5. Der Moderator behauptet, dass mindestens 30 % der Zuschauer „Quiz 2002“ mit sehr gut (Note 1) beurteilen.
 - a) Um dies zu testen, sollen 200 zufällig ausgewählte Zuschauer befragt werden. Die Behauptung des Moderators soll mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 20 % irrtümlich abgelehnt werden. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich für die Behauptung des Moderators. $P_{0,3}^{200}(Z \leq k) \leq 20\% \implies \bar{A} = \{0, \dots, 54\}$

Eine Umfrage, bei der 200 Zuschauer die Noten 1 bis 4 vergeben konnten, brachte folgendes Ergebnis:

Note	1	2	3	4
männlich	22	55	33	10
weiblich	30	36	14	0

- b) Berechnen Sie die von den männlichen Zuschauern und die von den weiblichen Zuschauern vergebene Durchschnittsnote auf 1 Dezimale gerundet. Stellen Sie die Verteilung der von den Frauen vergebenen Noten in einem Kreisdiagramm dar (Prozentwerte und zugehörige Mittelpunktswinkel sind anzugeben).

$D_{\text{männlich}} = 2,3 \quad D_{\text{weiblich}} = 1,8 \quad \frac{30}{80} = 37,5\% \quad (135^\circ), \quad \frac{36}{80} = 45\% \quad (162^\circ), \quad 17,5\% \quad (63^\circ), \quad 0\% \quad (0^\circ)$
- c) Der Moderator bezweifelt die Aussagekraft der Umfrage, weil weniger Frauen als Männer befragt worden sind. Unter welcher Voraussetzung könnte man diesen Einwand zurückweisen?

Die Umfrage ist repräsentativ, das Verhältnis männlich/weiblich in der Umfrage und bei den Zuschauern ist gleich.

Ferienaufenthalt-Aufgabe Abiturprüfung GK Bayern 2002

Eine schottische Stadt lädt 10 Jugendliche aus ihrer bayerischen Partnerstadt zu einem Ferienaufenthalt ein.

1. Die Unterbringung erfolgt in Gastfamilien, von denen 6 ein Mädchen und 4 einen Jungen aufnehmen wollen. Gemäß dieser Vorgabe werden die Teilnehmer aus 15 Interessenten ausgewählt, von denen zwei Drittel weiblich sind.
 - a) Wie viele verschiedene Zusammenstellungen der Gruppe sind möglich?
 - b) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die ausgewählten Jugendlichen auf die 10 Gastfamilien zu verteilen?
 - c) Nachdem die Gruppe zusammengestellt worden ist, zieht eine Familie ihre Einladung für ein Mädchen zurück. Glücklicherweise erklären sich aber 3 Familien bereit, ein zweites Mädchen bei sich aufzunehmen. Wie viele Möglichkeiten gibt es nun, die weiblichen Gruppenmitglieder auf die für sie verbleibenden 5 Gastfamilien zu verteilen?
2. Die 10-köpfige Jugendgruppe wird von 2 erwachsenen Betreuern begleitet. Langjährige Erfahrung zeigt, dass aufgrund des regnerischen Klimas im Mittel 12 % der Jugendlichen und 8 % der Erwachsenen während ihres Aufenthaltes an einer Erkältung erkranken (Unabhängigkeit der Erkrankungen wird angenommen).
 - a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden Betreuer gesund bleiben?
 - b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erkranken höchstens 2 der 10 Jugendlichen?
 - c) Wie viele Jugendliche dürften an der Reise nach Schottland höchstens teilnehmen, wenn die gesamte Gruppe einschließlich der beiden Betreuer mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 30 % gesund bleiben soll?
3. Für die Reise haben die beiden Betreuer der Gruppe 12 Plätze für einen Flug in der Economy-Klasse gebucht. Da im Mittel 5% der Buchungen storniert werden, hat die Fluggesellschaft 200 Tickets für die 190 Plätze der Economy-Klasse verkauft.
 - a) Geben Sie einen Term $P(k)$ an, der beschreibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit genau k der 200 Buchungen storniert werden. Für welches k ist diese Wahrscheinlichkeit am größten?
 - b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit reichen die Plätze der Economy-Klasse nicht aus?
 - c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleiben in der Economy-Klasse mehr als drei Plätze frei?
 - d) Tatsächlich stehen 195 Fluggäste mit gültigem Ticket für die Economy-Klasse zum Abflug bereit. Die Fluggesellschaft lässt deshalb 5 davon zufällig auswählen und ohne Aufpreis in der Business-Klasse mitfliegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt genau ein Mitglied der 12-köpfigen Gruppe in den Genuss der besseren Klasse?

Eine schottische Stadt lädt 10 Jugendliche aus ihrer bayerischen Partnerstadt zu einem Ferienaufenthalt ein.

1. Die Unterbringung erfolgt in Gastfamilien, von denen 6 ein Mädchen und 4 einen Jungen aufnehmen wollen. Gemäß dieser Vorgabe werden die Teilnehmer aus 15 Interessenten ausgewählt, von denen zwei Drittel weiblich sind.

a) Wie viele verschiedene Zusammenstellungen der Gruppe sind möglich? $\binom{10}{6} \cdot \binom{5}{4} = 1050$

b) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die ausgewählten Jugendlichen auf die 10 Gastfamilien zu verteilen? $6! \cdot 4! = 17280$

c) Nachdem die Gruppe zusammengestellt worden ist, zieht eine Familie ihre Einladung für ein Mädchen zurück. Glücklicherweise erklären sich aber 3 Familien bereit, ein zweites Mädchen bei sich aufzunehmen. Wie viele Möglichkeiten gibt es nun, die weiblichen Gruppenmitglieder auf die für sie verbleibenden 5 Gastfamilien zu verteilen? $\binom{6}{2} \cdot 3 \cdot 4! = 1080$

2. Die 10-köpfige Jugendgruppe wird von 2 erwachsenen Betreuern begleitet. Langjährige Erfahrung zeigt, dass aufgrund des regnerischen Klimas im Mittel 12 % der Jugendlichen und 8 % der Erwachsenen während ihres Aufenthaltes an einer Erkältung erkranken (Unabhängigkeit der Erkrankungen wird angenommen).

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden Betreuer gesund bleiben? $0,92^2 = 84,6\%$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erkranken höchstens 2 der 10 Jugendlichen? $P_{0,12}^{10}(X \leq 2) = 89,1\%$

c) Wie viele Jugendliche dürften an der Reise nach Schottland höchstens teilnehmen, wenn die gesamte Gruppe einschließlich der beiden Betreuer mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 30 % gesund bleiben soll? $0,88^n \cdot 0,92^2 > 0,3 \implies$ höchstens $n = 8$

3. Für die Reise haben die beiden Betreuer der Gruppe 12 Plätze für einen Flug in der Economy-Klasse gebucht. Da im Mittel 5 % der Buchungen storniert werden, hat die Fluggesellschaft 200 Tickets für die 190 Plätze der Economy-Klasse verkauft.

a) Geben Sie einen Term $P(k)$ an, der beschreibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit genau k der 200 Buchungen storniert werden. Für welches k ist diese Wahrscheinlichkeit am größten?

$$P_{0,05}^{200}(Y = k) = \binom{200}{k} \cdot 0,05^k \cdot 0,95^{200-k} \quad \text{Wahrscheinlichkeit maximal für } k = 10 \text{ (Erwartungswert)}$$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit reichen die Plätze der Economy-Klasse nicht aus? $P_{0,05}^{200}(Y \leq 9) = 45,5\%$

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleiben in der Economy-Klasse mehr als drei Plätze frei? $P_{0,05}^{200}(Y \geq 14) = 13,0\%$

d) Tatsächlich stehen 195 Fluggäste mit gültigem Ticket für die Economy-Klasse zum Abflug bereit. Die Fluggesellschaft lässt deshalb 5 davon zufällig auswählen und ohne Aufpreis in der Business-Klasse mitfliegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt genau ein Mitglied der 12-köpfigen Gruppe in den Genuss der besseren Klasse?

$$\frac{\binom{12}{1} \cdot \binom{183}{4}}{\binom{195}{5}} = 24,3\%$$