Abschlussprüfung Fachoberschule 2021
Mathematik

Aufgabenvorschlag A

1 Funktionsuntersuchung /40

Seit dem Jahr 2000 wird die Besucherzahl eines Museums regelmäßig erfasst und kann für den Zeitraum vom Jahr 2000 bis zum Jahr 2020 näherungsweise beschrieben werden durch die Funktion *f* mit:

$f(x) = -0{,}02x^4 + 9x^2 + 1800 \text{ , } x \in \mathrm{IR}.$

Dabei gibt x die Zeit in Jahren an, wobei $x = 0$ dem Jahr 2000 entspricht.
Die Anzahl der Besucher wird durch $f(x)$ angegeben.

1.1 Geben Sie einen Definitionsbereich für *f* an, der im Sachzusammenhang sinnvoll ist. **/2**

1.2 Ergänzen Sie die folgende Wertetabelle. **/2**
Hinweis: Runden Sie auf ganze Zahlen!

x	0	5	10	15	20
$f(x)$					

1.3 Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Besucherzahl zwischen dem Jahr 2000 und dem Jahr 2020 zu keinem Zeitpunkt Null betrug. **/6**

1.4 Berechnen Sie das Jahr, in dem die Besucherzahl am höchsten war. Geben Sie die höchste Besucherzahl an. **/8**

1.5 Zeichnen Sie den Graphen von *f* unter Verwendung aller bisher ermittelten Punkte in das **Koordinatensystem auf der folgenden Seite**. **/3**

1.6 Die Gerade *g* verläuft durch die Punkte $P_1\ (5|f(5))$ und $P_2\ (15|f(15))$. **/4**
Ermitteln Sie den Anstieg der Geraden *g* und beurteilen Sie diesen im Sachzusammenhang.
Zeichnen Sie die Gerade *g* in das **Koordinatensystem auf der folgenden Seite**.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

1.7 Im Jahr 2010 ($x = 10$) wurde die Vermutung aufgestellt, die Zunahme der Besucher würde in Zukunft linear erfolgen. **/5**
Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt $P_3\,(10|f\,(10))$.
Berechnen Sie, welche Besucherzahl sich im Jahr 2020 ergeben hätte, wenn sich die Zunahme ab 2010 wie durch t beschrieben entwickelt hätte.

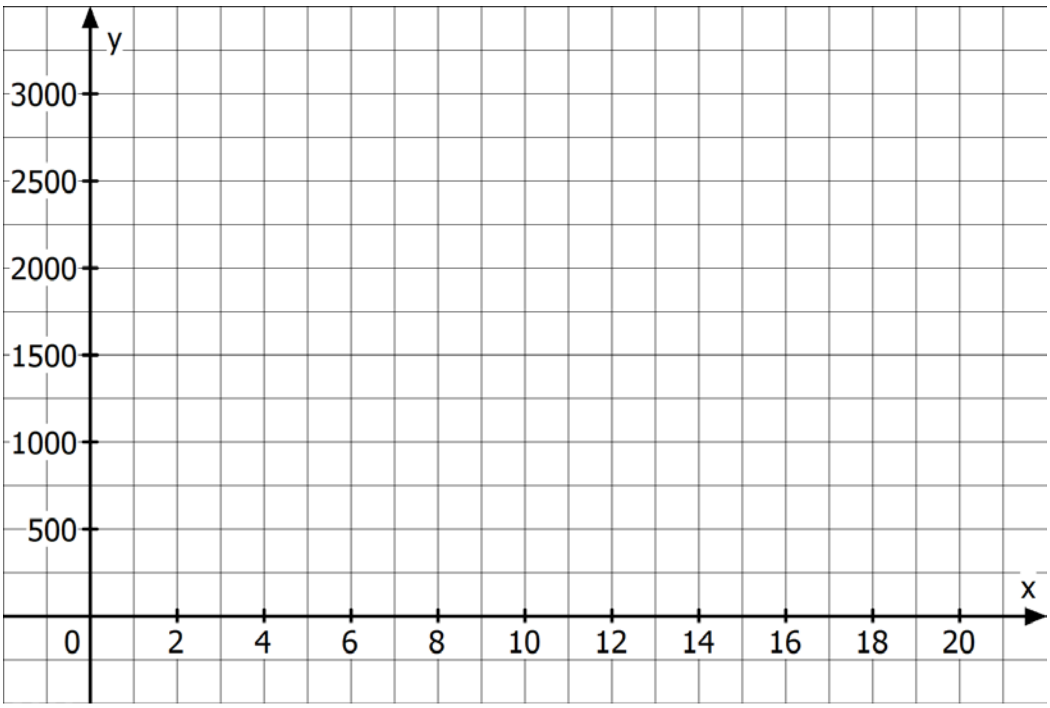
1.8 Man vermutet, dass bei geringeren Eintrittspreisen die Besucherzahlen ab dem Jahr 2000 größer gewesen wären. Im Jahr 2010 ($x = 10$) hätten dann 2800 Personen das Museum besucht. Die Besucherzahlen für den Zeitraum von 2000 bis 2020 hätten dann näherungsweise beschrieben werden können durch die Funktion h mit: **/3**

$$h(x) = -0{,}02x^4 + ax^2 + 1800.$$

Ermitteln Sie den Wert des Parameters a.
[Zur Kontrolle: $a = 12$]

1.9 Untersuchen Sie folgende Behauptung rechnerisch: **/7**
Wenn sich die Besucherzahl gemäß der Funktion h entwickelt hätte, dann wäre die Besucherzahl im Jahr 2010 ($x = 10$) am stärksten gestiegen.

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.5 und 1.6



2 Integralrechnung /30

Bei der Fahrt mit einem Versuchsfahrzeug wurde in einem bestimmten Streckenabschnitt ständig die Geschwindigkeit erfasst. Der entsprechende Geschwindigkeitsverlauf des Fahrzeugs ist in Abbildung 1 näherungsweise dargestellt.

Dabei ist die Geschwindigkeit in m/s auf der y – Achse dargestellt und die Zeit in s auf der x – Achse.

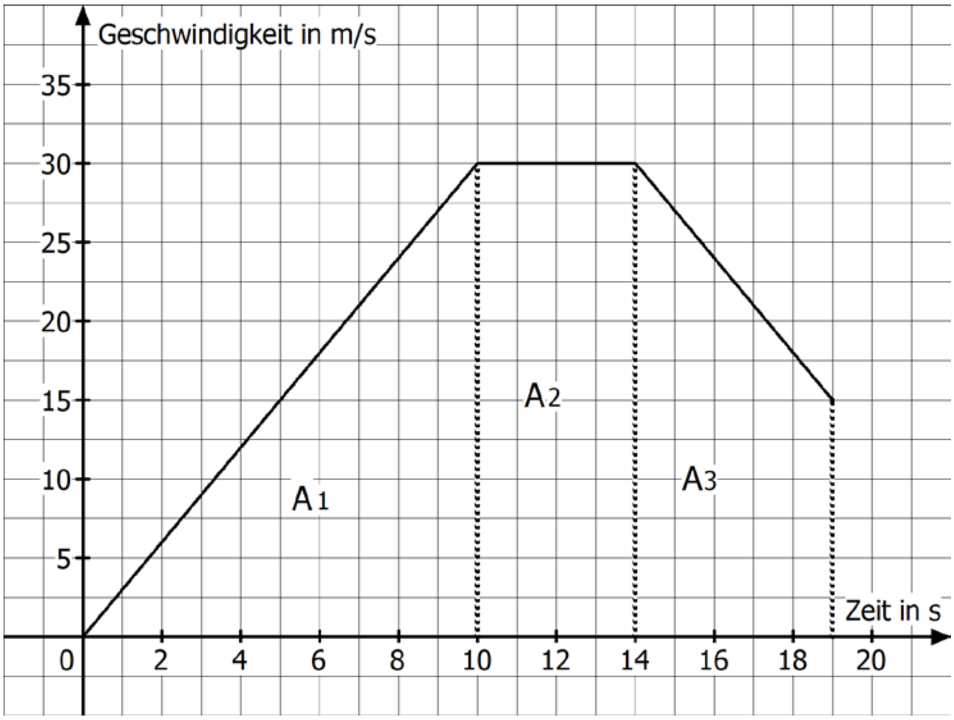


Abbildung 1

2.1 Geben Sie die Anfangsgeschwindigkeit des Versuchsfahrzeuges an. **/3**
Geben Sie die Gesamtdauer des Geschwindigkeitsverlaufes in Sekunden an.
Geben Sie die Höchstgeschwindigkeit des Versuchsfahrzeuges an.

Die Flächen zwischen dem Geschwindigkeitsverlauf und der x – Achse sind in Abbildung 1 mit A_1, A_2 und A_3 bezeichnet. Die Flächeninhalte der drei Teilflächen entsprechen den Strecken, die das Versuchsfahrzeug in den jeweiligen Zeitintervallen zurückgelegt hat.

2.2 Berechnen Sie die Flächeninhalte von A_1, A_2 und A_3. **/4**
Geben Sie die zurückgelegte Gesamtstrecke in m an.
[Zur Kontrolle: s_{gesamt} = 382,5 m]

2.3 Ermitteln Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Versuchsfahrzeuges. **/2**

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Abbildung 1 stellt den tatsächlichen Geschwindigkeitsverlauf nur ungenau dar. Ein genaueres Messverfahren hat ergeben, dass der Geschwindigkeitsverlauf im Intervall $0 \leq x \leq 10$ beschrieben werden kann durch die Funktion *f* mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = -\frac{1}{1000}x^4 + \frac{2}{5}x^2 \; ; \; 0 \leq x \leq 10$$

(Abbildung 2).

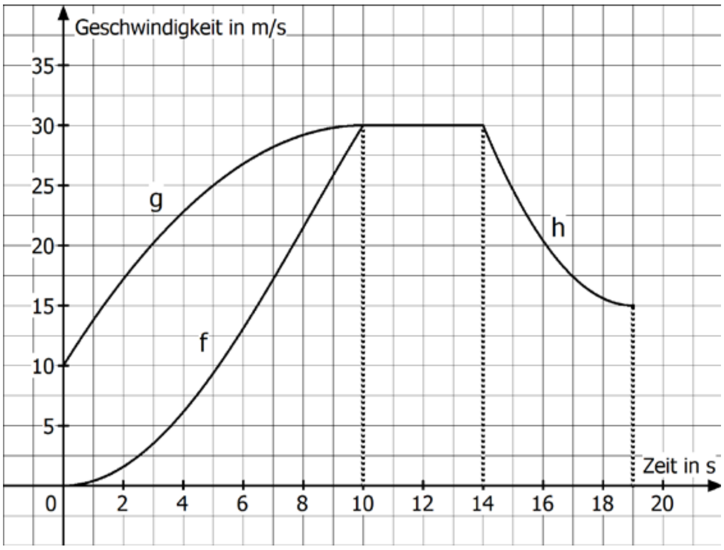


Abbildung 2

2.4 Zeigen Sie rechnerisch, dass der Koordinatenursprung und der Punkt (10|30) auf dem Graphen der Funktion *f* liegen. **/2**

2.5 Berechnen Sie die Größe der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion *f* und der *x* – Achse im Intervall $0 \leq x \leq 10$. **/6**
Geben Sie die zurückgelegte Strecke in m an, die das Versuchsfahrzeug in den ersten 10 Sekunden zurückgelegt hat.

Ein zweites Versuchsfahrzeug hat an der Stelle $x = 0$ bereits eine Anfangsgeschwindigkeit von 10 m/s. Der Geschwindigkeitsverlauf dieses Fahrzeugs kann für das Intervall $0 \leq x \leq 10$ näherungsweise durch den Graphen der Funktion *g* beschrieben werden (Abbildung 2).
Dabei hat die Funktion *g* folgende Funktionsgleichung:

$$g(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 4x + 10 \; ; \; 0 \leq x \leq 10.$$

2.6 Berechnen Sie die Größe der Fläche, die zwischen dem Graphen der Funktion *f* und dem Graphen der Funktion *g* im Intervall $0 \leq x \leq 10$ liegt. **/7**
Deuten Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang.

Auch im Intervall $14 \leq x \leq 19$ ist der Geschwindigkeitsverlauf in Abbildung 1 nur ungenau dargestellt. In diesem Intervall hat das Versuchsfahrzeug einen tatsächlichen Weg von 100 m zurückgelegt. Deshalb soll für dieses Intervall nun die Funktion *h* mit folgender Funktionsgleichung gelten (Abbildung 2):

$$h(x) = ax^2 - 22{,}8x + 231{,}6 \; , \; a \in \mathrm{IR}.$$

2.7 Für einen Wert des Parameters *a* beträgt die Größe der eingeschlossenen Fläche zwischen dem Graphen der Funktion *h* und der *x* – Achse im Intervall $14 \leq x \leq 19$ genau 100 FE. **/6**
Ermitteln Sie diesen Wert von *a*.

3 Stochastik /30

In einem Unternehmen nutzen alle Beschäftigten ein Passwort. Die Passwörter des Unternehmens können entweder vierstellig oder fünfstellig sein. Sie dürfen entweder aus Buchstaben oder aus Buchstaben und Ziffern bestehen.
Bei einer Befragung wurde folgendes festgestellt:

- bei 25 % der Passwörter handelt es sich um ein vierstelliges Passwort
- von den vierstelligen Passwörtern bestehen ein Drittel nur aus Buchstaben
- von den fünfstelligen Passwörtern bestehen 80 % aus Ziffern und Buchstaben.

3.1 Erstellen Sie zu diesem Sachverhalt ein vollständiges Baumdiagramm und beschriften Sie alle Zweigwahrscheinlichkeiten. **/6**
Nennen Sie auch die Bedeutung von Abkürzungen, die Sie verwenden.

3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse: **/6**
E_1: Ein zufällig ausgewähltes Passwort besteht nur aus Buchstaben.
E_2: Ein zufällig ausgewähltes Passwort ist fünfstellig und besteht aus Ziffern und Buchstaben.
E_3: Ein zufällig ausgewähltes Passwort ist fünfstellig oder es besteht nur aus Buchstaben.

An einer Befragung haben 220 Beschäftigte teilgenommen, davon waren 25 % Auszubildende.
Von den Auszubildenden hatten 35 ein fünfstelliges Passwort.
Insgesamt hatten 155 der Befragten ein fünfstelliges Passwort.

3.3 Erstellen Sie aus den Informationen eine vollständige Vierfeldertafel. **/6**
Machen Sie die von Ihnen verwendeten Abkürzungen mit Hilfe einer Legende deutlich.

3.4 Von den Befragten wird eine Person zufällig ausgewählt. **/3**
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person ein vierstelliges Passwort gewählt hat.

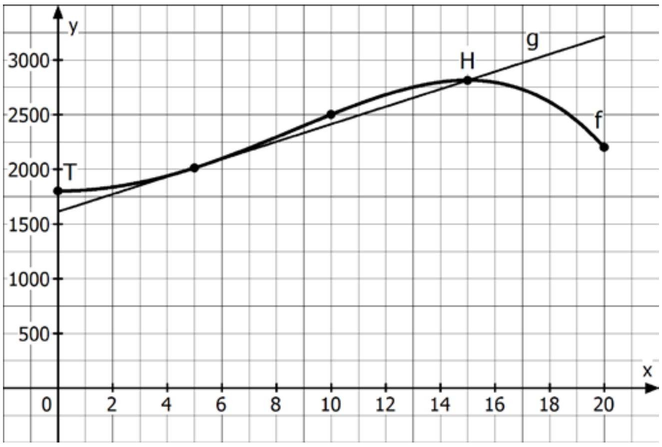
3.5 Aus der Gruppe der Befragten mit vierstelligen Passwörtern wird eine Person ausgewählt. **/3**
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die gewählte Person ein Auszubildender ist.

3.6 Von den Befragten wird eine Person ausgewählt. **/6**
Betrachtet werden folgende Ereignisse:
E_4: Die Person gehört zu den Auszubildenden.
E_5: Die Person hat ein fünfstelliges Passwort.
Untersuchen Sie, ob die Ereignisse E_4 und E_5 stochastisch unabhängig sind.

Abschlussprüfung Fachoberschule 2021
Mathematik

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag A

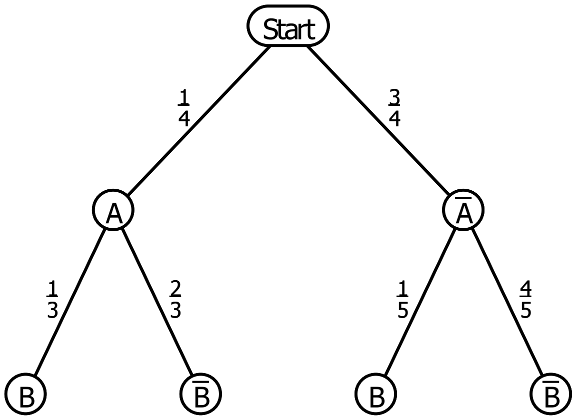
<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>$D = [0\ ,\ 20]$</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>5</td><td>10</td><td>15</td><td>20</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>1800</td><td>2013</td><td>2500</td><td>2813</td><td>2200</td></tr>
</table>
1 Fehler = 1 Punkt, ab 2 Fehler 0 Punkte
Bei gleichen Rundungsfehlern nur 1 BE Abzug</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>$f(x) = 0$
$0 = -0{,}02x^4 + 9x^2 + 1800 \ \mid x^2 = z$
$0 = -0{,}02z^2 + 9z + 1800 \quad \mid : (-0{,}02)$
$0 = z^2 - 450z - 90000$
$z_{1/2} = 225 \pm \sqrt{225^2 + 90000}$
$z_1 = 600 \mid \sqrt{\ }$
$z_2 = -150 \Rightarrow$ entfällt, da negativ
$x_{N1/N2} \approx \pm 24{,}5$
Beide Nullstellen liegen außerhalb des betrachteten Bereiches.</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>1.4</td><td>$f'(x) = 0$
$f'(x) = -0{,}08x^3 + 18x$
$0 = -0{,}08x^3 + 18x$
$0 = x(-0{,}08x^2 + 18)$
$x_{E1} = 0$
$0 = -0{,}08x^2 + 18$
$x_{E2} = 15$
$x_{E3} = -15 < 0 \Rightarrow$ außerhalb des betrachteten Bereiches
$f''(x) = -0{,}24x^2 + 18$
$f''(0) = 18 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt
$f''(15) = -36 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt
$f(15) \approx 2813$
Im Jahr 2015 war die Besucherzahl am höchsten und betrug 2813 Besucher.</td><td></td><td>8</td><td></td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
1.5		3		
1.6	$m = \frac{f(15) - f(5)}{15 - 5} = \frac{2813 - 2013}{15 - 5} = \frac{800}{10} = 80$ Die Besucherzahl hat zwischen den Jahren 2005 und 2015 durchschnittlich um 80 Besucher jährlich zugenommen. Zeichnung von g	2 1		1
1.7	$f'(10) = 100 = m_t$ $t(x) = m_t x + n$ $2500 = 100 \cdot 10 + n$ $n = 1500$ $t(x) = 100x + 1500$ $t(20) = 100 \cdot 20 + 1500 = 3500$ Hätte sich die Zunahme der Besucherzahl ab 2010 wie durch t beschrieben entwickelt, dann hätten im Jahr 2020 3500 Personen das Museum besucht.		5	
1.8	$2800 = -0{,}02 \cdot 10^4 + a \cdot 10^2 + 1800$ $2800 = -200 + 100a + 1800$ $1200 = 100a \Rightarrow a = 12$		3	
1.9	$h''(x) = 0$; $h'''(x) \neq 0$; $h'(x) > 0$ $h'(x) = -0{,}08x^3 + 24x$; $h''(x) = -0{,}24x^2 + 24$; $h'''(x) = -0{,}48x$ $0 = -0{,}24x^2 + 24 \Rightarrow x_W = 10$ $h'(10) = 160 > 0 \Rightarrow$ max. Steigung bei $x_W = 10$			7
	Mögliche BE	8	24	8
	Summe Aufgabe	40		

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
2.1	Anfangsgeschwindigkeit: $0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ Gesamtdauer des Geschwindigkeitsverlaufes: 19 s Höchstgeschwindigkeit: $30\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$	3		
2.2	$A_1 = \frac{10 \cdot 30}{2} = 150$ $A_2 = 30 \cdot 4 = 120$ $A_3 = 5 \cdot 15 + \frac{15 \cdot 5}{2} = 112{,}5$ $s_{\text{gesamt}} = 150\text{ m} + 120\text{m} + 112{,}5\text{ m} = 382{,}5\text{ m}$		4	
2.3	$v = \frac{s_{\text{gesamt}}}{t} = \frac{382{,}5\text{ m}}{19\text{ s}} \approx 20{,}13\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$		2	
2.4	$f(10) = 30$ $f(0) = 0$	2		
2.5	$A_{\text{neu}} = \int_0^{10} \left(-\frac{1}{1000}x^4 + \frac{2}{5}x^2\right)\text{d}x = \left[-\frac{1}{5000}x^5 + \frac{2}{15}x^3\right]_0^{10}$ $A_{\text{neu}} = \left(-\frac{1}{5000}\cdot 10^5 + \frac{2}{15}\cdot 10^3\right) - 0 = 113{,}\overline{3}$ Die zurückgelegte Strecke in diesem Intervall beträgt nun 113 m.		6	
2.6	Differenzfunktion: $\text{d}(x) = g(x) - f(x)$ $\text{d}(x) = \frac{1}{1000}x^4 - \frac{3}{5}x^2 + 4x + 10$ $\text{A} = \int_0^{10} \left(\frac{1}{1000}x^4 - \frac{3}{5}x^2 + 4x + 10\right)\text{d}x = \left[\frac{1}{5000}x^5 - \frac{1}{5}x^3 + 2x^2 + 10x\right]_0^{10}$ $\text{A} = \left(\frac{1}{5000}\cdot 10^5 - \frac{1}{5}\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + 10\cdot 10\right) - 0 = 120$ Die Größe der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion *f* und dem Graphen der Funktion *g* beträgt 120 FE. Hierbei handelt es sich um die Strecke in Metern (120 m), die das zweite Fahrzeug innerhalb der 10 s mehr zurücklegt als das erste. Alternativ kann auch die Größe der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion *g* und der *x* – Achse berechnet werden. Anschließend muss die Fläche aus 2.5 davon subtrahiert werden.		6	1

Teilaufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
2.7	$\int_{14}^{19} \left(ax^2 - 22{,}8x + 231{,}6\right)\mathrm{d}x = 100$ $\left[\frac{1}{3}ax^3 - 11{,}4x^2 + 231{,}6x\right]_{14}^{19} = 100$ $1371{,}\bar{6}a - 723 = 100$ $a = 0{,}6$			6
	Mögliche BE	5	18	7
	Summe Aufgabe	30		

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3.1</td><td>A: vierstelliges Passwort
B: nur Buchstaben

Andere Varianten des Baumdiagramms sind ebenfalls möglich.

</td><td>6</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>$P(E_1) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{7}{30} \approx 0{,}23$
$P(E_2) = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}6$
$P(E_3) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{6} \approx 0{,}83$</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>3.3</td><td>C: Befragter ist Auszubildender
D: fünfstelliges Passwort (fett im Text gegeben)
<table>
<tr><th></th><th>D</th><th>$\overline{D}$</th><th>∑</th></tr>
<tr><td>C</td><td>35</td><td>20</td><td>55</td></tr>
<tr><td>$\overline{C}$</td><td>120</td><td>45</td><td>165</td></tr>
<tr><td>∑</td><td>155</td><td>65</td><td>220</td></tr>
</table></td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>3.4</td><td>$P(\overline{D}) = \frac{65}{220} \approx 0{,}295$

Ungefähr 30 % der befragten Beschäftigten nutzen ein vierstelliges Passwort.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>3.5</td><td>$P_{\overline{D}}(C) = \frac{20}{65} = \frac{4}{13} \approx 0{,}3077$

Aus der Gruppe der Beschäftigten mit vierstelligen Passwörtern sind rund 31 % Auszubildende.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
3.6	E_4: $P(C) = \frac{55}{220} = 0{,}25$ E_5: $P(D) = \frac{155}{220} \approx 0{,}7045$ $P_D(C) = \frac{35}{155} \approx 0{,}2258$ $P(C) = P_D(C)$, dann sind die Ereignisse stochastisch unabhängig voneinander $\frac{55}{220} = 0{,}25 \neq \frac{35}{155} = 0{,}2258$ Die Ereignisse sind nicht stochastisch unabhängig voneinander. Alternativ über: stochastisch unabhängig, wenn gilt: $P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D)$		2	4
	Mögliche BE	6	20	4
	Summe Aufgabe	30		