Abschlussprüfung Fachoberschule 2020
Mathematik

Aufgabenvorschlag A

1 Funktionsuntersuchung /40

Der Onlinedienst A erfasst laufend die Anzahl der angemeldeten Nutzer. Für einen bestimmten Tag kann die Anzahl der angemeldeten Nutzer in Abhängigkeit zur Tageszeit näherungsweise beschrieben werden durch die Funktion f mit:

$f(x) = -2x^3 + 50x^2 + 2500 \quad (x \in \mathrm{IR}),\ 0 \leq x \leq 24.$

Dabei gibt $f(x)$ die Anzahl der angemeldeten Nutzer an und x die Zeit in Stunden, beginnend mit 0 Uhr.

1.1 Ergänzen Sie die folgende Wertetabelle. **/3**

x	0	3	6	9	12	15	18	21	24
$f(x)$	2500				6244				3652

1.2 Berechnen Sie die Extrempunkte des Graphen von f. **/9**
Geben Sie die Uhrzeit an, zu der die meisten Nutzer angemeldet waren.
Geben Sie die Anzahl der zu diesem Zeitpunkt angemeldeten Nutzer an.

1.3 Berechnen Sie den Wendepunkt des Graphen von f. **/6**
Erläutern Sie die Bedeutung des Wendepunktes im Sachzusammenhang.

1.4 Zeichnen Sie den Graphen von f unter Verwendung aller bisher ermittelten Punkte in das Koordinatensystem **auf der folgenden Seite**. **/5**
Nehmen Sie hierfür zunächst eine sinnvolle Achseneinteilung (Skalierung) vor.

1.5 Zeichnen Sie die Gerade s durch die Punkte $P_1(0 \mid f(0))$ und $P_2(24 \mid f(24))$ in das Koordinatensystem ein. **/7**
Bestimmen Sie die Geradengleichung der Geraden s.
Erläutern Sie, welche Informationen man aus dem Wert der Geradensteigung entnehmen kann.

1.6 Für einen anderen Onlinedienst B kann die Anzahl der angemeldeten Nutzer, für den gleichen Tag in einem bestimmten Zeitraum, durch die Funktion g mit: **/3**
$g(x) = ax^4 + 50x^2 + 1500,\ x \in \mathrm{IR}$ beschrieben werden.
Um 10 Uhr haben beide Onlinedienste die gleiche Anzahl von Nutzern, d. h. es gilt:
$g(10) = f(10) = 5500.$
Ermitteln Sie den Wert des Parameters a.
[Zur Kontrolle: $a = -0{,}1$]

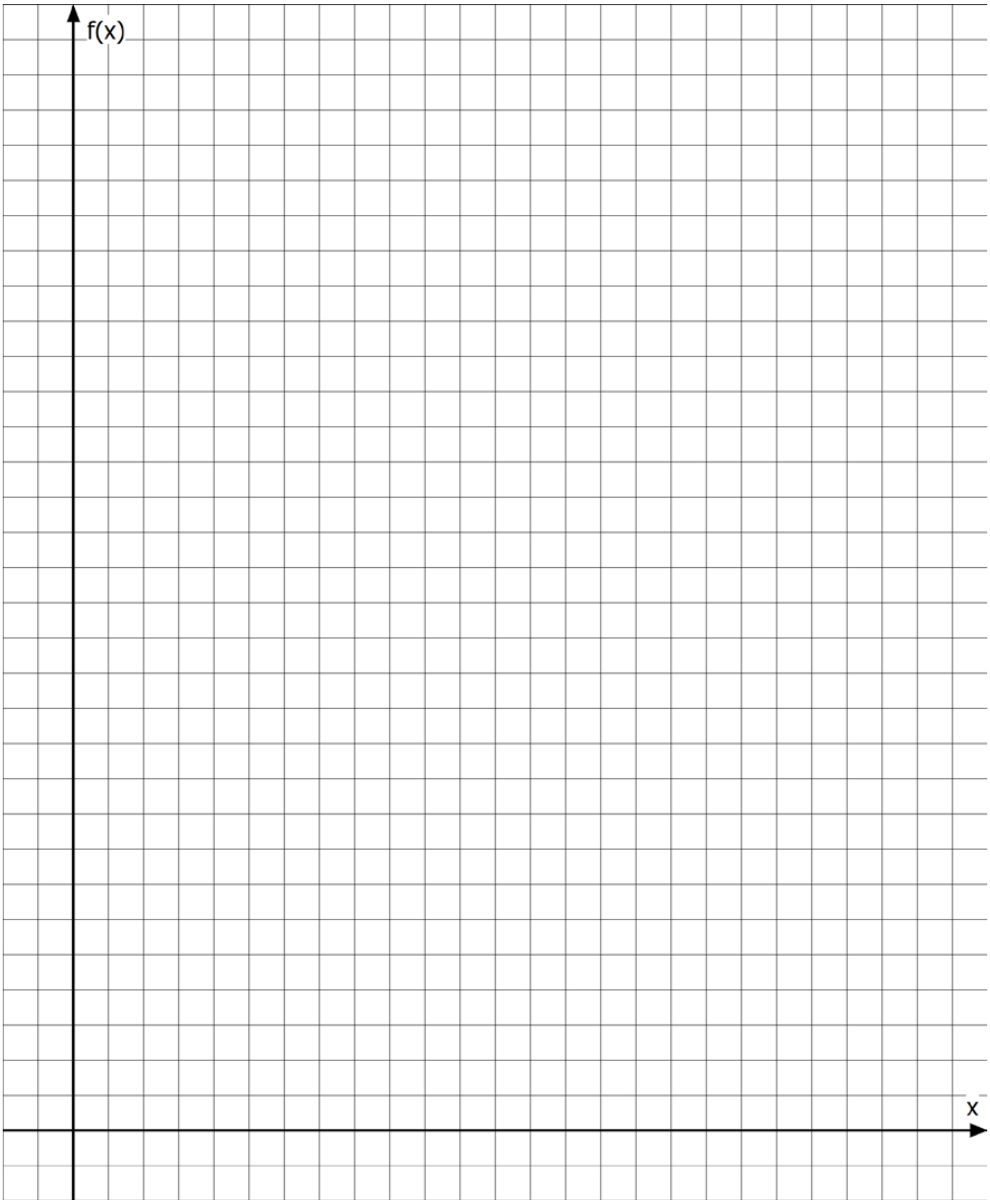
Fortsetzung auf der nächsten Seite

1.7 In dem Zeitraum $10 \leq x \leq 18$ hat der Onlinedienst B mehr angemeldete Nutzer als der Onlinedienst A. **/7**

Ermitteln Sie den Zeitpunkt in diesem Bereich, an dem der Unterschied der Nutzerzahlen maximal ist und geben Sie den Unterschied an.

Hinweis: Es genügt die Untersuchung der notwendigen Bedingung.

Koordinatensystem für Aufgabe 1.4 und Aufgabe 1.5



2 Integralrechnung /30

Die Form eines Sportdrachens kann durch die Graphen von drei Funktionen beschrieben werden und ist in *Abbildung 1* (siehe rechts) und *Abbildung 2* (siehe unten) dargestellt. 1 LE entspricht dabei 1 dm.

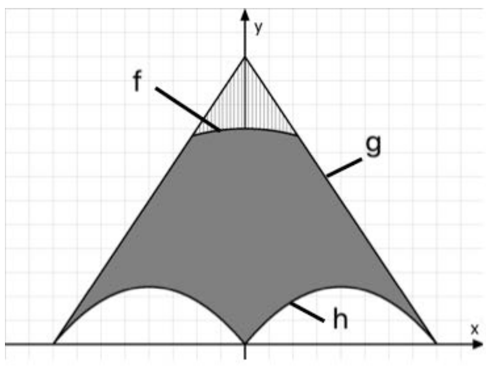


Abbildung 1: Skizze des Sportdrachens

Die Teilstücke A_1 und A_2 des Sportdrachens entsprechen den Flächen, die im Intervall I = [0;4] von den Graphen G_f , G_g und G_h der Funktionen *f*, *g* und *h* mit den Funktionsgleichungen:

$f(x) = -0{,}125x^2 + 4{,}5 \quad (x \in IR)$,
$g(x) = -1{,}5x + 6 \quad (x \in IR)$,
$h(x) = -0{,}3x^2 + 1{,}2x \quad (x \in IR)$

und der *y* - Achse gebildet werden. Der gesamte Drachen entsteht dann durch eine Spiegelung der Teilflächen A_1 und A_2 an der *y* - Achse.

Zusätzlich entsteht noch eine weitere Fläche A_3 unterhalb des Drachens. Diese Fläche wird von dem Graphen G_h und der *x* - Achse begrenzt (*Abbildung 2*).

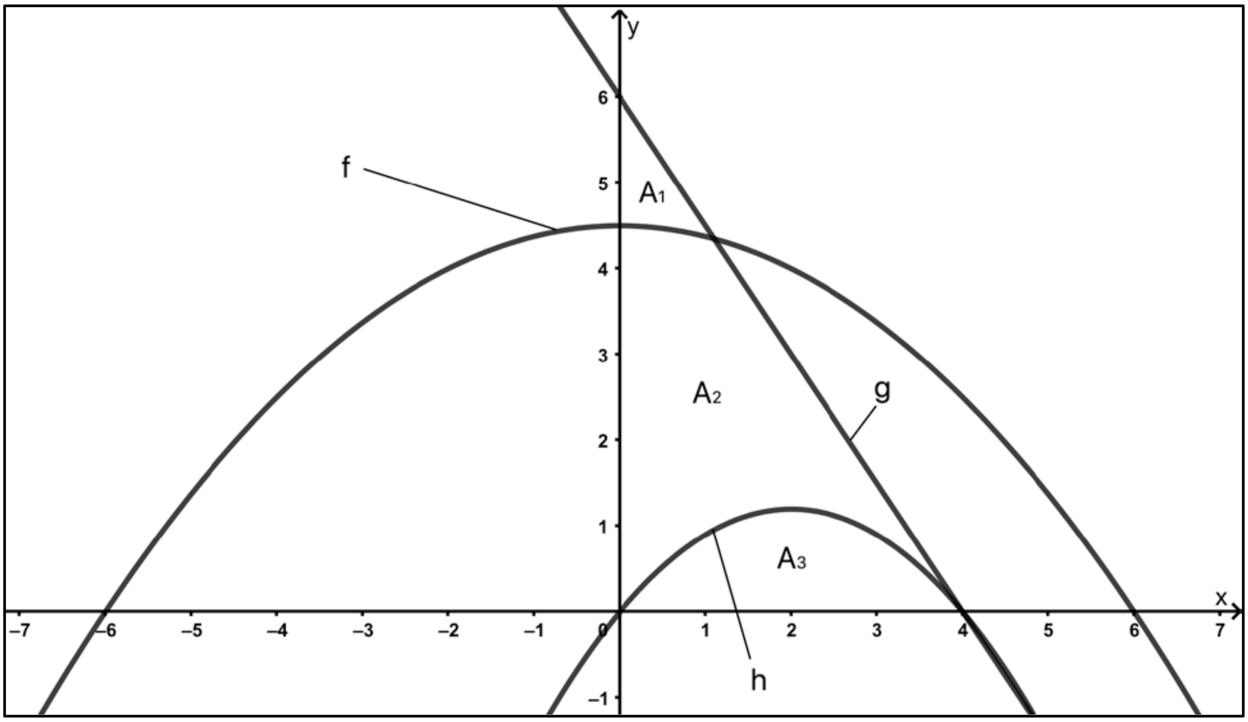


Abbildung 2: Graphen im Koordinatensystem

Fortsetzung auf der nächsten Seite

2.1 Berechnen Sie die Schnittstellen von G_g und G_h mit der x - Achse. **/3**

2.2 Ein Schnittpunkt der Geraden G_g mit der Parabel G_f hat eine x – Koordinate, die im Intervall I = [0;4] liegt. **/5**
Berechnen Sie die Koordinaten dieses Schnittpunktes.
[*Hinweis: Sollten Sie diese Teilaufgabe nicht bearbeiten können, so benutzen Sie für Ihre weiteren Berechnungen als Schnittstelle von* G_g und G_f den Wert $x_S = 1{,}10$.]

2.3 In der *Abbildung 2* sehen Sie nur einen Teil des Sportdrachens. Der gesamte Drachen entsteht erst durch Spiegelungen der Graphen G_g und G_h an der y-Achse. **/2**
Skizzieren Sie die gespiegelten Funktionsgraphen von G_g und G_h im Koordinatensystem der *Abbildung 2*.

2.4 Der gespiegelte Funktionsgraph von G_g wird mit G_i und der gespiegelte Funktionsgraph von G_h mit G_j bezeichnet. **/5**
Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der zugehörigen Funktionen i und j und begründen Sie Ihr Ergebnis.

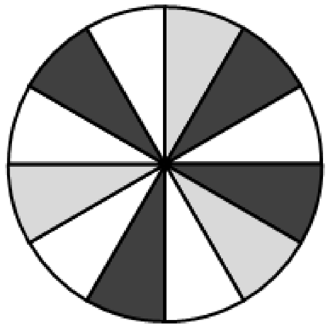
2.5 Berechne Sie den Flächeninhalt der Teilflächen A_1 und A_3 in dm^2. **/11**
[*Hinweis: Sie dürfen alle für die Berechnung notwendigen Werte aus der Abbildung 2 entnehmen.*]

2.6 Geben Sie einen Ansatz zur Berechnung der Teilfläche A_2 an. **/4**
[*Hinweis: Das Ausführen der Berechnung ist nicht gefordert.*]

3 Stochastik /30

Bei einem Glücksspiel wird ein Glücksrad benutzt.

Das Glücksrad hat 3 graue, 4 schwarze und 5 weiße Sektoren. Beim Drehen bleibt das Glücksrad zufällig genau bei einem Sektor stehen. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit für jeden Sektor gleich groß.



3.1 Das Glücksrad wird zweimal gedreht. **/6**
Erstellen Sie für dieses Zufallsexperiment ein Baumdiagramm.
Tragen Sie für alle Pfade die Zweigwahrscheinlichkeiten entlang der Pfade ein.

3.2 Das Glücksrad wird zweimal gedreht. **/10**
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
E_1: „Es werden zweimal graue Kreissegmente gedreht."
E_2: „Es werden zweimal gleichfarbige Kreissegmente gedreht."
E_3: „Es wird kein einziges Mal ein schwarzes Kreissegment gedreht."
E_4: „Es wird mindestens einmal ein graues Kreissegment gedreht."

3.3 Luise möchte gern die einzelnen Kreissegmente so anordnen, dass die gleiche Farbe immer nebeneinander liegt. **/2**
Ändern sich dadurch die Pfadwahrscheinlichkeiten?
Begründen Sie Ihre Aussage.

Bei einem Schulfest wird dieses Glücksrad benutzt, aber die Regeln werden geändert.

- Das Glücksrad wird bei einem Spiel dreimal gedreht.
- Der Einsatz für ein Spiel beträgt 1 €.
- Wenn dreimal ein graues Segment gedreht wird, erhält man 6 €.
- Wenn dreimal ein schwarzes Segment gedreht wird, erhält man 5 €.
- Wenn dreimal ein weißes Segment gedreht wird, erhält man 4 €.
- In allen anderen Fällen erhält man nichts.

3.4 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die drei Gewinnmöglichkeiten. **/6**

3.5 Wenn das Spiel sehr häufig gespielt wird, machen die Spieler höchstwahrscheinlich Verlust. **/4**
Ermitteln Sie, wie hoch der Verlust im Durchschnitt pro Spiel sein wird.

Abschlussprüfung Fachoberschule 2020
Mathematik

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag A

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>3</td><td>6</td><td>9</td><td>12</td><td>15</td><td>18</td><td>21</td><td>24</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>2500</td><td>2896</td><td>3868</td><td>5092</td><td>6244</td><td>7000</td><td>7036</td><td>6028</td><td>3652</td></tr>
</table>
</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>
$f'(x) = 0;\ f''(x) \neq 0$
$f'(x) = -6x^2 + 100x$
$f''(x) = -12x + 100$
$0 = -6x^2 + 100x$
$0 = x(-6x + 100)$

$x_1 = 0\ ;\ x_2 = \frac{50}{3}$
$f''(x_1) = 100 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt
$f''(x_2) = -100 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt

$f\left(\frac{50}{3}\right) \approx 7129{,}63 \implies \mathrm{H}\left(\frac{50}{3} \middle| 7130\right)$
$f(0) = 2500 \implies \mathrm{T}\,(0 \mid 2500)$

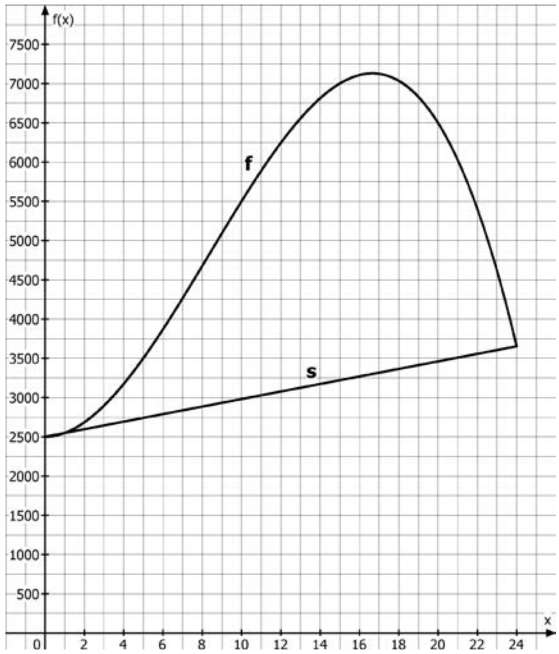
Um 16:40 Uhr waren die meisten Nutzer angemeldet. Es handelte sich dabei um 7130 Nutzer.
</td><td></td><td>9</td><td></td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>
$f''(x) = 0;\ f'''(x) \neq 0$
$0 = -12x + 100$

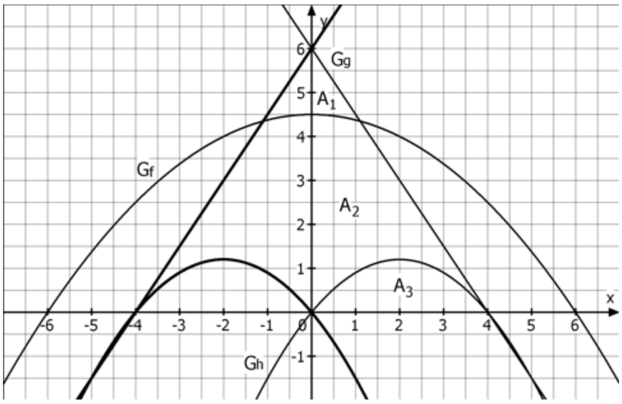
$x_W = \frac{25}{3}$

$f'''(x) = -12 < 0 \implies$ Wendepunkt
$f\left(\frac{25}{3}\right) \approx 4815$

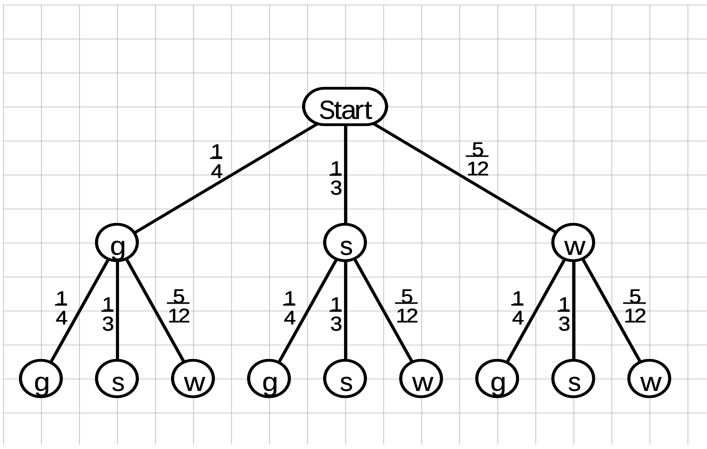
$W\left(\frac{25}{3} \middle| 4815\right)$

Um 8:20 Uhr hat die Anzahl der angemeldeten Nutzer am stärksten zugenommen.
</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
</table>

Teil- aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
1.4	 Gerade *s* aus Aufgabe 1.5		5	
1.5	Zeichnung der Geraden *s*. $s(x) = mx + n$ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3652 - 2500}{24 - 0} = 48$ $n = 2500 \Rightarrow s(x) = 48x + 2500$ Der Wert ist positiv, also ist die Nutzerzahl am Ende des Tages größer als zu Beginn des Tages. Zudem betrug das Wachstum der Nutzerzahl durchschnittlich 48 Nutzer pro Stunde.	2 3	2	
1.6	$5500 = a \cdot 10^4 + 50 \cdot 10^2 + 1500$ $5500 = 10000a + 6500$ $-1000 = 10000a \quad \Rightarrow a = -0{,}1$			3
1.7	$h(x) = g(x) - f(x) = -0{,}1x^4 + 2x^3 - 1000$ $h'(x) = -0{,}4x^3 + 6x^2$ $0 = -0{,}4x^3 + 6x^2 = x^2(-0{,}4x + 6)$ $x = 0$ entfällt $x = 15$ $g(15) - f(15) = 7687{,}5 - 7000 = 687{,}5$ In dem Zeitraum $10 \leq x \leq 18$ war bei $x = 15$ (15 Uhr) der Unterschied der Nutzerzahlen maximal und betrug rund 688 Nutzer.			7
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	8	22	10
	Summe der BE	40		

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
2.1	$g(x) = 0$: $0 = -1{,}5x + 6 \implies x_{Ng} = 4$ $h(x) = 0$: $0 = -0{,}3x^2 + 1{,}2x = x(-0{,}3x + 1{,}2) \implies x_{N1h} = 0;\ x_{N2h} = 4$	3		
2.2	$g(x) = f(x)$: $-0{,}125x^2 + 4{,}5 = -1{,}5x + 6$ $0 = 0{,}125x^2 - 1{,}5x + 1{,}5$ $0 = x^2 - 12x + 12$ $\implies x_{S1} = 6 + 2\sqrt{6} \approx 10{,}90$ Entfällt, da die Schnittstelle außerhalb des Intervalls liegt! $\implies x_{S2} = 6 - 2\sqrt{6} \approx 1{,}10$ $\implies g(x_{S2}) = f(x_{S2}) \approx 4{,}35 \Rightarrow S_2(1{,}10\|4{,}35)$	5		
2.3		2		
2.4	$i:\ i(x) = 1{,}5x + 6$ Begründung: gleicher y - Achsenabschnitt wie g, Steigung wie g nur mit positivem Vorzeichen. $j : j(x) = -0{,}3(x + 4)(x + 0) = -0{,}3x^2 - 1{,}2x$ Begründung: gleicher Streckfaktor wie h, Nullstellen bei $x_{N1j} = -4;\ x_{N2j} = 0$.			2 3
2.5	$A_1 = \int_0^{1,10} (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^{1,10} (0{,}125x^2 - 1{,}5x + 1{,}5)\,dx$ $A_1 = \left[\frac{1}{24}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x\right]_0^{1,10} \approx 0{,}8\text{ FE} = 0{,}8\text{ dm}^2$ $A_3 = \int_0^4 h(x)\,dx = \int_0^4 (-0{,}3x^2 + 1{,}2x)\,dx = \left[-\frac{1}{10}x^3 + \frac{3}{5}x^2\right]_0^4$ $A_3 = \frac{16}{5} = 3{,}2\text{ FE} = 3{,}2\text{ dm}^2$		6 5	

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
2.6	$A_2 = \int_0^{1,10} (f(x) - h(x))\,\mathrm{d}x + \int_{1,10}^{4} (g(x) - h(x))\,\mathrm{d}x$ Alternativen sind ebenfalls zu akzeptieren. Beispielsweise über die Berechnung der Dreiecksfläche, die von der Geraden G_g, der y - Achse und der x - Achse gebildet wird: $A_2 = A_{\text{Dreieck}} - (A_1 + A_3)$.		4	
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	10	15	5
	Summe der BE	30		

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
3.1	g = grau s = schwarz w = weiß (Die Legende ist nicht zwingend erforderlich.) 		8	
3.2	$P(\text{E}_1) = P(\text{g}\cap\text{g}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$ $P(\text{E}_2) = P(\text{g}\cap\text{g};\ \text{s}\cap\text{s};\ \text{w}\cap\text{w}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{25}{72} \approx 0{,}3472$ $P(\text{E}_3) = P(\text{g}\cap\text{g};\ \text{g}\cap\text{w};\ \text{w}\cap\text{g};\ \text{w}\cap\text{w}) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{12} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12}$ $P(\text{E}_3) = \frac{4}{9} \approx 0{,}4444$ $P(\text{E}_4) = P(\text{g}\cap\text{g};\ \text{g}\cap\text{w};\ \text{g}\cap\text{s};\ \text{s}\cap\text{g};\ \text{w}\cap\text{g}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + 2\cdot(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{12})$ $P(\text{E}_4) = \frac{7}{16} = 0{,}4375$		2 2 3 3	
3.3	Die Wahrscheinlichkeiten ändern sich nicht, da immer noch die gleiche Anzahl der jeweiligen Kreissegmente existiert.			2
3.4	$P(\text{g}\cap\text{g}\cap\text{g}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64} \approx 0{,}0156$ $P(\text{s}\cap\text{s}\cap\text{s}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27} \approx 0{,}0370$ $P(\text{w}\cap\text{w}\cap\text{w}) = \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{125}{1728} \approx 0{,}0723$		6	
3.5	P("keine Auszahlung") = 1 – 0,0156 – 0,037 – 0,0723 = 0,8751 E = 0,8751 · 0 € + 0,0156 · 6 € + 0,037 · 5 € + 0,0723 · 4 € = 0,5678 € Für einen Euro Einsatz werden ca. 57 Cent ausgezahlt. Somit beträgt der Verlust im Durchschnitt 0,43 €. (Alternative Lösungswege sind möglich.)			4
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	0	24	6
	Summe der BE	30		