# Wasserhaushalt-Aufgabe GK Abiturprüfung Sachsen 2002 geändert

Gegeben sind die Funktionen $f$ und $g$ durch die Gleichungen $f(x) = 5 \cdot (e - e^{-x}),\ x \in \mathbb{R}$, und $g(x) = 5 \cdot (e^x - e),\ x \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass gilt: $g(-x) = -f(x)$.
Interpretieren Sie diese Aussage geometrisch.

b) Die beiden Schnittpunkte der Graphen der Funktionen $f$ und $g$ sind Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks. Bestimmen Sie den prozentualen Anteil der von den beiden Graphen eingeschlossenen Fläche an der Fläche dieses Rechtecks.

Zur Simulation des Wasserhaushalts einer Talsperre experimentieren Schüler mit einem Fass. Das Fass ist anfangs mit einer bestimmten Wassermenge gefüllt. Nun wird dem Fass einerseits gleichmäßig Wasser zugeführt und andererseits ein Loch im Boden geöffnet, so dass Wasser abläuft. Dieser Prozess kann näherungsweise durch ein mathematisches Modell beschrieben werden, wobei das Wasservolumen $V_k$ (in Volumeneinheiten) im Fass in Abhängigkeit von der Zeit $t$ (in Zeiteinheiten) durch die Funktion $V_k(t) = k \cdot (e - e^{-t}),\ t \geq 0$, $k > 0$, beschrieben wird.

c) Bestimmen Sie $k$, wenn das Anfangsvolumen des Wassers 8,6 betragen soll.
Erläutern Sie den Verlauf des Wasserpegels und ermitteln Sie, welches Fassungsvermögen dieses Fass mindestens haben muss, damit es nicht überläuft.

d) Berechnen Sie für eine beliebige Anfangsmenge den Zeitpunkt $T$, in der die Hälfte der Anfangsmenge hinzugekommen ist und zeigen Sie, dass $T$ unabhängig von $k$ ist.

Wasserhaushalt-Aufgabe GK Abiturprüfung Sachsen 2002 Lösungen

Gegeben sind die Funktionen $f$ und $g$ durch die Gleichungen $f(x) = 5 \cdot (e - e^{-x}),\ x \in \mathbb{R}$, und $g(x) = 5 \cdot (e^x - e),\ x \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass gilt: $g(-x) = -f(x)$.
Interpretieren Sie diese Aussage geometrisch. Grafik ist punktsymmetrisch.

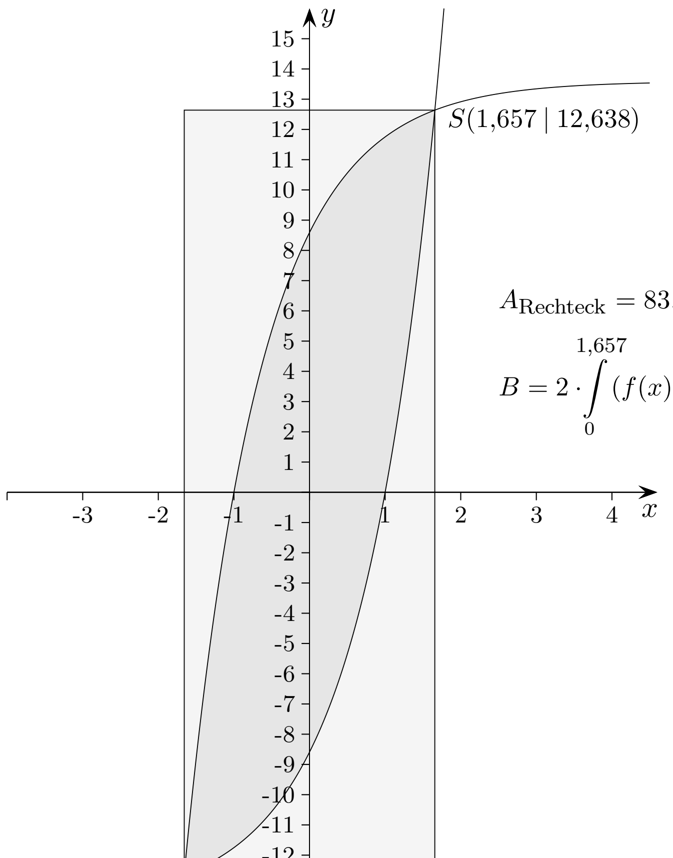
b) Die beiden Schnittpunkte der Graphen der Funktionen $f$ und $g$ sind Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks. Bestimmen Sie den prozentualen Anteil der von den beiden Graphen eingeschlossenen Fläche an der Fläche dieses Rechtecks. 47,2%

Zur Simulation des Wasserhaushalts einer Talsperre experimentieren Schüler mit einem Fass. Das Fass ist anfangs mit einer bestimmten Wassermenge gefüllt. Nun wird dem Fass einerseits gleichmäßig Wasser zugeführt und andererseits ein Loch im Boden geöffnet, so dass Wasser abläuft. Dieser Prozess kann näherungsweise durch ein mathematisches Modell beschrieben werden, wobei das Wasservolumen $V_k$ (in Volumeneinheiten) im Fass in Abhängigkeit von der Zeit $t$ (in Zeiteinheiten) durch die Funktion $V_k(t) = k \cdot (e - e^{-t}),\ t \geq 0$, $k > 0$, beschrieben wird.

c) Bestimmen Sie $k$, wenn das Anfangsvolumen des Wassers 8,6 betragen soll. $k = 5{,}0$

Erläutern Sie den Verlauf des Wasserpegels und ermitteln Sie, welches Fassungsvermögen dieses Fass mindestens haben muss, damit es nicht überläuft. $V \geq 13{,}6$

d) Berechnen Sie für eine beliebige Anfangsmenge den Zeitpunkt $T$, in der die Hälfte der Anfangsmenge hinzugekommen ist und zeigen Sie, dass $T$ unabhängig von $k$ ist. $V_k(T) = 1{,}5 \cdot V_k(0) \implies T = 1{,}96$




$A_{\text{Rechteck}} = 83{,}790$

$$B = 2 \cdot \int_0^{1{,}657} (f(x) - g(x))\,dx = 39{,}555$$