Abschlussprüfung Fachoberschule 2020
Mathematik

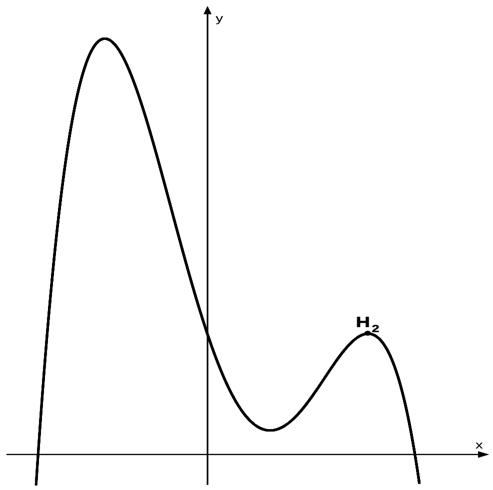
Aufgabenvorschlag B

1 Funktionsuntersuchung /40

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$f(x) = -0{,}5x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x + 2 \quad (x \in \mathbb{R}),$
$-2{,}25 \le x \le 2{,}75$

Der Graph von f ist nebenstehend skizziert.



1.1 Geben Sie den Schnittpunkt des Graphen G_f von f mit der y - Achse an. **/2**
Bei $x = 2$ liegt der Hochpunkt H_2. Geben Sie die y - Koordinate von H_2 an.

1.2 Ergänzen Sie die folgende Wertetabelle. **/6**
Skizzieren Sie den Graphen G_f von f im Intervall $[-2{,}25 ; 2{,}75]$ in das Koordinatensystem auf der nächsten Seite.

x	−2,25	−2	−1,5	−1	-0,5	0,5	1	1,5	2,5	2,75
$f(x)$		2,00		6,50			0,50		0,59	

1.3 Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Funktion $f'(x) = (x-2)\cdot(-2x^2 - x + 2)$ der ersten Ableitung der Funktion f entspricht. **/5**
Begründen Sie, warum die weiteren Extremstellen des Graphen von f durch die Berechnung der Nullstellen des Restpolynoms $r(x) = -2x^2 - x + 2$ bestimmt werden können.

1.4 Ermitteln Sie rechnerisch die Art und die Koordinaten der beiden weiteren Extrempunkte des Graphen von f. **/8**

1.5 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen an der Stelle $x = 2{,}5$ und die Nullstelle dieser Tangente. **/6**

1.6 An einem Punkt Q, der zwischen den beiden Hochpunkten liegt, hat der Verlauf des Graphen ein maximales Gefälle. **/5**
Berechnen Sie die Koordinaten von Q.

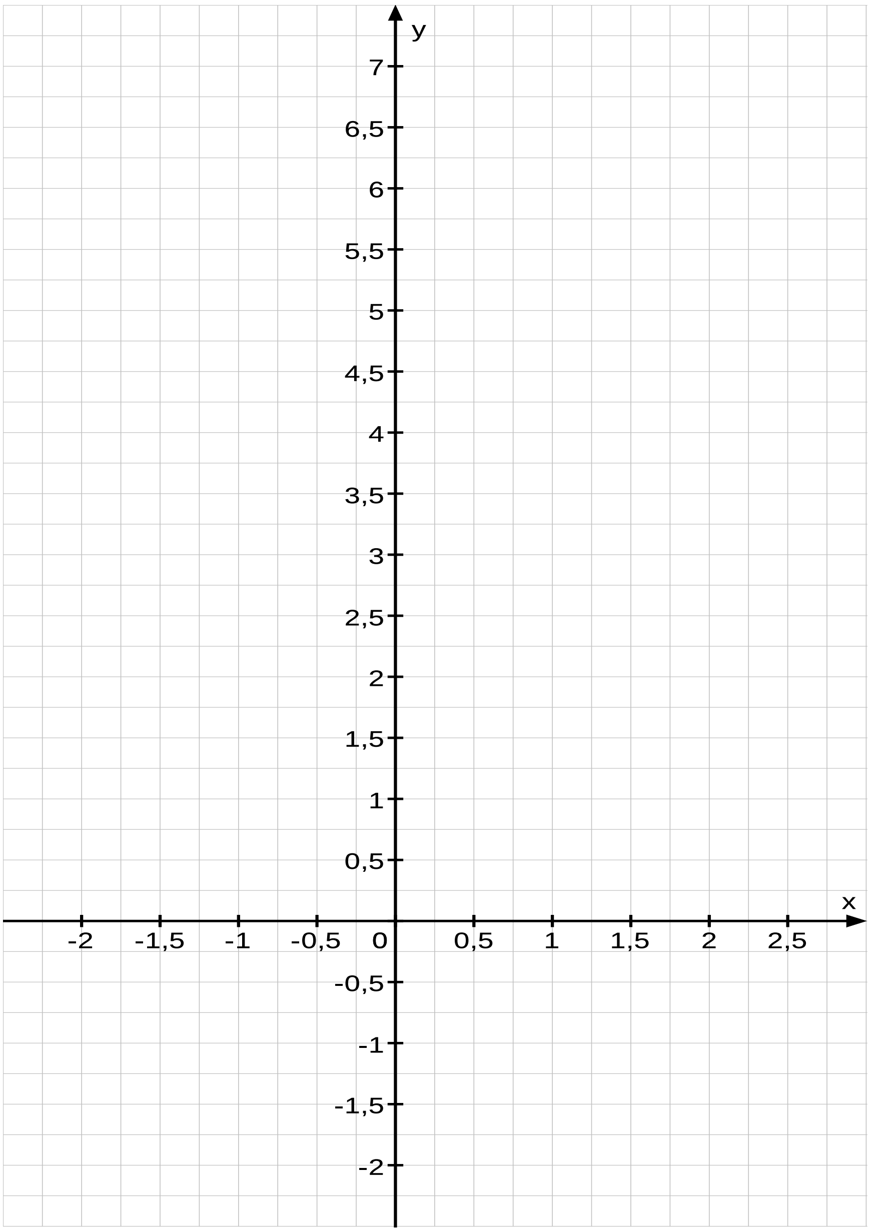
Fortsetzung auf der nächsten Seite!

Der Graph von f stellt den Höhenverlauf eines Gebirges dar. Eine Einheit auf der x - Achse entspricht dabei 1000 m. Eine Einheit auf der y - Achse entspricht 100 m.

1.7 Eine Hängebrücke, die die Form einer Parabel hat, soll zwischen den Punkten P_1 (0|2) und P_2 (2|2) befestigt werden. Der Scheitelpunkt dieser Parabel befindet sich im Punkt S (1|1,75).
Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Hängebrücke in Scheitelpunktform.
Skizzieren Sie den Verlauf der Hängebrücke im unten stehenden Koordinatensystem. **/5**

1.8 Im Punkt R (−2|2), der auf dem Graphen der Funktion f liegt, ist eine Aussichtsplattform geplant. Dazu wird der Anstiegswinkel an dieser Stelle benötigt.
Bestimmen Sie den Winkel, den der Höhenverlauf zur Horizontalen im Punkt R hat.
[*Hinweis: Beachten Sie die unterschiedliche Einteilung der Koordinatenachsen.*] **/3**

Koordinatensystem für Aufgabe 1.2 und 1.7



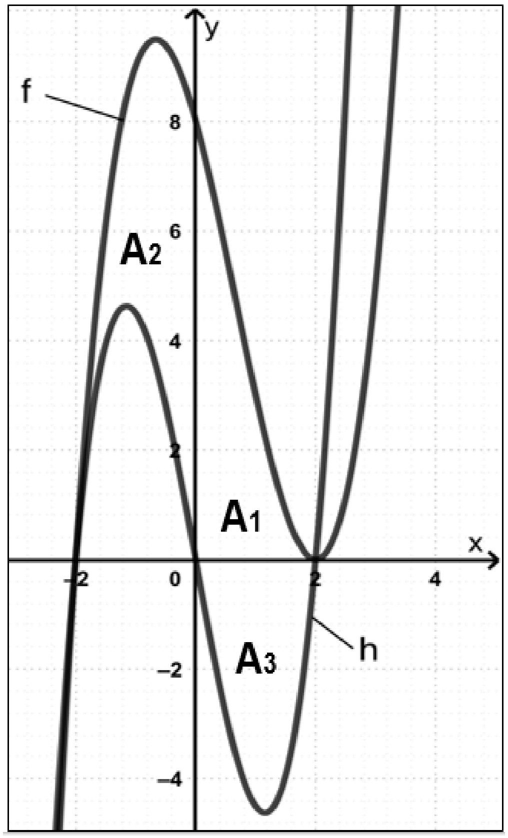
2 Integralrechnung /30

Gegeben sind die Funktionen f und h mit den Funktionsgleichungen

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8 \qquad (x \in IR)$

und

$h(x) = 1{,}5x^3 - 6x \qquad (x \in IR)$.



Die zugehörigen Graphen G_f und G_h schließen eine Fläche vollständig ein, die mit A_{ges} bezeichnet wird (siehe *Abbildung*).

Diese Fläche besteht aus drei Teilflächen:

- A_1 bezeichnet die Teilfläche im 1. Quadranten,
- A_2 bezeichnet die Teilfläche im 2. Quadranten und
- A_3 bezeichnet die Teilfläche im 4. Quadranten.

2.1 Geben Sie das Symmetrieverhalten der Funktion h an und begründen Sie Ihre Aussage. **/2**

2.2 Aus der Abbildung kann man entnehmen, dass die Graphen G_f und G_h im Intervall $-2 \le x \le 2$ die zwei Schnittpunkte $S_1(-2|0)$ und $S_2(2|0)$ haben. Die beiden Graphen haben jedoch noch einen dritten Schnittpunkt, der außerhalb des Intervalls $-2 \le x \le 2$ liegt.
Ermitteln Sie auch die Koordinaten dieses Schnittpunktes. **/8**

2.3 Berechnen Sie den Flächeninhalt der Teilfläche A_3. **/4**

2.4 Erläutern Sie ohne Berechnungen der einzelnen Flächeninhalte, warum für den Flächeninhalt der Gesamtfläche A_{ges} gilt: **/4**

$$A_{\text{ges}} = A_1 + A_2 + A_3 = \int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Fortsetzung auf der nächsten Seite!

Die Gerade $g(x) = 3x$ verläuft durch den Koordinatenursprung und den Punkt (1|3). Ihr Graph G_g teilt die Fläche A_1 in die zwei Teilflächen $A_{1/1}$ und $A_{1/2}$.

2.5 Zeigen Sie rechnerisch, dass der Punkt P(1|3) auch auf dem Graphen der Funktion f liegt. **/2**

2.6 Zeichnen Sie den Graph G_g in das Koordinatensystem auf der vorherigen Seite ein. **/2**

2.7 Weisen Sie nach, dass die beiden durch den Graphen G_g neu entstandenen Teilflächen $A_{1/1}$ und $A_{1/2}$ <u>nicht</u> gleich groß sind. **/8**

3 Stochastik /30

In einer Stichprobe wurde die Auslastung von Fahrzeugen untersucht. Die Stichprobe umfasste 125 Fahrzeuge, bei denen jeweils die Anzahl der Personen in den Fahrzeugen gezählt wurde. Fahrzeuge mit mehr als 5 Sitzplätzen wurden nicht berücksichtigt.
Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle dargestellt.

E	1 Person	2 Personen	3 Personen	4 Personen	5 Personen
absolute Häufigkeit ***H(E)***	54	33	13	17	8
relative Häufigkeit **$h(E)$**					

3.1 Ergänzen Sie in der Tabelle die jeweiligen relativen Häufigkeiten $h(E)$ in Prozent. **/3**

3.2 Ermitteln Sie die durchschnittliche Personenzahl pro Fahrzeug. **/3**

Die Ergebnisse der Stichprobe können im Folgenden als repräsentativ für alle Fahrzeuge angesehen werden.
Bei allen weiteren Aufgaben soll nur noch zwischen „nur mit einer Person besetzt“ und „mit mehr als einer Person besetzt“ unterschieden werden.

3.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug mit mehr als einer Person besetzt ist. **/3**

3.4 An einer Hauptverkehrsstraße werden drei zufällig vorbeifahrende Fahrzeuge ausgewählt. **/7**
Erstellen Sie ein passendes Baumdiagramm für die Ereignisse „Fahrzeug nur mit einer Person besetzt“ und „Fahrzeug mit mehr als einer Person besetzt“.
Tragen Sie für alle Pfade die Zweigwahrscheinlichkeiten entlang der Pfade ein.

3.5 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse: **/4**
A: Von drei zufällig ausgewählten Fahrzeugen ist genau eines mit nur einer Person besetzt.
B: Von drei zufällig ausgewählten Fahrzeugen sind mindestens zwei mit nur einer Person besetzt.

Von den 125 erfassten Fahrzeugen besaßen 8 % einen elektrischen Antrieb und von den 54 Fahrzeugen mit „nur einer Person besetzt“ besaß ein Neuntel einen elektrischen Antrieb.

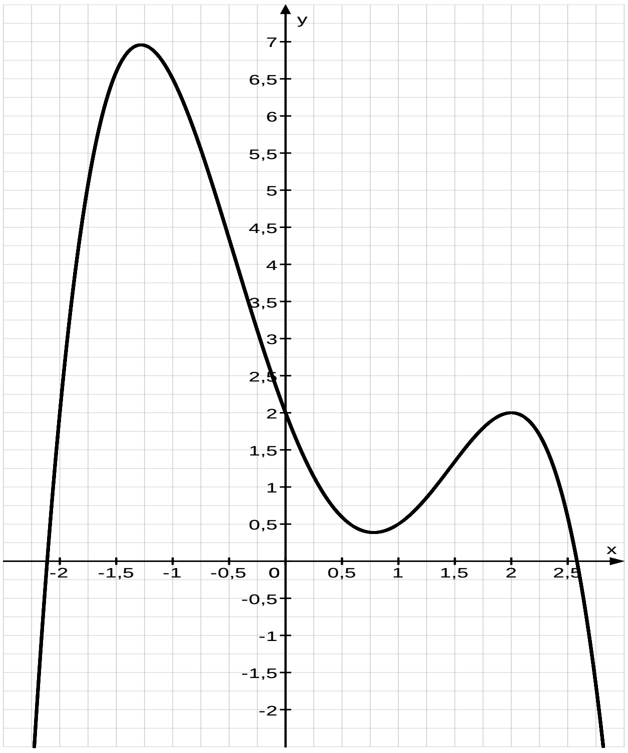
3.6 Stellen Sie diesen Sachverhalt in einer Vierfeldertafel dar und vervollständigen Sie diese. Nennen Sie die Bedeutung der Abkürzungen, die Sie verwenden. **/6**

3.7 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug mit mehr als einer Person besetzt war und keinen elektrischen Antrieb besaß. **/2**

3.8 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug ohne elektrischen Antrieb nur mit einer Person besetzt war. **/2**

Abschlussprüfung Fachoberschule 2020
Mathematik

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag B

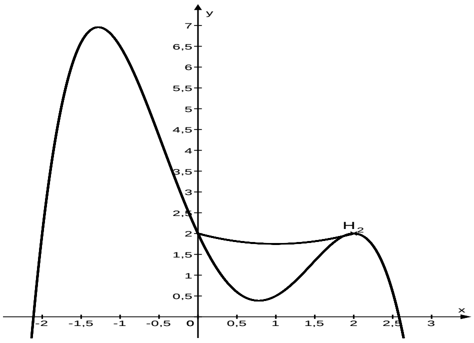
<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>$f(0) = 2$, $P_Y(0|2)$
$f(2) = 2$</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>–2,25</td><td>–2</td><td>–1,5</td><td>–1</td><td>-0,5</td><td>0,5</td><td>1</td><td>1,5</td><td>2,5</td><td>2,75</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>–3,08</td><td>2,00</td><td>6,59</td><td>6,50</td><td>4,34</td><td>0,59</td><td>0,50</td><td>1,34</td><td>0,59</td><td>–1,67</td></tr>
</table>


</td><td>3</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>$f'(x) = -2x^3 + 3x^2 + 4x - 4$

$f'(x) = (x - 2) \cdot (-2x^2 - x + 2) = -2x^3 + 3x^2 + 4x - 4$

Die Extremstellen des Graphen von f sind Nullstellen von der Ableitungsfunktion von f (f'). Ist das Restpolynom $r(x)$ null und wird dieses mit dem Linearfaktor $(x - 2)$ mulitipliziert, so wird die Ableitungsfunktion $f'(x)$ ebenfalls null. Somit sind die Nullstellen des Restpolynoms alle weiteren möglichen Extremstellen des Graphen von f.</td><td></td><td>3</td><td>2</td></tr>
</table>

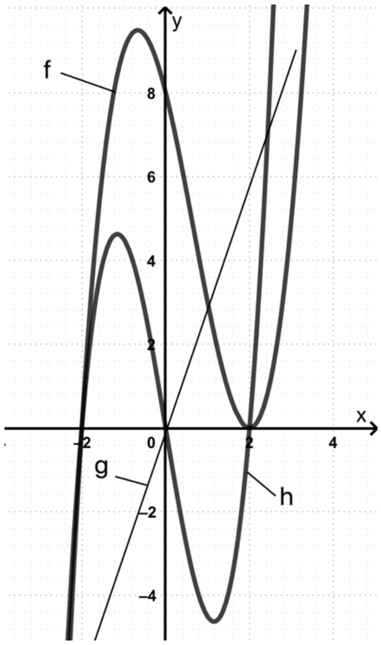
Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
1.4	$f\,'(x) = 0$ und $f\,''(x) \neq 0$ $f\,'(x) = -2x^3 + 3x^2 + 4x - 4$ $f\,''(x) = -6x^2 + 6x + 4$ Restpolynom aus 1.3 $0 = -2x^2 - x + 2 \mid :(-2)$ $0 = x^2 + \frac{1}{2}x - 1$ $x_{1/2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + 1}$ $x_{E2} = 0{,}78$; $x_{E3} = -1{,}28$ $f\,''(0{,}78) = 5{,}03 > 0 \quad \Rightarrow$ Tiefpunkt $T\,(0{,}78 \mid 0{,}39)$ $f\,''(-1{,}28) = -13{,}51 < 0 \quad \Rightarrow$ Hochpunkt $H_1\,\left(-1{,}28 \mid 6{,}96\right)$	4	4	
1.5	P $(2{,}5 \mid 0{,}59)$ $f\,'(2{,}5) = -6{,}5 = \mathrm{m}$ $t\,(x) = mx + n$ $0{,}59 = -6{,}5 \cdot 2{,}5 + n$ $16{,}84 = n$ $t\,(x) = -6{,}5x + 16{,}84$ $0 = -6{,}5x + 16{,}84$ $x_N = 2{,}59$		6	
1.6	$f\,''(x) = 0$ und $f\,'''(x) \neq 0$ $0 = -6x^2 + 6x + 4 \mid :(-6)$ $0 = x^2 - x - \frac{2}{3}$ $x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{3}} = 0{,}5 \pm 0{,}96$ $x_{Q1} = -0{,}46$; $x_{Q2} = 1{,}46$ $f\,'''(x) \neq 0$ $f\,'''(x) = -12x + 6$ $f\,'''(-0{,}46) = 11{,}52 > 0$, Rechts-Links-Krümmung/maximales Gefälle $f\,'''(1{,}46) = -11{,}52 < 0$, Links-Rechts-Krümmung/steigend entfällt Das stärkste Gefälle des Graphen der Funktion befindet sich im Punkt $Q\,(-0{,}46 \mid 4{,}14)$.		5	

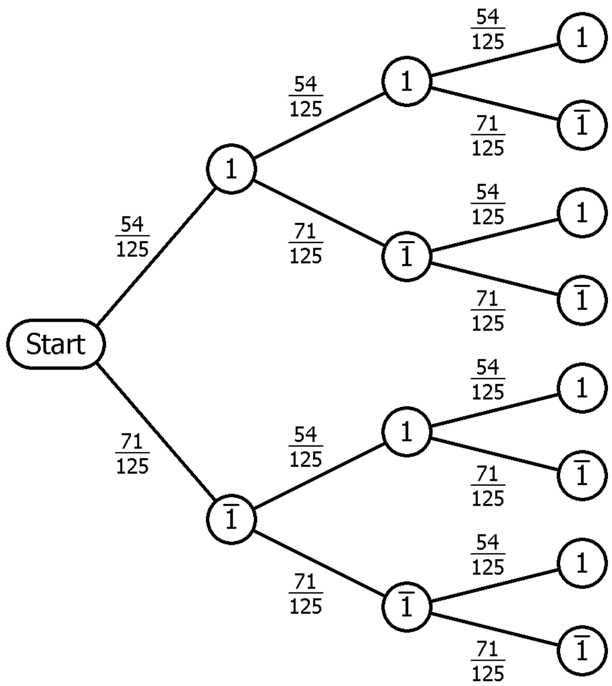
Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
1.7	$P_1(0\|2)$; $P_2(2\|2)$; $S(1\|1{,}75)$ Scheitelpunktform: $y = a(x - d)^2 + e$ $2 = a(2 - 1)^2 + 1{,}75 \quad \| - 1{,}75$ $0{,}25 = a$ $p\,(x) = 0{,}25(x - 1)^2 + 1{,}75$ Skizze der Hängebrücke 	1		4
1.8	$R\,(-2\|2)$ $f\,'(-2) = 16$ Maßstab 100/1000 also Faktor 0,1 also m = 1,6 α =57,99° $\approx$ 58°		1	2
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	10	22	8
	Summe der BE	40		

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>2.1</td><td>Die Funktion h ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, da sie nur ungerade Exponenten enthält.
Oder $h(-x) = 1{,}5(-x)^3 - 6(-x) = -(1{,}5x^3 - 6x) = g(x)$.</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.2</td><td>$f(x) = h(x)$:
$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 1{,}5x^3 - 6x$
$x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0$
Hornerschema oder Polynomdivision mit $x_{S1} = -2$ (oder $x_{S2} = 2$):
$\Rightarrow \quad \begin{array}{cccc} 1 & 4 & -4 & -16 \\ 0 & -2 & -4 & 16 \\ \hline 1 & 2 & -8 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad r(x) = x^2 + 2x - 8$
$\Rightarrow\ 0 = x^2 + 2x - 8 \Rightarrow x_{S3} = -4$
$\Rightarrow\ f(-4) = h(-4) = -72 \quad \Rightarrow\ S_3(-4 \mid -72)$</td><td>2

2</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>2.3</td><td>$A_3 = \left| \int_0^2 h(x)\,dx \right| = \left| \int_0^2 (1{,}5x^3 - 6x)\,dx \right| = \left| \left[\frac{3}{8}x^4 - 3x^2\right]_0^2 \right|$
$A_3 = |-6|$ FE = 6 FE</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>2.4</td><td>Die Gesamtfläche besteht aus den Flächen A_1, A_2 und A_3 :
$A_{ges} = A_1 + A_2 + A_3$.
Die Gesamtfläche entspricht aber auch der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und h vollständig eingeschlossen wird:
$A_{ges} = \int_{-2}^{2} (f(x) - h(x))\,dx = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx - \int_{-2}^{2} h(x)\,dx$.
Aufgrund der Punktsymmetrie der Funktion h ergibt sich $\int_{-2}^{2} h(x)\,dx = 0$:
$A_{ges} = A_1 + A_2 + A_3 = \int_{-2}^{2} (f(x) - h(x))\,dx$
$= \int_{-2}^{2} f(x)\,dx - \int_{-2}^{2} h(x)\,dx = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx - 0$
$= \int_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

<u>Alternativ</u> kann auch jede sinngemäß identische Erläuterung, die sich auf die Punktsymmetrie der Funktion h und somit auf die Flächenbilanz der von der Funktion h und der x - Achse im 2. und 4. Quadranten eingeschlossenen Flächen bezieht, ebenfalls akzeptieren werden.</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td>2.5</td><td>$f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 8 = 3 \quad \Rightarrow P(1 \mid 3) \in f$</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	II	III
2.6		2		
2.7	$A_{1/1} = \int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx$ $A_{1/1} = \int_0^1 (x^3 - 2x^2 - 7x + 8)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 8x\right]_0^1 = \frac{49}{12} \approx 4{,}08$ FE $A_{1/2} = \int_0^1 g(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx$ $A_{1/2} = \int_0^1 3x\,dx + \int_1^2 (x^3 - 2x^2 - 4x + 8)\,dx$ $A_{1/2} = \left[\frac{3}{2}x^2\right]_0^1 + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{4}{2}x^2 + 8x\right]_1^2$ $A_{1/2} = \frac{3}{2} + \frac{13}{12} = \frac{31}{12} \approx 2{,}58$ FE Beiden Teilflächen sind nicht gleich groß. <u>Alternativ</u> können auch die Fläche A_1 und eine der beiden Teilflächen berechnet werden. Der Flächeninhalt der noch fehlenden Teilfläche entsteht dann als Differenz der vorab bestimmten Flächeninhalte.		4 4	
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	10	16	4
	Summe der BE	30		

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3.1</td><td>
<table>
<tr><td>E</td><td>1 Person</td><td>2 Personen</td><td>3 Personen</td><td>4 Personen</td><td>5 Personen</td></tr>
<tr><td>H(E)</td><td>54</td><td>33</td><td>13</td><td>17</td><td>8</td></tr>
<tr><td>h(E)</td><td>43,2 %</td><td>26,4 %</td><td>10,4 %</td><td>13,6 %</td><td>6,4 %</td></tr>
</table>
</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>$\overline{E} = \dfrac{54\cdot 1 + 33\cdot 2 + 13\cdot 3 + 17\cdot 4 + 8\cdot 5}{125} = 2{,}136$</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.3</td><td>$P(\overline{1}) = 1 - \dfrac{54}{125} = 0{,}568$</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>3.4</td><td>1: Fahrzeug mit einer Person besetzt
$\overline{1}$: Fahrzeug mit mehr als einer Person besetzt
</td><td>2</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>3.5</td><td>$P(A) = P(1\overline{1}\overline{1};\ \overline{1}1\overline{1};\ \overline{1}\overline{1}1)$
$P(A) = 3\cdot\left(\dfrac{54}{125}\cdot\dfrac{71}{125}\cdot\dfrac{71}{125}\right) \approx 0{,}418$

$P(B) = P(111;\ 11\overline{1};\ 1\overline{1}1;\ \overline{1}11)$
$P(B) = \dfrac{54}{125}\cdot\dfrac{54}{125}\cdot\dfrac{54}{125} + \dfrac{54}{125}\cdot\dfrac{54}{125}\cdot\dfrac{71}{125} + \dfrac{54}{125}\cdot\dfrac{71}{125}\cdot\dfrac{54}{125} + \dfrac{71}{125}\cdot\dfrac{54}{125}\cdot\dfrac{54}{125}$
$P(B) = \left(\dfrac{54}{125}\right)^3 + 3\cdot\left(\dfrac{54}{125}\cdot\dfrac{54}{125}\cdot\dfrac{71}{125}\right) \approx 0{,}399$</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
</table>

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
3.6	1: Fahrzeug mit einer Person besetzt E: Fahrzeug mit elektrischem Antrieb <table><tr><td></td><td>**E**</td><td>**$\overline{E}$**</td><td>$\sum$</td></tr><tr><td>**1**</td><td>**6**</td><td>48</td><td>**54**</td></tr><tr><td>**$\overline{1}$**</td><td>4</td><td>67</td><td>71</td></tr><tr><td>$\sum$</td><td>**10**</td><td>115</td><td>**125**</td></tr></table>		6	
3.7	$P(\overline{1} \cap \overline{E}) = \frac{67}{125} = 0{,}536$		2	
3.8	$P_{\overline{E}}(1) = \frac{48}{115} \approx 0{,}417$			2
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	8	20	2
	Summe der BE		30	