# Analysis Aufgabe aus Abiturprüfung Bayern GK *(abgeändert)*

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = (1 - x^2)\,e^{\frac{1}{2}(3-x^2)}$.

   a) Untersuchen Sie den Graphen auf Symmetrie, ermitteln Sie die Nullstellen von $f$ und bestimmen Sie das Verhalten von $f$ für $x \to \infty$.

   (Hinweis: $\lim\limits_{x\to\infty} x^n \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ darf ohne Beweis verwendet werden.)

   b) Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von $f$, und geben Sie Art und Lage der Extrempunkte an.

   [ zur Kontrolle: $f'(x) = (x^3 - 3x)\,e^{\frac{1}{2}(3-x^2)}$ ]

   c) Zeichnen Sie den Graphen von $f$.

   d) Die Schnittpunkte des Graphen von $f$ mit der $x$-Achse und ein weiterer, beliebiger Punkt des Graphen bestimmen ein Dreieck. Ermitteln Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Punkt $P$, für den das Dreieck maximalen Flächeninhalt besitzt. Geben Sie auch diesen Inhalt an.

   e) Weisen Sie nach, dass $F(x) = x\,e^{\frac{1}{2}(3-x^2)}$ eine Stammfunktion von $f$ ist.

   Bestimmen Sie unter Verwendung bisheriger Ergebnisse die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte von $F$.

   Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$.

   Was bedeutet das Ergebnis geometrisch?

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = (1 - x^2)\,e^{\frac{1}{2}(3-x^2)}$ .

   a) Untersuchen Sie den Graphen auf Symmetrie, ermitteln Sie die Nullstellen von $f$ und bestimmen Sie das Verhalten von $f$ für $x \to \infty$.

   (Hinweis: $\lim\limits_{x\to\infty} x^n \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ darf ohne Beweis verwendet werden.)

   *Graph symmetrisch zur $y$-Achse, Nullstellen:* $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

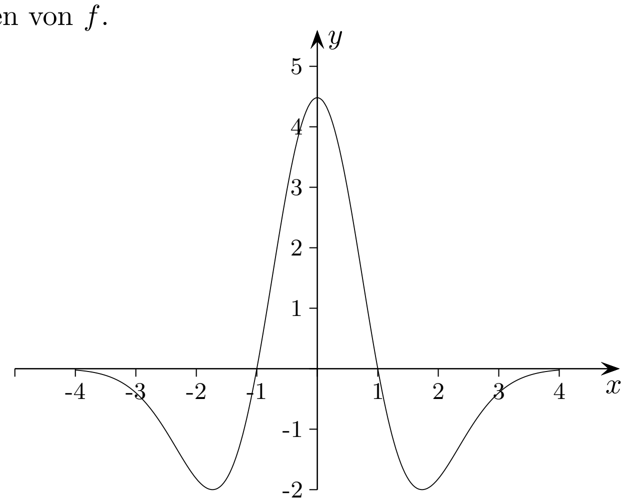
   b) Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von $f$, und geben Sie Art und Lage der Extrempunkte an.

   [ zur Kontrolle: $f'(x) = (x^3 - 3x)\,e^{\frac{1}{2}(3-x^2)}$ ]

$$
\begin{array}{rcccrcl}
-\infty & < & x & < & -\sqrt{3} & : & f'(x) < 0 \\
-\sqrt{3} & < & x & < & 0 & : & f'(x) > 0 \\
0 & < & x & < & \sqrt{3} & : & f'(x) < 0 \\
\sqrt{3} & < & x & < & +\infty & : & f'(x) > 0
\end{array}
$$

$$\Longrightarrow\ \mathit{Min}\big(-\sqrt{3}\mid -2\big),\ \ \mathit{Max}\big(0\mid e^{1{,}5}\big),\ \mathit{Min}\big(\sqrt{3}\mid -2\big)$$

   c) Zeichnen Sie den Graphen von $f$.




   d) Die Schnittpunkte des Graphen von $f$ mit der $x$-Achse und ein weiterer, beliebiger Punkt des Graphen bestimmen ein Dreieck. Ermitteln Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Punkt $P$, für den das Dreieck maximalen Flächeninhalt besitzt. Geben Sie auch diesen Inhalt an.

   *unmittelbar einsichtig* $P\big(0 \mid e^{1{,}5}\big),\ \ A = e^{1{,}5}$

   e) Weisen Sie nach, dass $F(x) = x\,e^{\frac{1}{2}(3-x^2)}$ eine Stammfunktion von $f$ ist.

   Bestimmen Sie unter Verwendung bisheriger Ergebnisse die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte von $F$.

   $E_1(-1 \mid -e),\ \ E_2(1 \mid e),\ \ W_1\big(-\sqrt{3} \mid -\sqrt{3}\big),\ \ W_2(0 \mid 0),\ \ W_3\big(\sqrt{3} \mid \sqrt{3}\big)$

   Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$.

   $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 0$ *siehe Hinweis* 1.a)

   Was bedeutet das Ergebnis geometrisch?

   Die vom Graphen mit der $x$-Achse eingeschlossenen Flächenstücke oberhalb und unterhalb der $x$-Achse sind gleich groß.

# Analysis Aufgabe aus Abiturprüfung Bayern GK *(abgeändert)*

2. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = e - e^{k-\frac{x}{2}}$ , $k \in \mathbb{R}$ .

   a) Ermitteln Sie für allgemeines $k$ die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und das Verhalten der $f_k$ für $x \to -\infty$.
   Zeigen Sie, dass die Gerade $h$: $y = e$ eine Asymptote der $f_k$ für $x \to \infty$ ist und dass alle Graphen der Schar stets unterhalb von $h$ verlaufen.

   b) Untersuchen Sie das Monotonie- und das Krümmungsverhalten von $f_k$.

   c) Für welche $x$-Werte unterscheidet sich $f_{-1}(x)$ von $e$ um weniger als 0,1?
   Zeichnen Sie den Graphen von $f_{-1}$.

   d) Weisen Sie nach, dass $F_k(x) = e \cdot x + 2e^{k-\frac{x}{2}}$ eine Stammfunktion von $f$ ist.

   e) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von $f_k$, der $x$-Achse und der Geraden $x = 2k$ eingeschlossen wird.

   f) Weisen Sie nach, dass die Graphen von $f_k$ durch Verschiebung parallel zur $x$-Achse auseinander hervorgehen und stellen Sie den Bezug zur vorigen Teilaufgabe her.
   *Hinweis: Zeigen Sie, dass $f_k(x - a) = f_{k^*}(x)$ für ein geeignetes $k^*$ ist.*

   g) Die Funktionen der Schar $f_k$ sind alle umkehrbar.
   Begründen Sie dies und ermitteln Sie die Umkehrfunktionen und ihren Definitionsbereich.

2. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = e - e^{k-\frac{x}{2}}$ , $k \in \mathbb{R}$ .

a) Ermitteln Sie für allgemeines $k$ die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und das Verhalten der $f_k$ für $x \to -\infty$.
Zeigen Sie, dass die Gerade $h$: $y = e$ eine Asymptote der $f_k$ für $x \to \infty$ ist und dass alle Graphen der Schar stets unterhalb von $h$ verlaufen.

Schnittpunkt mit der $y$-Achse: $P_k\big(0 \mid e - e^k\big)$, Schnittpunkt mit der $x$-Achse: $N_k(2k - 2 \mid 0)$

$\lim\limits_{x\to\infty} f_k(x) = e, \quad e - f_k(x) > 0$

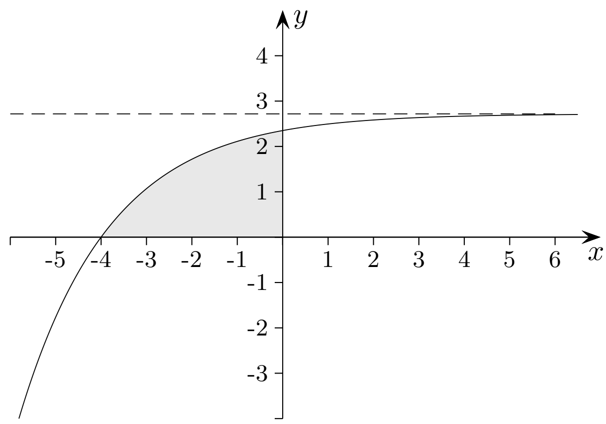
b) Untersuchen Sie das Monotonie- und das Krümmungsverhalten von $f_k$.

$f_k'(x) = \frac{1}{2}e^{k-\frac{x}{2}} > 0 \implies f_k$ streng monoton steigend.

$f_k''(x) = -\frac{1}{4}e^{k-\frac{x}{2}} < 0 \implies f_k$ rechtsgekrümmt.

c) Für welche $x$-Werte unterscheidet sich $f_{-1}(x)$ von $e$ um weniger als 0,1?
Zeichnen Sie den Graphen von $f_{-1}$.

$x > 2\ln 10 - 2 = 2{,}61$




d) Weisen Sie nach, dass $F_k(x) = e \cdot x + 2e^{k-\frac{x}{2}}$ eine Stammfunktion von $f$ ist.

$F_k'(x) = f_k(x)$

e) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von $f_k$, der $x$-Achse und der Geraden $x = 2k$ eingeschlossen wird.

$A_k = \Big[F_k(x)\Big]_{2k-2}^{2k} = 2$

f) Weisen Sie nach, dass die Graphen von $f_k$ durch Verschiebung parallel zur $x$-Achse auseinander hervorgehen und stellen Sie den Bezug zur vorigen Teilaufgabe her.
*Hinweis: Zeigen Sie, dass $f_k(x - a) = f_{k^*}(x)$ für ein geeignetes $k^*$ ist.* $k^* = k + \frac{a}{2}$

Der Flächeninhalt ist unabhängig von $k$.
Die Breite der Flächenstücke ist stets $2k - (2k - 2) = 2$,
sie gehen durch Verschiebung auseinander hervor.

g) Die Funktionen der Schar $f_k$ sind alle umkehrbar.
Begründen Sie dies und ermitteln Sie die Umkehrfunktionen und ihren Definitionsbereich.

Graphen sind monoton steigend.
$f_k^{-1}(x) = 2k - 2\ln(e - x)$
Definitionsbereich der Umkehrfunktionen: $D = ]-\infty;\ e[$

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}$ .

   a) Bestimmen Sie die Nullstellen von $f$ und das Verhalten von $f$ für $x \to -\infty$.

   b) Zeigen Sie, dass der Graph punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist.
   Geben Sie nun das Verhalten von $f$ für $x \to \infty$ an.

   c) Bilden Sie die 1. Ableitung.
   Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von $f$.

   d) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente im Ursprung.
   Zeichnen Sie den Graphen von $f$.

   e) Begründen Sie, dass $f$ umkehrbar ist und ermitteln Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}$ und ihren Definitionsbereich.

   f) Weisen Sie nach, dass $F(x) = x - \ln(1+e^{2x})$ eine Stammfunktion von $f$ ist.

   g) Die Graphen von $f$ und $f^{-1}$ und die Geraden $x=-1$ und $y=1$ begrenzen im II. Quadranten ein Flächenstück. Berechnen Sie seinen Inhalt.

## Aufgabe Lösungen aus Abiturprüfung Bayern GK

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}$ .

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von $f$ und das Verhalten von $f$ für $x \to -\infty$.

Nullstelle: $x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

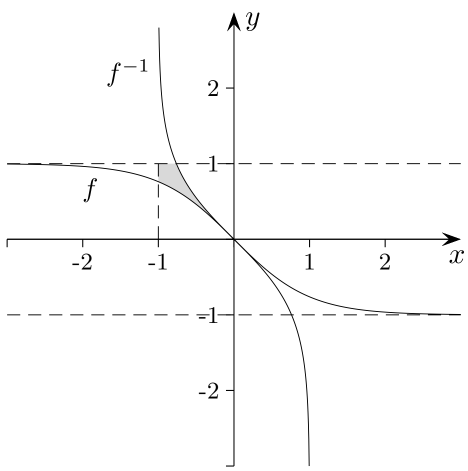
b) Zeigen Sie, dass der Graph punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist.
Geben Sie nun das Verhalten von $f$ für $x \to \infty$ an.

$f(x) = -f(-x)$ (Umformung: mit $e^{2x}$ erweitern), $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -1$

c) Bilden Sie die 1. Ableitung.
Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von $f$.

$f'(x) = \dfrac{-4e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} < 0$, $f$ fällt streng monoton.

d) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente im Ursprung. $y = -x$
Zeichnen Sie den Graphen von $f$.




e) Begründen Sie, dass $f$ umkehrbar ist und ermitteln Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}$ und ihren Definitionsbereich.

Graph ist monoton fallend, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$, $D = ]-1;1[$

f) Weisen Sie nach, dass $F(x) = x - \ln(1+e^{2x})$ eine Stammfunktion von $f$ ist.

$F'(x) = f(x)$

g) Die Graphen von $f$ und $f^{-1}$ und die Geraden $x = -1$ und $y = 1$ begrenzen im II. Quadranten ein Flächenstück. Berechnen Sie seinen Inhalt.

$$\Big[F(x)\Big]_{-1}^{0} = 1 - \ln 2 + \ln(1+e^{-2}) = 0{,}434$$

$$A = 1 - 2\cdot\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = 0{,}13$$

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{4x}{e^{0,5x}}$ mit Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$.

$G_f$ bezeichnet den Graphen von $f$.

1. a) Geben Sie die Nullstelle der Funktion an und untersuchen Sie das Verhalten von $f$ an den Grenzen des Definitionsbereichs. Geben Sie die Gleichung der horizontalen Asymptote von $G_f$ an.

   b) Untersuchen Sie das Monotonie- und das Krümmungsverhalten von $G_f$. Ermitteln Sie Lage und Art des Extrempunkts sowie die Lage des Wendepunkts von $G_f$.

   [ zur Kontrolle: $f'(x) = e^{-0,5x}(4 - 2x)$ ]

   c) Die Gleichung der Wendetangente $w$ lautet $y = \dfrac{-4}{e^2}x + \dfrac{32}{e^2}$.

   Bestätigen Sie dies durch Rechnung und ermitteln Sie den spitzen Winkel (auf Grad genau), unter dem $w$ die $y$-Achse schneidet.

   d) Berechnen Sie die Funktionswerte an den Stellen $\dfrac{1}{2}$, 1 und 6.

   Zeichnen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen $G_f$ und die Wendetangente $w$ im Bereich $-1 < x < 9$ (Längeneinheit: $1\,cm$).

2. a) Zeigen Sie, dass $F\colon x \to \dfrac{-8x - 16}{e^{0,5x}}$, $D_F = \mathbb{R}$, eine Stammfunktion von $f$ ist.

   b) Der Graph $G_f$, die $x$-Achse und die Gerade $x = 6$ schließen eine Fläche vom Inhalt $A$ ein. Berechnen Sie $A$ auf 2 Dezimalen gerundet.

3. Skizzieren Sie einen Anwendungszusammenhang beispielsweise aus den Naturwissenschaften oder der Wirtschaftslehre, in dem eine Funktion der Art $x \to a \cdot e^{bx}$ eine wichtige Rolle spielt $(a, b \neq 0)$. Begründen Sie kurz, ob der Parameter $b$ in dem von Ihnen beschriebenen Anwendungszusammenhang positiv oder negativ ist. Welche Bedeutung hat der Parameter $a$?

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{4x}{e^{0,5x}}$ mit Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$.

$G_f$ bezeichnet den Graphen von $f$.

1. a) Geben Sie die Nullstelle der Funktion an und untersuchen Sie das Verhalten von $f$ an den Grenzen des Definitionsbereichs. Geben Sie die Gleichung der horizontalen Asymptote von $G_f$ an.

   $x = 0$, Asymptote $y = 0$

   b) Untersuchen Sie das Monotonie- und das Krümmungsverhalten von $G_f$. Ermitteln Sie Lage und Art des Extrempunkts sowie die Lage des Wendepunkts von $G_f$.

   [ zur Kontrolle: $f'(x) = e^{-0,5x}(4 - 2x)$ ]

   streng monoton wachsend für $x < 2$

   streng monoton fallend für $x > 2$

   $Max\left(2 \mid \frac{8}{e}\right)$

   $f''(x) = (x-4)e^{-\frac{x}{2}}$

   linksgekrümmt für $x > 4$

   rechtsgekrümmt für $x < 4$

   $W\left(4 \mid \frac{16}{e^2}\right)$

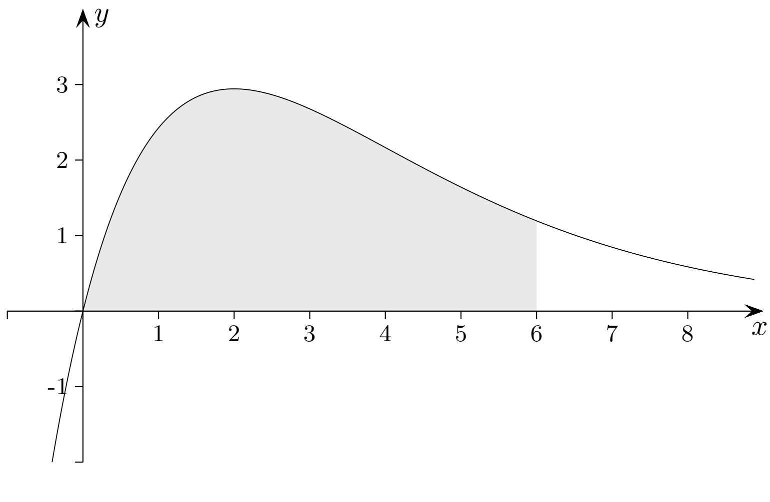
   c) Die Gleichung der Wendetangente $w$ lautet $y = \frac{-4}{e^2}x + \frac{32}{e^2}$.

   Bestätigen Sie dies durch Rechnung und ermitteln Sie den spitzen Winkel (auf Grad genau), unter dem $w$ die $y$-Achse schneidet.

   $\alpha = 62^\circ$

   d) Berechnen Sie die Funktionswerte an den Stellen $\frac{1}{2}$, 1 und 6.

   Zeichnen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen $G_f$ und die Wendetangente $w$ im Bereich $-1 < x < 9$ (Längeneinheit: 1 $cm$).




2. a) Zeigen Sie, dass $F\colon x \to \dfrac{-8x - 16}{e^{0,5x}}$, $D_F = \mathbb{R}$, eine Stammfunktion von $f$ ist.

   b) Der Graph $G_f$, die $x$-Achse und die Gerade $x = 6$ schließen eine Fläche vom Inhalt $A$ ein. Berechnen Sie $A$ auf 2 Dezimalen gerundet.

   $A = 12{,}81$

3. …